Maribo 陨石

引言

小流星是从彗星或者小行星分离出来的部分（一般直径小于 1 米）。小流星撞击地球后落在地球上就被称为陨石。

在 2009 年 1 月 17 日，住在波罗的海附近的很多人亲眼看到了一个小流星穿过地球大气而划过的闪亮轨迹（或者叫火球）。瑞典（瑞典位于丹麦首都哥本哈根的东北面）的一个监视摄像机恰巧拍下了这个事件，见图 1.1（a）。利用这些图片和目击者的讲述，可以缩小流星撞击区域的寻找范围。六周后，在丹麦南部城市 Maribo 发现了一个质量为 0.025 千克的陨石。对这个陨石（现在取名为 Maribo 陨石）参数的测量和它在天空的运行轨道的测量,得到了有趣的结果。从测量结果可以得出，这个陨石进入大气层的速度非常高。从测量还可以推测出它的年龄为4.567×10^9年，这告诉我们它形成于太阳系产生后不久。因此，可以推测 Maribo 陨石可能是 Encke 彗星的一部分。

Maribo 陨石的速度

小流星向西运动，朝向与正北方向夹角为 285 度（见图 1.1），后来陨石就是在这个方向被发现的。陨石发现点离监视摄像机 195 公里，以摄像机为观测点，落地点的方位角为北偏西 230 度。

1.1	利用以上描述和图 1.1 中的数据计算 Maribo 陨石在 155 帧画面和 161 帧画面之间的平均速度。忽略地球的曲率和作用在小流星上的万有引力。	1.3

陨石穿过大气和被烧熔

在比较高的高空中，空气作用于小流星上的摩擦力的形成因素比较复杂，比如小流星的形状和运行速度以及大气的温度和密度等。但是，根据合理的近似，在较高处的大气层，摩擦力F 可以用公式$F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$ 表达，式中, k 是常数， ρ_{atm} 是大气的密度, A 是陨石的投影平面面积，v 是小流星的速率。

对于这个陨石，可以做下面的简化：进入大气的物体是一个球体，其质量$m_{\text{M}} = 30\ \text{kg}$，半径$R_{\text{M}} = 0.13\ \text{m}$，温度$T_0 = 200\ \text{K}$，速率$v_{\text{M}} = 2.91 \times 10^4\ \text{m/s}$，大气密度是一个常数（取地球表面上 40 千米处的数据）,即$\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}\ \text{kg/m}^3$，摩擦系数$k = 0.60$。

1.2a	估算小流星进入大气层后，它的速率减少 10 %(即从v_{M} 减少到 0.90 v_{M})时，要花费多长时间。忽略作用在小流星上的万有引力，并假设小流星的质量和形状保持不变。	0.7
1.2b	小流星进入大气层后的动能E_{kin}，是小行星完全烧熔所需要的能量E_{melt}的多少倍？（需用的物理参量详见所附的参数表）	0.3

(a)



(b)

桢	时间	方位角	高度角
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°
落点 M		230°	0.0°

(c)

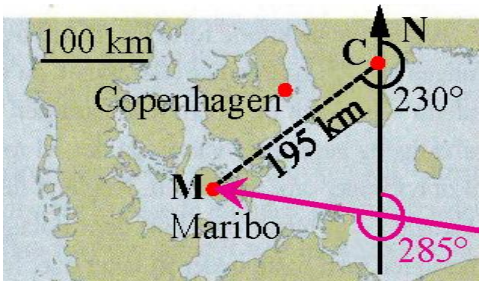


图 1.1（a）位于瑞典的监视摄像机拍摄到的一系列画面，从画面中可以看出 Maribo 小流星在大气中的运行轨迹,本图给出了 148,155,161,168 这四桢图片。图中方位角是流星飞行过程中处在某点时该点与摄像头位置 C 的连线在水平面上与正北方向 N 的夹角(从正北方向顺时针旋转到该直线的角度)，高度角是该连线与水平面的夹角。图 1.1（b）给出了 155 和 161 这两桢图片的一些数据包括时间，相对于图（c）中的摄像机的位置点 C 的方位角（用角度表示），以及相对于水平线的高度（用角度表示）。图 1.1 （c）为 Maribo 小流星降落路径俯视图（红色箭头），图中 C 点为摄像机的位置，M 为小流星落地点。

Maribo 小流星在大气层中降落时的被加热过程

冷的 Maribo 小流星以超声速进入大气层后会变成一个火球，是因为周围的大气的燃烧造成的。不过，只有 Maribo 小流星的最外层的表面被加热。假设 Maribo 小流星是一个均匀的、密度为ρ_{sm}的球体，比热容为c_{sm}，热导率为k_{sm}(详细数据参看后面的参数附页)。当 Maribo 小流星进入大气层时其温度为$T_0 = 200$ K，当穿过大气层时，由于大气摩擦，它表面温度升高，设为常数$T_{\mathrm{s}} = 1000$ K。这样，小流星体内部被逐渐地加热。

在大气层中降落一段时间t之后，Maribo 流星厚度为x的外壳会被加热到显著高于T_0的一个温度值。可以通过热力学参数之间的量纲分析来估算这个厚度 $x \approx t^{\alpha}\rho_{\mathrm{sm}}^{\beta}\, c_{\mathrm{sm}}^{\gamma}\, k_{\mathrm{sm}}^{\delta}$。

1.3a	通过量纲分析四个指数α， β， γ 和δ的数值来确定此厚度x	0.6
1.3b	计算降落时间为$t = 5$ s后的厚度x，并计算比值x/R_{M}	0.4

陨石的年龄

放射性元素的化学性质可能是不同的，因此对于某个陨石，在结晶过程中,有些矿物质含有较多的放射性元素，而有些矿物质含有较少量的放射性元素。利用这个差异，通过测量放射性矿物质的放射性年龄，可以用来测定陨石的年龄。

作为一个特例，我们研究铷的 ^{87}Rb (原子序数为 37)同位素，它衰变为较稳定的同位素锶 ^{87}Sr (原子序数为 38,其半衰期为$T_{½} = 4.9 \times 10^{10}$ 年)和稳定的 ^{86}Sr，通过测量 ^{87}Sr 和 ^{86}Sr 的比值来确定陨石的年龄。在矿物质开始结晶时，^{87}Sr/^{86}Sr 的比值相同，而 ^{87}Rb/^{86}Sr 的比值不同,随着时间的推移，^{87}Rb 的总量由于衰变而减少，相应地，^{87}Sr 总量就增加了。其结果，今天 ^{87}Sr/^{86}Sr 的比值将不同于过去的。在 Fig. 1.2(a)中，水平线上的一些点（用空心圆圈）表示，不同的矿物质样品在最初结晶时 ^{87}Rb/^{86}Sr 的比值。

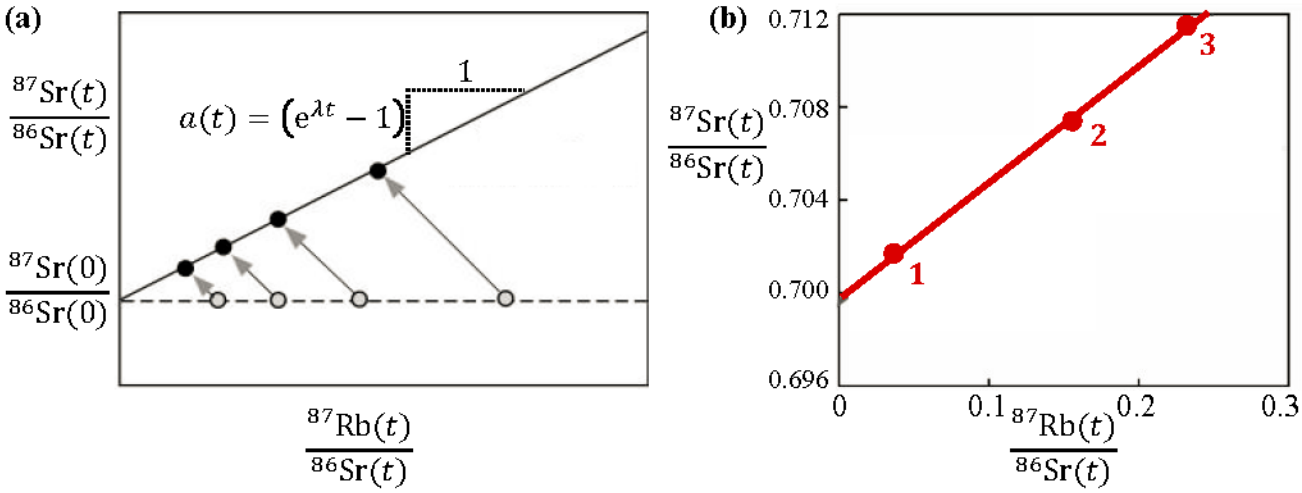


图 1.2 (a) 空心圆圈表示不同的矿物质样品开始结晶时（设时间$t = 0$），^{87}Sr/^{86}Sr 的比值；实心圆圈表示不同的矿物质样品经过很长时间后，目前的 ^{87}Sr/^{86}Sr 比值。图 1.2 (b) 在同一个陨石中取出的三个不同的矿物质样品的等时线（等时线的定义可以参见问题 1.4b）。

1.4a	写出由$^{87}_{37}$Rb衰变到$^{87}_{38}$Sr的衰变方程式	0.3
1.4b	试证明:同一个陨石内在不同位置处取几个矿物质样品,样品在目前时刻的 ^{87}Sr/^{86}Sr 值与目前时刻 ^{87}Rb/^{86}Sr 值之间的关系为直线(称为等时线)，且其斜率$a(t) = \left(e^{\lambda t} - 1\right)$，这里$t$是从矿物质结晶起的时间，$\lambda$是衰变常数，它与半衰期$T_{½}$成反比。	0.7
1.4c	应用 Fig. 1.2(b)中的等时线数据，计算出陨石的年龄τ_{M}	0.4

Encke 彗星，Maribo 陨石可能来自于此彗星

在 Encke 彗星围绕太阳运行的轨道中，其与太阳的最小距离和最大距离分别为$a_{\min} = 4.95 \times 10^{10}$ m 和 $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11}$ m。

1.5	计算 Encke 彗星的轨道周期t_{Encke}	0.6

小行星碰撞地球的影响

6500 万年前，地球被一颗巨大的小行星击中，小行星的密度为$\rho_{\mathrm{ast}} = 3.0 \times 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$，半径 $R_{\mathrm{ast}} = 5.0\ \mathrm{km}$，最终速率为 $v_{\mathrm{ast}} = 2.5 \times 10^4\ \mathrm{m/s}$。这次撞击导致地球上很多生命的灭绝，并形成了巨大的陨星坑（叫做 Chicxulub 陨星坑）。假设一颗相同的小行星现在要以完全非弹性碰撞的形式撞击地球，并且地球的实际转动惯量为具有相同质量和半径的匀质球体的 0.83 倍。质量为M，半径为 R的匀质球体的转动惯量为 $\frac{2}{5}MR^2$。忽略地球轨道的变化。

1.6a	使小行星撞击地球北极。求出碰撞后地球轴的角度的最大变化	0.7
1.6b	使小行星沿地球径向撞击赤道。求出碰撞之后地球自转一周时间的变化$\Delta\tau_{\mathrm{vrt}}$	0.7
1.6c	使小行星切线撞击赤道。求出碰撞之后地球自转一周时间的变化$\Delta\tau_{\mathrm{vrt}}$	0.7

最大碰撞速度

考虑一个天体，靠万有引力约束在太阳系中，以速率v_{imp}碰撞地球表面。开始时可以忽略地球引力场对天体的作用。不考虑大气层的摩擦、其他天体的作用和地球自转。

1.7	计算v_{imp}的最大的可能速率$v_{\mathrm{imp}}^{\max}$	1.6

等离激元蒸汽发生器

引言

本题我们研究一个先进和有效的产生蒸汽的方法，这个方法已经在实验上成功演示。盛有纳米尺寸银粒子球的水溶液（每升中含有大约10^{13}个粒子）被聚焦光束照射。纳米粒子吸收一部分光，被加热从而在其周围产生蒸汽，而整个水溶液却没有被加热。蒸汽以蒸汽泡的形式被纳米粒子和水溶液组成的系统释放出来。目前，这个过程并没有被全部弄清楚，但是，这个过程的核心部分可以解释如下：这种现象是由于金属纳米粒子中的、所谓的电子等离激元振荡（大量电子的集体振荡）造成的光共振吸收造成的。这个装置被称为等离子体蒸汽发生器。

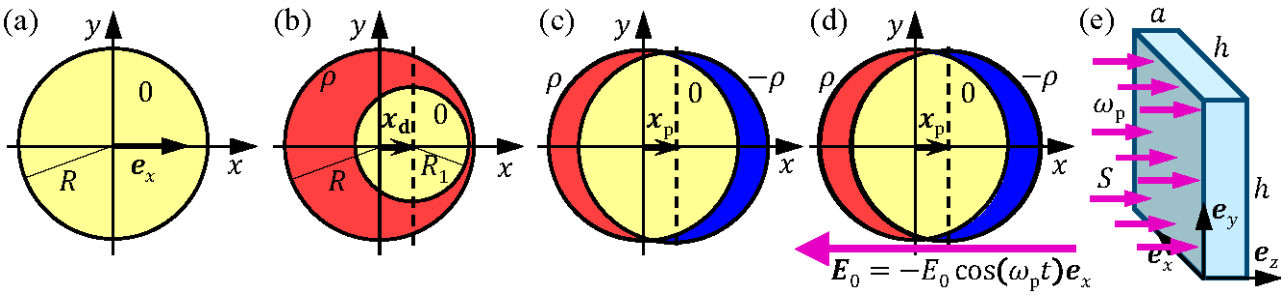


图 2.1（a）被放置在直角坐标系中心的电中性的半径为 R 的纳米球。（b）一个带有均匀正电荷密度ρ（红色）的球，里面包含一个半径为R_1的电中性区域(电荷密度为 0，黄色区域)，这个黄色小球的中心偏离原点距离为$\boldsymbol{x}_\mathrm{d} = x_\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_x$。（c）带有正电荷密度$\rho$的纳米银离子放置在直角坐标系的中心。带有负电荷密度$-\rho$(蓝色)的电子云的球形区域的中心离原点位移为$\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$，$x_\mathrm{p} \ll R$。（d）外加均匀电场 $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\boldsymbol{e}_x$，在一个随时间变化的外部电场$\boldsymbol{E}_0$作用下,电子云以速率$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$移动。（e）盛在矩形器皿$(h \times h \times a)$中的含有纳米粒子的水溶液,被沿着 z 轴方向传播的、角频率为ω_p和强度为S的单色光照射。

单个球形银纳米粒子

本题中，我们考虑半径$R = 10.0\ \mathrm{nm}$，中心在直角坐标系原点的球形银纳米粒子，如图 2.1（a）所示。所有运动、力和驱动电场都平行于水平x轴(单位是矢量$\boldsymbol{e}_x$)。纳米粒子内含有自由（导电）电子，这些电子可在纳米粒子内部运动,不被银原子束缚。每个银原子因为贡献一个这样的自由电子而变成一个带正电的离子。

2.1	求出下列参量: 纳米粒子的体积V 和质量 M，纳米粒子中银离子的数量 N 和电荷密度 ρ, 以及自由电子浓度 n, 自由电子总电荷 Q, 自由电子总质量 m_0.	0.7

带电球体内部的电中性区域的电场

本题余下的部分,我们假设所有材料的相对介电常数$\varepsilon = 1$。在均匀电荷密度ρ和半径 R 的带电球中，在半径为R_1的球形区域中加入负电荷密度$-\rho$，从而产生一个电中性区域。这个电中性小球区域的中心离原点位移为$\boldsymbol{x}_\mathrm{d} = x_\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_x$，请参看图 2.1（b）。

2.2	证明电中性区域内部电场是匀强电场,其表达式为$\boldsymbol{E} = A\,(\rho/\varepsilon_0)\,\boldsymbol{x}_d$，并算出系数 A 的值。	1.2

偏离中心的电子云上的恢复力

下面，我们研究自由电子的集体运动，因此建立以下模型，中心位于$\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$的带有均匀电荷密度$-\rho$的单个带负电荷的小球沿着 x 轴方向的相对于放置在直角坐标系原点的正电荷球（银离子）中心的方向运动，参看图 2.1（c）。假设一个外力$\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$使电子云移动到一个新的平衡位置$\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = x_\mathrm{p}\,\boldsymbol{e}_x$，其中$|x_\mathrm{p}| \ll R$。除了纳米粒子反向端的微小静电荷，纳米粒子内部大部分仍保持电中性。这个结果与前面的问题中当R_1趋向于R时的结果相符合。

2.3	用$\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$ 和 n 表达下面两个参量：作用在电子云上的恢复力 $\boldsymbol{F}$,电子云移动过程中做的功W_el 。	1.0

位于外部均匀电场中的球形银纳米粒子

给真空中的纳米粒子**施加均匀静**电场$E_0 = -E_0 e_x$，纳米粒子会受到一个外力F_ext的作用，从而使电子云移动一个小的距离$|x_\mathrm{p}|$，其中$|x_\mathrm{p}| \ll R$。

2.4	利用 E_0和 n,求出电子云产生的偏移 x_p，以及从纳米粒子中心沿着 yz 平面偏移时的电荷总量 $-\Delta Q$,用n, R 和 x_p表示	0.6

银纳米粒子的等效电容和电感

无论是稳恒电场还是随时间变化的电场$\boldsymbol{E}_0$，纳米粒子都可以看成一个等效电子电路模型。利用移动电荷量为ΔQ的电子云而做的功W_el, 和两个极板分别携带$\pm\Delta Q$电量的电容器的能量之间的关系,可以计算出等效电容。正负电荷的分离引起了等效电容上产生了等效电压V_0。

2.5a	用ε_0 and R 表示系统的等效电容 C，并求出它的值	0.7
2.5b	对于这个电容，当需要给等效电容充电ΔQ时，求出等效电压V_0表达式,用E_0 和 R 表示.	0.4

对于随时间变化的电场$\boldsymbol{E}_0$，电子云以速度$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$运动，如图 2.1（d）。电子云有动能 W_kin 并形成穿过平面 yz 流动的电流 I。电子云的动能，可归因于流有电流 I 的等效电感 L。

2.6a	用速率v表示 功 W_kin 和电流I	0.7

2.6b	用粒子半径R、电子电荷e、电子质量m_e、电子密度n表示等效电感L，并计算电感的值	0.5

银纳米粒子的等离激元共振

以上分析可以看出，电子云从其平衡位置偏移以及偏移恢复所引起的运动，可以等效一个理想的 LC 谐振电路。这个电子云的动态模型被称为等离激元共振，这个共振发生在等离激元共振角频率ω_p。

2.7a	用电子电荷e、电子质量 m_e、电子密度 n、介电常数ε_0 表示电子云的等离激元共振角频率ω_p	0.5
2.7b	角频率ω_p用 rad/s 作单位，真空中光波长λ_p 单位为 nm，计算当真空中光波的角频率$\omega = \omega_\mathrm{p}$时的$\omega_\mathrm{p}$的值	0.4

具有等离激元共振频率的光照射银纳米粒子

本题余下的部分，纳米粒子被强度为$S = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = 1.00\ \mathrm{MW\ m^{-2}}$、等离激元共振频率为$\omega_\mathrm{p}$的单色光照射。因为等离激元共振波长$\lambda_\mathrm{p} \gg R$(纳米粒子半径)，纳米粒子可以看成被放置在均匀的简谐振动场$\boldsymbol{E}_0 = -E_0\cos(\omega_\mathrm{p}t)\,\boldsymbol{e}_x$ 中。在$\boldsymbol{E}_0$驱动下，电子云中心位置$\boldsymbol{x}_\mathrm{p}(t)$在相同频率下以速度$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$ 和固定振幅x_0振荡。这种电子运动造成的振动会导致光的吸收。被纳米粒子吸收的能量会被转换成粒子内部的焦耳热能，或者作为散射光被粒子重新散射。

焦耳热是由随机非弹性碰撞引起的，当自由电子撞击到银离子时失去其所有的动能，这些丢失的动能被转化为银离子的振动能（热）。两次碰撞之间的平均时间$\tau \gg 1/\omega_\mathrm{p}$，对于银纳米粒子的情况，我们取$\tau = 5.24\times10^{-15}\ \mathrm{s}$。

2.8a	写出纳米粒子的时间平均焦耳功率P_heat的表达式，以及时间平均电流平方的表达式$\langle I^2\rangle$，表达式中必须包含电子云的时间平均速率的平方 $\langle v^2\rangle$。	1.0
2.8b	根据纳米粒子等效电阻模型，自由电子云的电流 I 在等效电阻上产生的焦耳热功率P_heat ,写出等效欧姆电阻R_heat的表达式,并计算R_heat的数值。	1.0

因为电子云共振(再辐射)导致的散射,使得入射光的功率损失了P_scat (时间平均功率)。P_scat 与散射源振幅x_0，电荷 Q，角频率ω_p和光的参数（光速 c 和真空介电常数ε_0）有关。利用以上变量，P_scat可以表达为 $P_\mathrm{scat} = \frac{Q^2x_0^2\omega_\mathrm{p}^4}{12\pi\varepsilon_0c^3}$。

2.9	利用P_scat 的表达式，求出等效散射电阻R_scat （类似R_heat）在等效电阻模型中的表达式，并计算它的值	1.0

将以上的等效电路模型合并后,可以建立银纳米粒子的 LCR 电路模型，这个等效 LCR 电路受到等效谐振电压$V = V_0\cos(\omega_\mathrm{p}t)$驱动,该电压由入射光的电场$E_0$决定。

2.10a	在等离激元共振时($\omega = \omega_p$)，推导出含有入射光电场幅度E_0的时间平均功率损耗P_{heat}和P_{scat}	1.2
2.10b	计算出E_0, P_{heat}, 和 P_{scat}的数值	0.3

光致蒸汽发生器

准备银纳米粒子的浓度$n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15}\ \text{m}^{-3}$的水溶液。水溶液被盛入尺寸为$h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0\ \text{cm}^3$的矩形透明容器，用具有等离激元频率的强度为$S = 1.00\ \text{MW m}^{-2}$的光垂直照射，请参考图 2.1（e）。水溶液的温度为$T_{\text{wa}} = 20\ ^\circ\text{C}$，我们假设在稳定状态，纳米粒子的全部焦耳热转化成温度$T_{\text{st}} = 110\ ^\circ\text{C}$的蒸汽，而没有使水溶液的温度升高。这个假设和实际观察符合得很好。

等离激元蒸汽发生器的热力学效率η由功率比$\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$确定,其中$P_{\text{st}}$是整个容器中所转化的蒸汽的功率，$P_{\text{tot}}$是进入容器的光的全部功率。

大部分时间里，纳米粒子都被蒸汽而不是水包围，因此纳米粒子可以认为是处在真空里。

2.11a	在被强度为S,频率为等离激元频率的光照射情况下，计算等离激元蒸汽发生器每秒产生的蒸汽的全部质量μ_{st}	0.6
2.11b	计算等离激元蒸汽发生器的热力学效率η的数值。	0.2

格陵兰冰盖

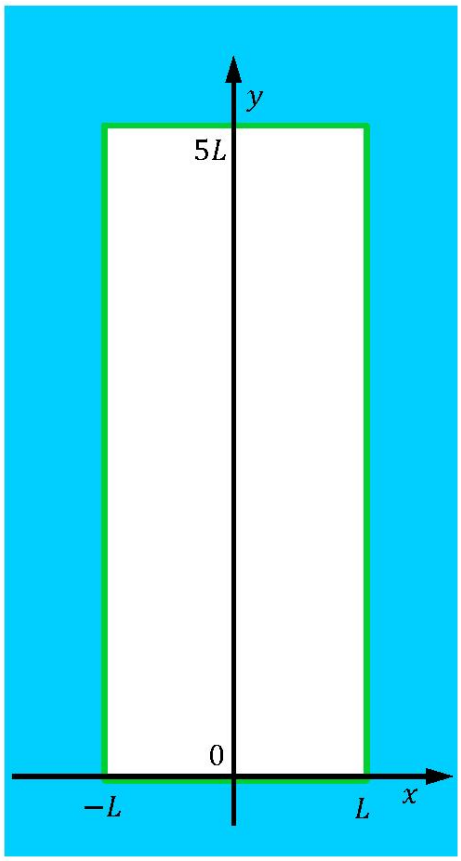
引言

这个题目是为了解决世界上第二大冰川---格陵兰冰盖的物理问题，如图 3.1（a）。格陵兰岛可以看成这样的模型：宽为 $2L$、长为 $5L$、底面位于海平面的矩形岛，完全被不可压缩的冰（密度常数为ρ_{ice}）覆盖，参考图 3.1（b）。冰盖的高度$H(x)$不随 y 坐标而变化，其高度值在海岸$x = \pm L$处为 0，向南北中轴线（y 轴）方向逐渐增加到最大值H_{m}（y 轴处），所以 y 轴被称为分冰岭，如图 3.1（c）。

(a)



(b)



(c)

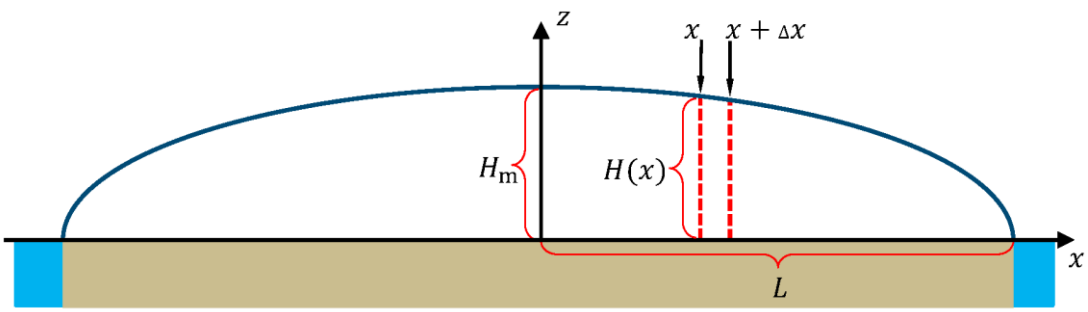


图 3.1(a)格陵兰岛地图，包含冰盖区域（白色），临海无冰区域（绿色）和周围海洋（蓝色）。（b）格陵兰岛冰盖粗略模型，$\boldsymbol{xy}$平面内边长为$\boldsymbol{2L}$ 和 $\boldsymbol{5L}$的矩形区域。最大冰盖高度$\boldsymbol{H_m}$的分冰岭沿着$\boldsymbol{y}$轴方向。(c)穿过冰盖的竖直剖面图($\boldsymbol{xz}$平面)显示了高度$\boldsymbol{H(x)}$随 x 变化图 (蓝线)。在$\boldsymbol{0 < y < 5L}$范围内，$\boldsymbol{H(x)}$和$\boldsymbol{y}$坐标无关，但是在$\boldsymbol{y = 0}$ 和 $\boldsymbol{y = 5L}$ 处忽然降为零。$\boldsymbol{z}$轴标记了分冰岭的位置。为了清晰起见，竖直维度相比水平维度有较大的扩展。冰的密度 $\boldsymbol{\rho_{ice}}$是一个常数。

两个有用的公式

在本题中，你可以使用积分：

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

当$|ax| \ll 1$时，可以得到近似$(1+x)^a \approx 1 + ax$ 。

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

冰盖的高度轮廓(高度随 x 变化的函数)

在短时间内，冰川是一个具有固定高度轮廓$H(x)$的不可压缩的静力学系统。

3.1	写出冰盖内部压强$p(x,z)$表达式,该压强是水平面以上竖直高度 z 和从分冰岭开始的距离x的函数。忽略大气压。	0.3

考虑冰盖上的一个处于平衡状态的竖直窄条，它在x 和 $x+\Delta x$之间覆盖的水平面积为$\Delta x \Delta y$，参考图 3.1（c）的红色虚线所包围的区域。Δy尺寸对结果没有影响。在窄条两个竖直侧边的水平分力ΔF，起源于窄条靠中心线一侧与靠海岸一侧的高度差。ΔF与基底的底面积$\Delta x \Delta y$产生的摩擦力$\Delta F = S_\mathrm{b}\,\Delta x \Delta y$保持平衡，这里切变应力$S_\mathrm{b} = 100$ kPa。

3.2a	对于一个给定的值x,当$\Delta x \to 0$ 时，证明$S_\mathrm{b} = kH\,\mathrm{d}H/\mathrm{d}x$,。并给出 k 的表达式。	0.9
3.2b	利用$\rho_\mathrm{ice}, g, L, S_\mathrm{b}$，以及到分冰岭的距离$x$这几个参数,推导出高度$H(x)$的表达式。结果将表明，最大冰川高度$H_\mathrm{m}$尺度与此半宽 L 满足：$H_\mathrm{m} \propto L^{1/2}$。	0.8
3.2c	证明冰盖总体积V_ice 与矩形岛状面积A之间的关系满足:$V_\mathrm{ice} \propto A^\gamma$,确定$\gamma$指数的值.	0.5

冰盖动力学模型

实际上，冰是一种不可压缩的半流体，通过重力的作用从中心部分流向海岸。在这个模型中，冰盖的高度轮廓$H(x)$处于一个稳定状态，因为下雪造成的中心区域冰的积聚与海岸冰的融化相平衡。为了满足图 3.1（b）和（c）冰盖的几何形状，做以下假设：

1）冰的流动方向平行于x 轴，朝着离开冰分界线（y 轴）的趋势
2）冰块中心区域冰的积聚率 c（米/年）是一个常数
3）冰只能通过在东西海岸的融化从冰川离开
4）水平（x 轴）冰流速率分量$v_x(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和z轴无关
5）竖直(z 轴)冰流速率分量$v_z(z) = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$和$x$轴无关

只考虑靠近冰块中间线的$|x| \ll L$的中心区域，冰块的高度变化非常小以至于可以被忽略，即$H(x) \approx H_\mathrm{m}$。

3.3	利用质量守恒来求出水平冰流速率$v_x(x)$关于c, x 和 H_m的表达式	0.6

从不可压缩的假设，冰的密度常数ρ_ice，可以从质量守恒证明冰流速率分量满足下式：

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	写出竖直冰流速率分量$v_z(z)$关于z 的表达式	0.6

一个初始表面位置为$(x_i, H(x_i)$的小的冰粒子将随着时间的流逝，作为冰块的一部分在竖直 xz平面内沿着冰块流动轨迹进行流动。

3.5	推导这种流动轨迹$z(x)$的表达式	0.9

冰盖动力学模型中的年龄和气候指标

根据冰流的速度分量$v_x(x)$ 和 $v_z(z)$，人们可以估计距离冰盖表面深度$H_\mathrm{m} - z$处的冰的年龄$\tau(z)$

3.6	求出在分冰岭$x = 0$处冰的年龄$\tau(z)$作为高度z的函数的表达式	1.0

从格陵兰冰盖内钻取的冰芯会穿透陈年积雪层，因此冰芯可被用来揭示过去的气候变化。最好的指标称为$\delta^{18}\mathrm{O}$，定义为

$$\delta^{18}\mathrm{O} = \frac{R_\mathrm{ice} - R_\mathrm{ref}}{R_\mathrm{ref}}\ 1000\ ‰,$$

此处 $R = [^{18}\mathrm{O}]/[^{16}\mathrm{O}]$ 表示氧的两个稳定同位素$^{18}\mathrm{O}$ 和 $^{16}\mathrm{O}$的相对丰度。参考值R_ref 基于赤道附近海洋中同位素的组成。

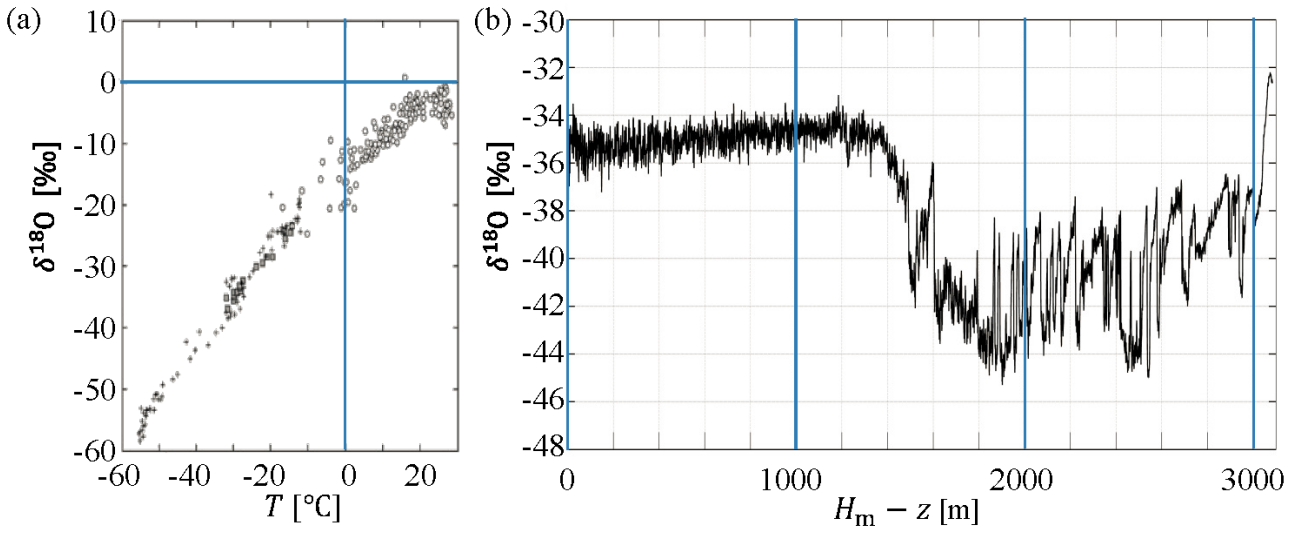


图 3.2 (a) 观察到的雪中的δ^{18}O 与每年表面温度T的关系。 **(b)**相对于表面的深度 $H_m - z$ 的δ^{18}O,测量结果,取自沿格陵兰分冰岭特殊位置$H_m = 3060$ m 的从表面钻到基岩的冰芯。

格陵兰冰盖观察结果显示雪中的 δ^{18}O 基本随温度线性变化，如 Fig. 3.2(a)所示。假设一直是这种情况 ，从深度$H_m - z$冰芯处获得的 δ^{18}O 可用来估计在年龄$\tau(z)$时格陵兰附近的温度。

3060 m 深的冰芯中的δ^{18}O的测量结果显示在深度 1492 m 处 δ^{18}O有一个突然变化，参见 Fig. 3.2(b)，标志着最后一个冰河时代的结束。冰河时代始于 120,000 年前, 对应深度 3040 m，目前的间冰期始于 11,700 年前，对应深度 1492 m。假设这两个时期可以分别通过两个不同的沉积速率c_{ia} (冰河时代)和 c_{ig} (间冰期)描述。

3.7a	确定沉积速率c_{ia} 和 c_{ig}	0.8
3.7b	利用 Fig. 3.2 中的数据找出从冰河时代到间冰期转变时的温度变化值	0.2

格陵兰冰盖融化导致海平面上升

格陵兰冰盖完全融化会导致全球海洋的海平面上升。作为海平面上升的粗略估计，可以简单考虑地球上面积$A_O = 3.61 \times 10^{14}$ m^{2}的海平面均匀升高。

3.8	计算格陵兰冰盖完全融化导致的全球海平面升高的平均值，目前海洋面积$A_G = 1.71 \times 10^{12}$m^2，切变应力$S_b = 100$ kPa	0.6

巨大的格陵兰冰盖对周围海洋施加一个巨大的万有引力拉力。如果冰盖融化，当地的潮汐会消失而且海平面下降，这种现象和前面所计算的海平面上升的作用是相反的。

为了估计万有引力对海水拉力的程度，格陵兰冰盖现在被当做一个在地平面的巨大质点模型。哥本哈根位于沿地球表面距离此质点 3500 km 的位置。可以认为没有这个冰质点的地球是球对称的，并且全球的海洋均匀分布在面积为$A_{\mathrm{E}} = 5.10 \times 10^{14}\mathrm{m}^2$的地球的整个表面。地球转动的所有效应都可以忽略。

3.9	在此模型中，求出在哥本哈根的海平面 (h_{CPH})和格陵兰的海平面(h_{OPP})的差值 $h_{\mathrm{CPH}} - h_{\mathrm{OPP}}$	1.8

E1 光的速度

注意：所有的测量和计算结果都必须采用国际单位制，注意有效数字的位数要合适，不要太多也不要太少，题目中要求写出不确定度的地方必须明确写出。

1.0 引言

激光测距仪(LDM)实验

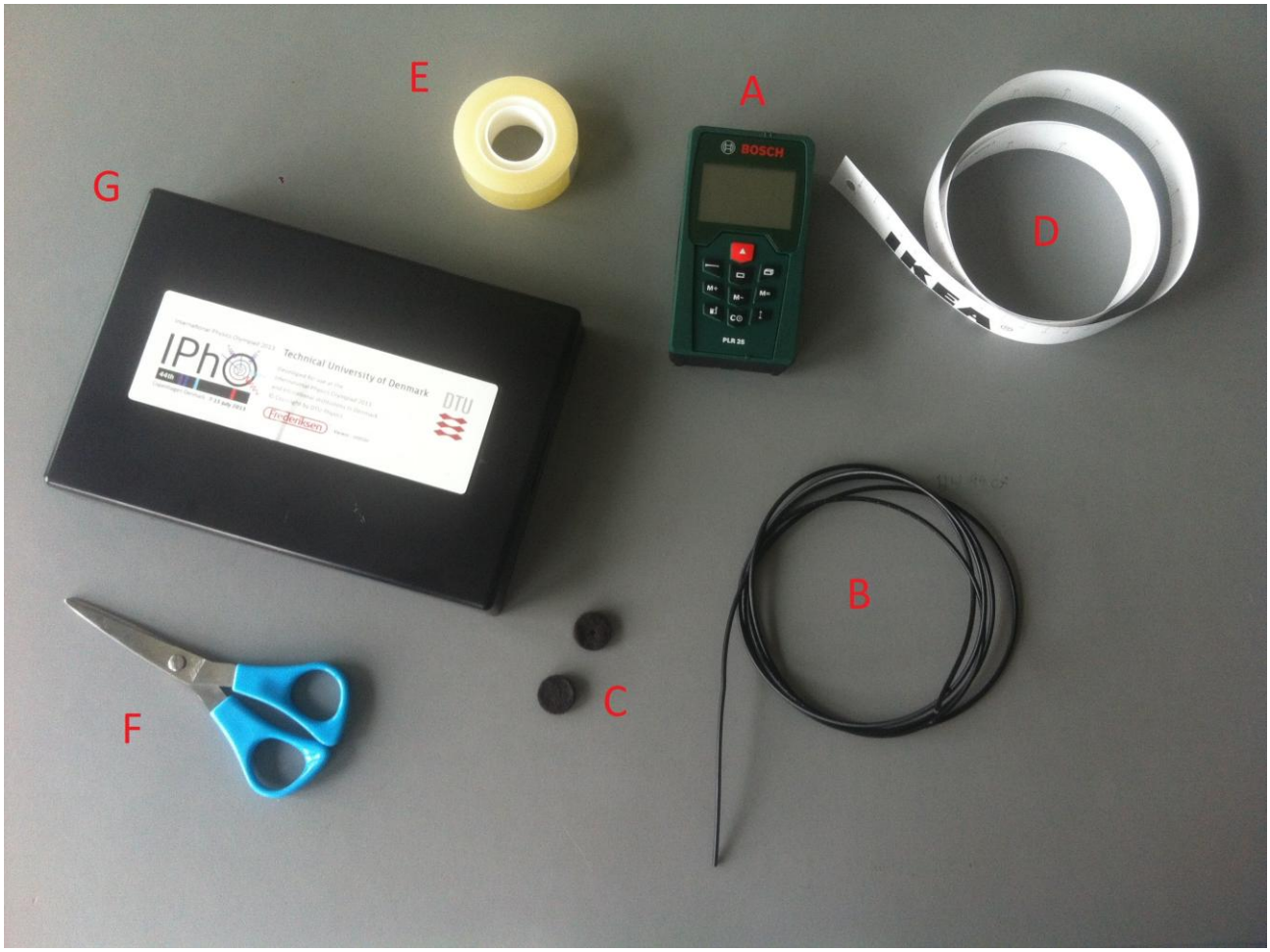


图 1.1 实验器材

A：激光测距仪
B：光纤(约 1 米长)
C：带孔的自粘黑色毡垫
D：卷尺
E：胶带
F：剪刀
G：黑盒子的盖子

激光测距仪(LDM，见图 1.2 和图 1.3)包含一个发射器和一个接收器。发射器是一个发射激光束的二极管激光器。当激光束射到物体上，光点处的激光向各个方向(漫)反射。一些光返回到测距仪上紧邻发射器的接收器。接收器前端有一个望远镜系统,它接受并聚焦从光点反射回的光。激光测距仪的电路部分用来测量计算得到光信号从发射到接收的时间差,也就是光从发射器到接收器所需要的时间延迟t。通过测量到的时间，用下式可以计算出距离的值

$$y = \frac{1}{2}ct + k$$

这个数值y显示在激光测距仪的显示屏上。这里，$c = 2.998 \cdot 10^8 \mathrm{ms}^{-1}$是光速。常数$k$依赖于仪器的设置方式：你可以用按钮（如图 1.2 中的按钮 B）来设置激光测距仪是从头部还是从尾部进行测量。当打开激光测距仪时，默认设置是从尾部开始测量即测量显示的数据包括测距仪本身的长度,**本实验所有的测量过程中都必须保持这种设置。**

LDM 不能测量 5 cm 以内的距离，它能测量的最大距离为大约 25 m。激光测距仪尾部的边和头部的边都与激光束垂直。当仪器躺放在桌子上时，偏振是竖直的（垂直于显示屏）

二极管激光器的功率< 1 mW，波长为 635 nm，属于 2 类激光，其不确定度为+/- 2 mm。

警告：激光测距仪中的二极管激光能伤害眼睛。不要直视激光束也不要把激光射向他人的眼睛！

LDM 的设置

上述距离y的计算是假设光以光速c传播的。因为在常压和常温下，干燥的空气的折射率为$1.000\ 29 \approx 1.000$，因此在本实验的精度范围内，不需要考虑在真空中和在空气中光速的区别。



图 1.2 图中未标记的六个按钮与本实验无关（它们是用于测量面积和体积的）。与本实验相关的按钮(或显示)为：

A：开/关按钮(长按数秒会关闭)
B：从头部测量或从尾部测量的转换按钮
C：显示从头部还是从尾部测量(本图中的显示表明是从尾部测量)
D：开始测量按钮
E：连续测量按钮
F：连续测量的指示



图 1.3 从头部看到的激光测距仪

A：接收器：望远镜系统将收集到的光进行聚焦

B：发射器：千万不要直视激光束!

1.1 利用激光测距仪测量

当按下按钮 **D** 可以进行测量，见图 1.2。

1.1a	利用 LDM 测量桌面到地面的距离H,答案中要求写出不确定度ΔH。画出你进行测量的示意图	0.4

1.2 利用光纤进行实验



图 1.4 光纤示意图

给你一根长约为 1 m、直径约为 2 mm 的光纤。光纤由两种光学材料组成。芯（直径约为 1 mm）由高折射率的塑料制成。芯外包裹一层包层,包层由比芯的折射率稍低一点的塑料制成。最外边是一层黑色塑料保护层。芯和包层构成一个导光的波导，由于芯和包层的边界

能够引起全反射，只要光的入射角大于临界角就能防止光离开光纤的芯。即使光纤弯折，只要光纤弯折的不是很厉害，光都能沿光纤传输。

现在将 LDM 设为连续测量模式（按钮 **E**，见**图 1.2**），则显示屏上y的显示值大约每秒钟更新一次。几分钟之后 LDM 将自动进入睡眠状态。按下红色的开始按钮 D 可以重新激活它。

首先小心且轻轻地用一片带有 2 mm 直径小孔的黑色毡垫盖住 LDM 的接受器前的透镜(如**图 1.3 中 A 处**)。毡垫带有粘性的一面轻轻按压粘到透镜上。然后将长度为x的光纤插入毡垫的小孔，使光纤与镜片接触，见**图 1.5**。



图 1.5 （a） 将光纤插入毡垫的小孔中的示意图。（b） 把光纤头通过毡垫的小孔，接触上透镜

发射器前端的镜片上, 轻轻贴上另外一片毡垫。光纤的另一端穿过毡垫上的小孔,使其接触发射器上的镜片。现在从显示屏上读出y值。提供的剪刀是用来将光纤剪成不同的长度x的。

在剪光纤之前应仔细考虑测量方案(光纤长度,测量次序等),因为你只有一根光纤(不会提供另外的光纤)!!

还要注意 LDM 显示屏在连续工作模式下,可能会因为内部电路过热而显示一个温度计的图标。如果发生这种情况，关掉 LDM 一会儿,以使其降温。

1.2a	测量相应的x 和 y值。设置一个测量表格并将测量结果填入。作图，显示y 是 x的函数	1.8
1.2b	利用所作的图推导计算出纤芯材料的折射率n_{co} 。计算纤芯中的光速v_{co}	1.2

1.3 与竖直方向倾斜一定角度的激光测距仪

这部分实验要用到**图 1.6** 中的实验器材。

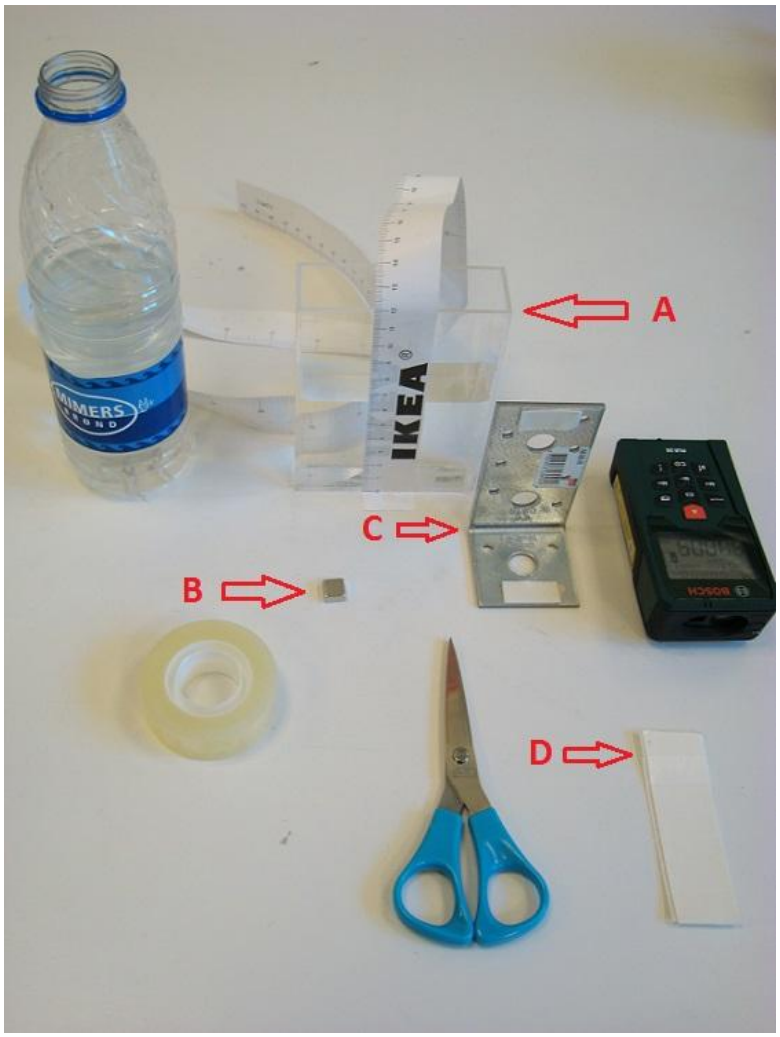


图 1.6 图中的器材：

A：贴有测量尺的装有水的透光容器

B：磁铁，用于将角铁架稳定地放置在黑盒子的上方（可在角铁上面找到磁铁）

C：带有双面胶的角铁架

D：双面胶

拿掉激光测距仪的激光出射口透镜上的黑毛毡垫，把激光测距仪按如下步骤放置：把两片双面胶粘帖在角铁架上，见图 1.7 的 **A** 处。

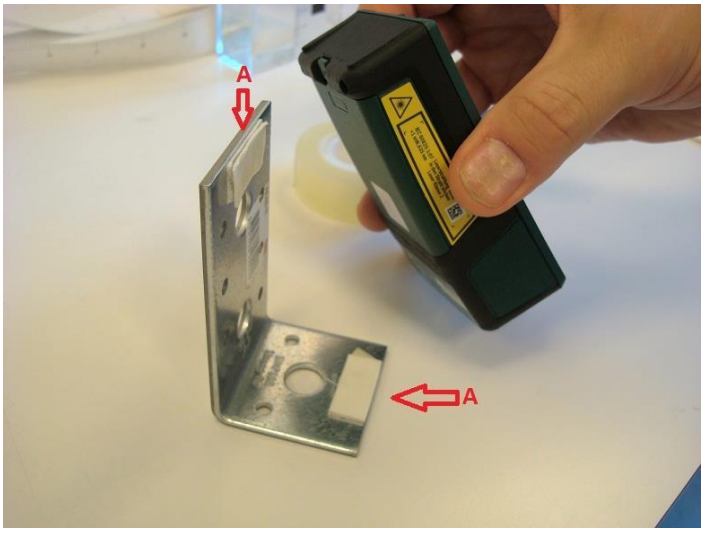


图 1.7 如何在角铁架上个放置两片双面胶

小心地把激光测距仪如图 1.8 那样放置在角铁架上。

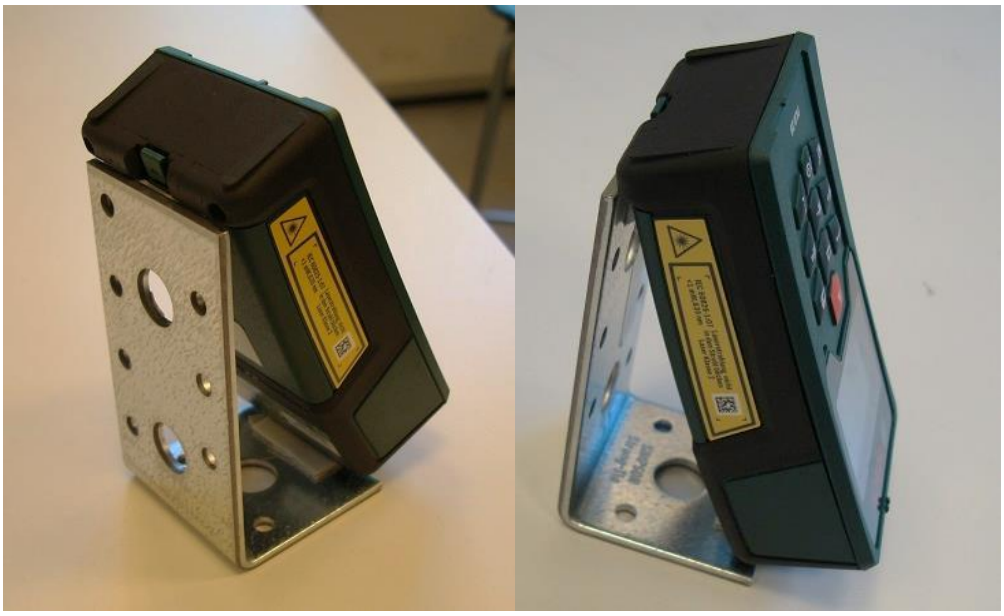


图 1.8 如何在角铁架上放置激光测距仪(注意方向)

把装有激光测距仪的角铁架，如**图 1.9** 那样放置在黑盒子上。 注意：把小磁铁吸在黑盒子的内部的上表面，用磁铁的吸力保证角铁架安全地固定在黑盒子上。一定要保证把激光测距仪按照图中所示放置，不这样放置会可能摔倒，因为黑盒子上表面相对于水平面有一个大约 4 度的倾斜角。现在激光束可以无阻挡地以某个角度向下照射。

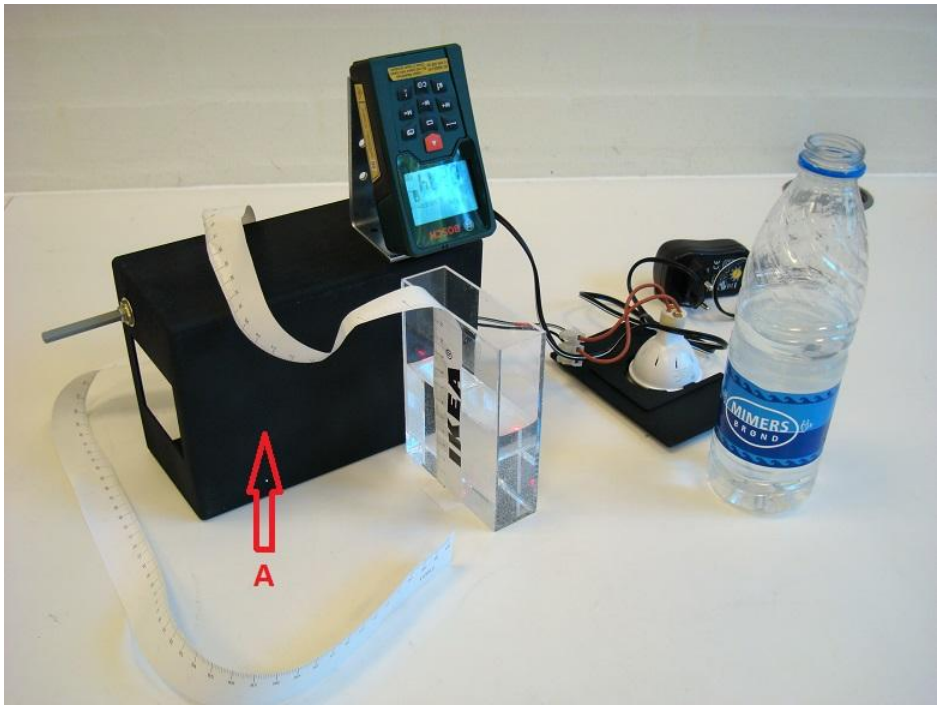


图 1.9 实验装置图（黑盒子仅仅作为一个支撑物，矿泉水瓶子后面的元件并不需要用到）

图中标志 **A** ：注意：黑盒子一定按照图中那样放置,使其底部向前。黑盒子上表面相对于水平面有一个大约 4 度的倾斜角,实验中确保角度 $\boldsymbol{\theta_1}$**始终不变**。

按照上面解释的方法放置 LDM，当开启后,激光束与竖直方向成θ_1的角度，在本实验中这个角度一定要保持不变,如果实验仪器不小心移动位置，就要重新测量。我们现在来测量这个角度。这个时候不需要透光容器，可以先把它放置在一边。

1.3a	测量距离y_1，即照射在桌面上的激光点到激光测距仪的距离。接着，轻轻地水平移动固定着激光测距仪的黑盒子，直到激光束照射到地面。测量距离y_2，即照射在地面上的激光点到激光测距仪的距离。测量的距离要求给出带不确定度的数值	0.2
1.3b	仅用测量到的 y_1， y_2 和 H(1.1a 中测量到的桌面的高度)来计算θ_1，可画出测量示意图，并计算不确定度$\Delta\theta_1$	0.4

1.4 利用透光容器进行实验

把透光容器放置在黑盒子旁边，并放置在激光测距仪下面，让激光束大致照射在容器的中央，如**图 1.10** 所示。向容器中加入一些水，水的深度设为 x，在激光测距仪的显示屏上读出y值。

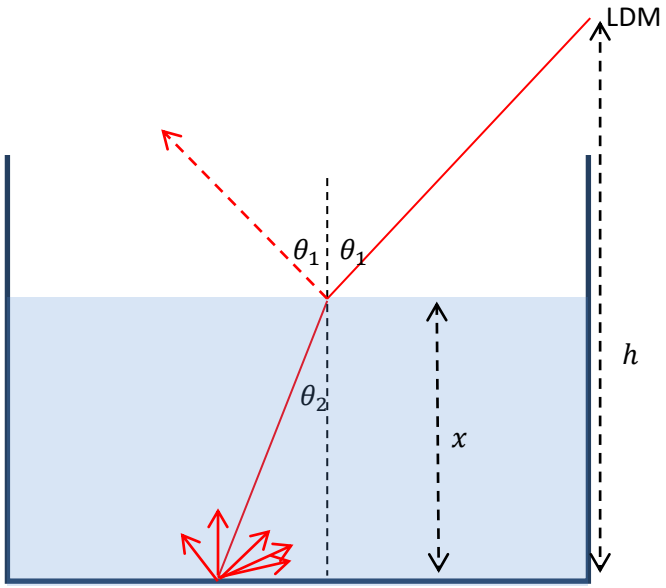


图 1.10 激光照射水深为x的透光容器的示意图

1.4a	在容器中注入不同深度x的水，测量相应的y，列一个表格，把测量的数据填入。把y作为x的函数画图	1.6
1.4b	利用理论公式和适当推导，解释说明上图的测量数据和拟合线是正确的	1.2
1.4c	利用画的图得到的直线的斜率的数值计算出水的折射率n_{w}	1.2

E2 太阳能电池

2.0 引言

.本实验中所用的实验装置见**图 2.1**

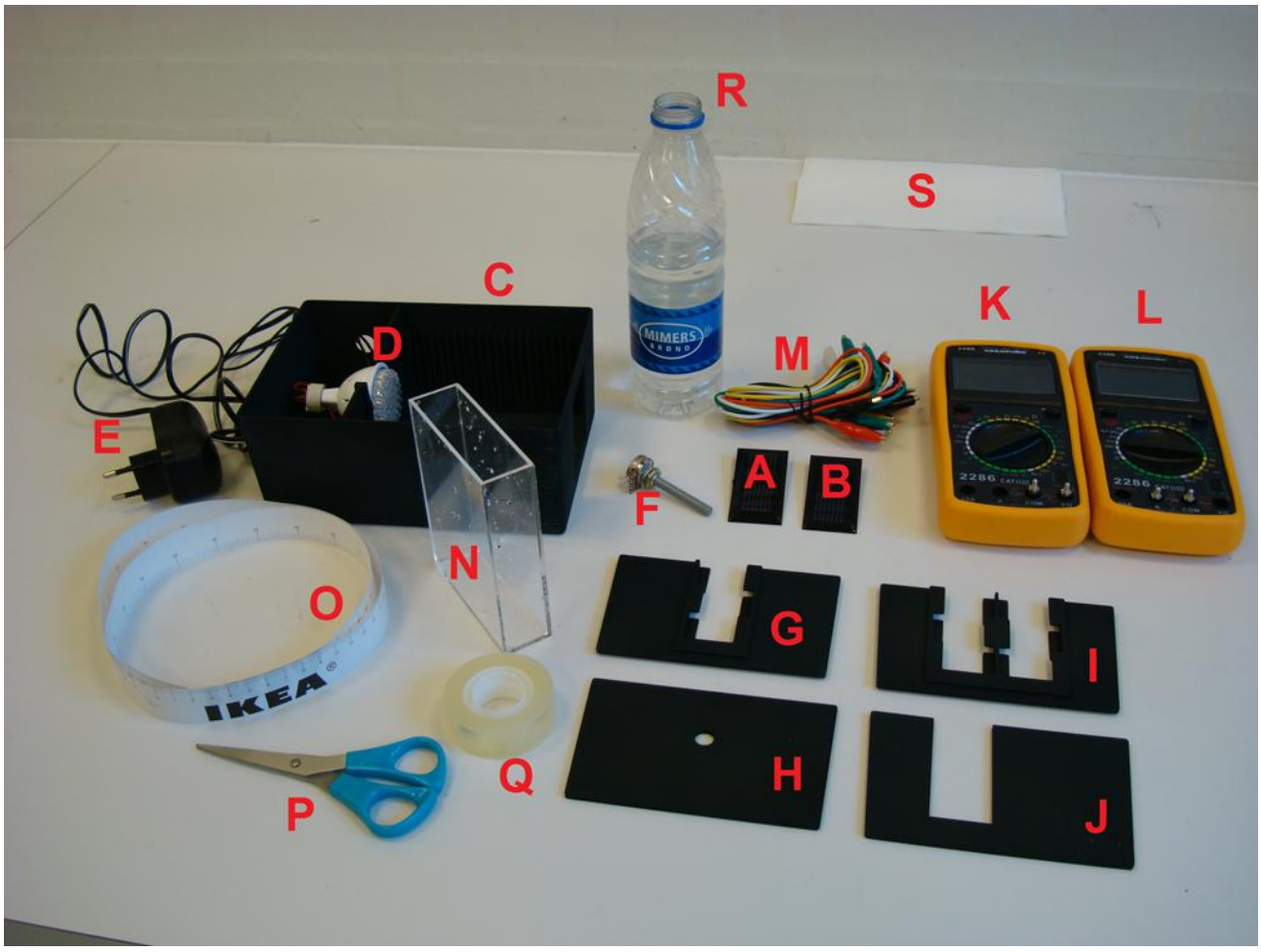


图 2.1 本实验所用器材

元器件列表（**图 2.1**）

A：太阳能电池
B：太阳能电池
C：带插槽的盒子,用于安装光源,太阳能电池等
D：LED（发光二极管）光源及支撑架
E：LED 光源的电源

F：可变电阻
G：在盒子 C 里安装单个太阳能电池的支架
H：可以安装在盒子 C 里的圆形光阑（透光孔）
I：在盒子 C 里安装两个太阳能电池的支架
J：可以安装在盒子 C 里的遮光板
K：数字万用表
L：数字万用表
M：带小鳄鱼夹的导线
N：透光容器（大比色皿）
O：带标尺的胶带
P：剪子
Q：透明胶带
R：用来注水到透明容器的水
S：擦拭水的纸巾,可用于吸去多倒的水
T：用来盛从透光容器 N 中倒出水的塑料杯（没有在**图 2.1** 中出现）
U：塑料移液器（没有在**图 2.1** 中出现）
V：盒子 C 的盖子（没有在**图 2.1** 中出现）

数据表：基本常数表

真空中的光速	$c = 2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$
电子电荷	$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
波尔兹曼常数	$k_{\mathrm{B}} = 1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$

太阳能电池是利用太阳能电池板吸收光能，使太阳能电池板中的正负电荷分离从而把太阳光的一部分能量转换成电能的装置。这样就会产生电流。本实验就是利用所给的实验元器件测量太阳能电池的转换特性。元器件包括一个装有光源和太阳能电池、各种挡板和一个带有盖子的盒子。要把可变电阻器安装在盒子里，如**图 2.2**。因为只用到可变电阻的两个接触端，所以第三个接触端被去掉了。还提供了带有小鳄鱼夹的导线和两个背面有连接端子的太阳能电池（标着序号以及字母 A 和 B）。两个太阳能电池性能接近，但是可能会有细微的差别。两个万用表的插孔安装了不同的连接端，以分别用来作为电流表和电压表，参看**图 2.3**。实验中还会用到一个用来盛水的透光的容器以及瓶装饮用水。

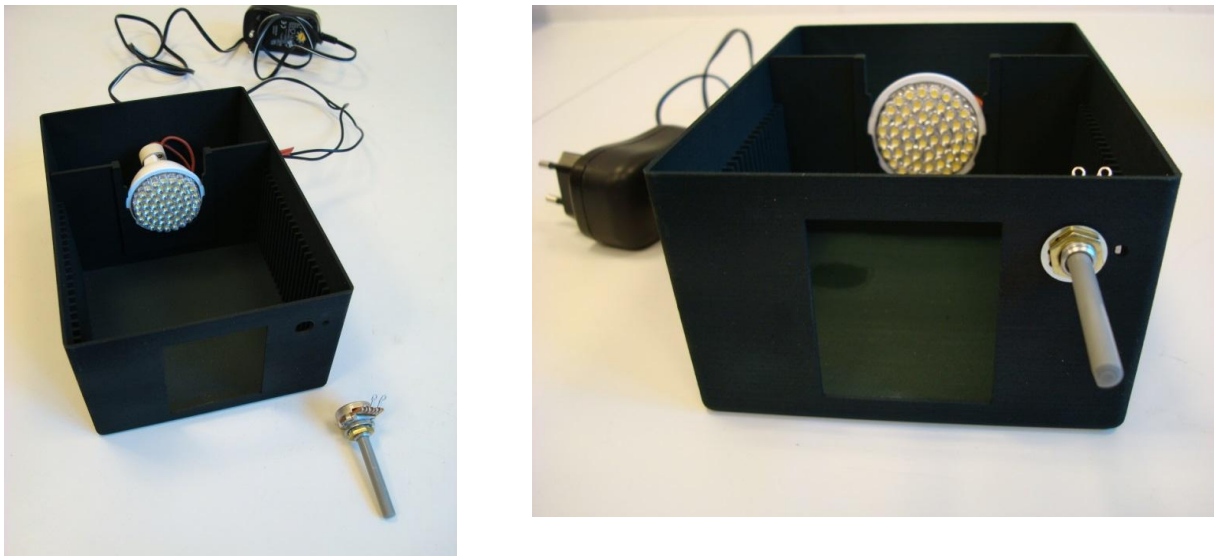


图 2.2（a）安装光源和电阻的盒子。（b）在盒子里安装上电阻，注意：电阻器的杆与盒子上的孔匹配，可以正好装上。



图 2.3 带有表笔的万用表，左边的用作电流表（安培表），右侧用作电压表（伏特表）。按万用表的左上端的“power”按钮可以开启它。当空闲一段时间后万用表可自动关闭。当选择（=）时，万用表可以测量直流电压和直流电流。当选择（～）时，可以测量交流电压和交流电流。无论什么量程，电压表的内电阻都是 10MΩ。无论什么量程情况下，安培表满读数时的电势差都是 200mV。当超过量程的时候，会显示“1”，这时你需要选择更高的量程。除

非你想定格测量数据，否则一般不要按位于右上角的“HOLD”按钮，可以通过再按一次可以解除定格。

警告：不要用万用表作为欧姆表测量太阳能电池的电阻，因为这样会损毁万用表和太阳能电池。当改变量程时，请小心的转动调节盘，否则可能造成不稳定或者损坏。当进行测量时，要保证显示的读数含有小数点，假如调节盘没有调节好的话，即使有数字显示的话，万用表也将会出现测量错误。

注意：不要改变电源的电压，在整个实验中必须保证其电压保持为 12V。（光源的电源应该插在桌子上的 230V 交流电的插座上）。

注意：只有明确指出时，才需要考虑不确定度。

注意：所有的测量和计算值必须用国际单位制。

注意：在整个测量电流和电压的实验中，LED 光源应该处于开启状态。

2.1 太阳能电池的电流随着其与光源的距离的变化

本小题中, 我们将测量和电流表一起接入电路中的太阳能电池的电流I，确定该电流如何随着太阳能电池与光源之间距离 r而改变的。光来自于很多小的光二极管，所以 r 可以如图 2.4 来测量。

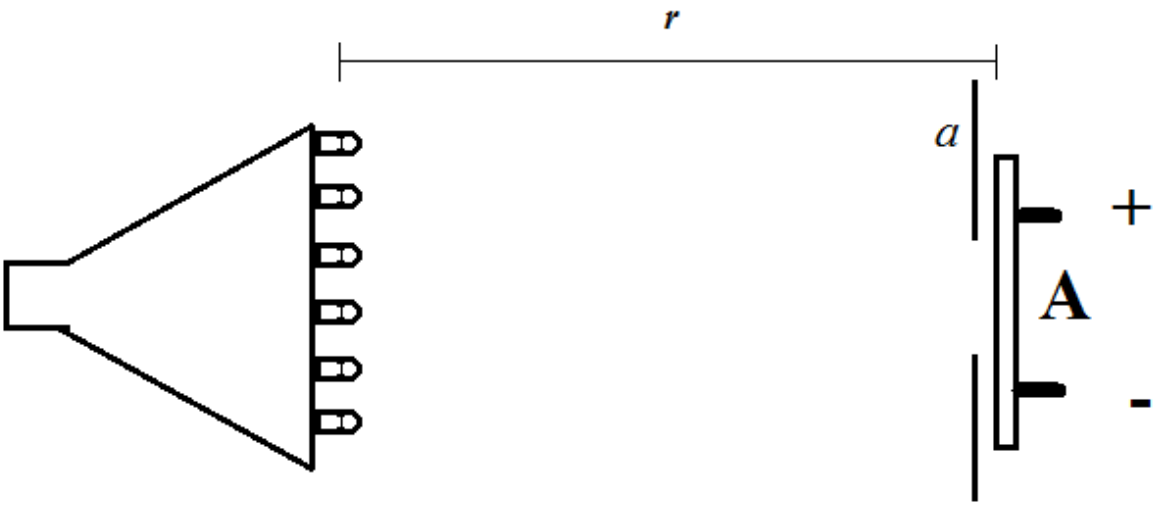


图 2.4　小题 2.1 中实验装置的俯视图，注意光阑 a 紧靠着太阳能电池 A 放置。距离 r 是从发光二极管内部到太阳能电池表面之间的距离

在这个实验中，不要改变安培表的测量范围：安培表的内阻会因为测量范围的改变而改变，会影响到从太阳能电池流出的电流的大小。

在答题纸上标明光源序号和太阳能电池序号的表格。把光源装在 U 型支架上（光源会和支架较为紧密的契合，安装时耐心点）。把太阳能电池 A 装在可装单个太阳能电池的支架（单支架）上，并将圆形光阑紧挨着放置在太阳能电池的前面。当太阳能电池到光源的距离r不太小时,电流I 与r的函数关系，可以近似表示如下：

$$I(r) = \frac{I_a}{1 + \frac{r^2}{a^2}}$$

式中I_a和a是常数。

2.1a	改变r，测量一系列的 I 和 r 的数，并将数据填入表格	1.0
2.1b	通过合适的作图方法，计算 I_a 和 a 的值	1.0

2.2 太阳能电池的参数的测量

去掉圆形光阑，把可变电阻器如**图 2.2** 那样安装，把太阳能电池放在插槽 0 处，该处离可变电阻最远。把太阳能电池 A 装在单支架上，***在不使用圆形光阑的***情况下，安装在插槽 10 的位置。搭建一个如**图 2.5** 的电路，你就可以测量太阳能电池的参数。例如在包含太阳能电池、电阻和安培计的电路中，测量太阳能电池两端电压 U 作为电流 I 的函数的变化。

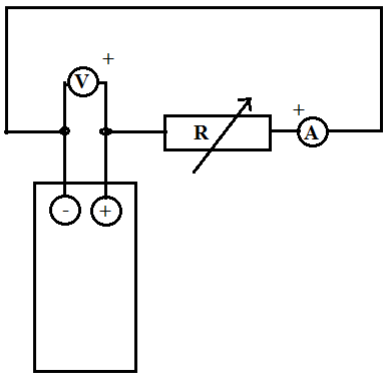


图 2.5 小题 2.2 中测量太阳能电池参数的电路示意图

2.2a	测量电压 U 和相应的电流 I，填入表格中	0.6
2.2b	根据上述数据，画出太阳能电池板两端电压随输出电流变化的图	0.8

2.3 太阳能电池的理论特性

对于本实验用的太阳能电池，电流与电压的函数关系可由下面公式表示：

$$I = I_{\max} - I_0\left(\exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right) - 1\right)$$

式中，在给定的光照情况下，$I_{\max}$，I_0和 η是常数。取温度 T=300K。e和k_B分别是电子电荷常量和波尔兹曼常数。

2.3a	通过题目 2.2b 的图来推导 $I_{\max}$并给出其数值	0.4

假设参数η可以取 1 到 4 区间的值。对于某些电势U，上面的公式可以近似为：

$$I \approx I_{\max} - I_0 \exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right)$$

2.3b	在上面提到的近似下，估算U的范围，通过作图法计算太阳能电池的I_0和 η	1.2

2.4 太阳能电池的最大功率

2.4a	太阳能电池输出给外电路的最大功率表示为$P_{\max}$，通过适当的测量几种情况下的电压和电流，并通过作图法确定最大输出功率。你可以利用小题 2.2 中的一些测量数据。	0.5
2.4b	估算最优化的负载电阻R_{opt}，即当太阳能电池输送最大功率给R_{opt}时的总的外电阻。给出的负载电阻R_{opt}必须写上不确定度。通过适当的计算阐述你的方法。	0.5

2.5 太阳能电池的比较

把太阳能电池 A 和 B 安装在可装两个电池的支架(双支架)上放进插槽 15，参见图 2.6。

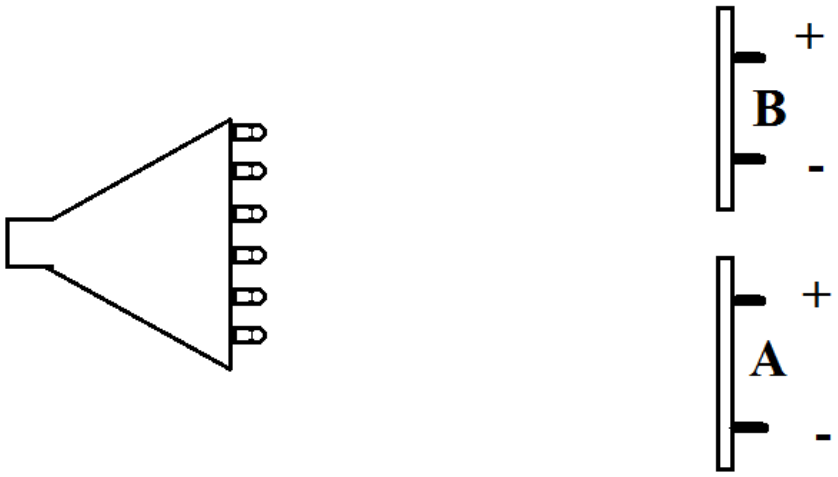


图 2.6 小题 2.5 中光源和太阳能电池配置的俯视图

2.5a	在某些照明情况下，测量： —在太阳能电池 A 上能测到的最大的电势差U_A —通过太阳能电池 A 能得到的最大电流I_A 对太阳能电池 B,重复上述测量	0.5
2.5b	并画出 2.5a 的四次测量的电路示意图，需要有太阳电池和连接电线及测量仪表	0.3

2.6 太阳能电池的连接

可以通过两种不同方式使两个太阳能电池串联，如**图 2.7** 所示。也可以有两种不同方式使它们并联连接（图中没有显示）。

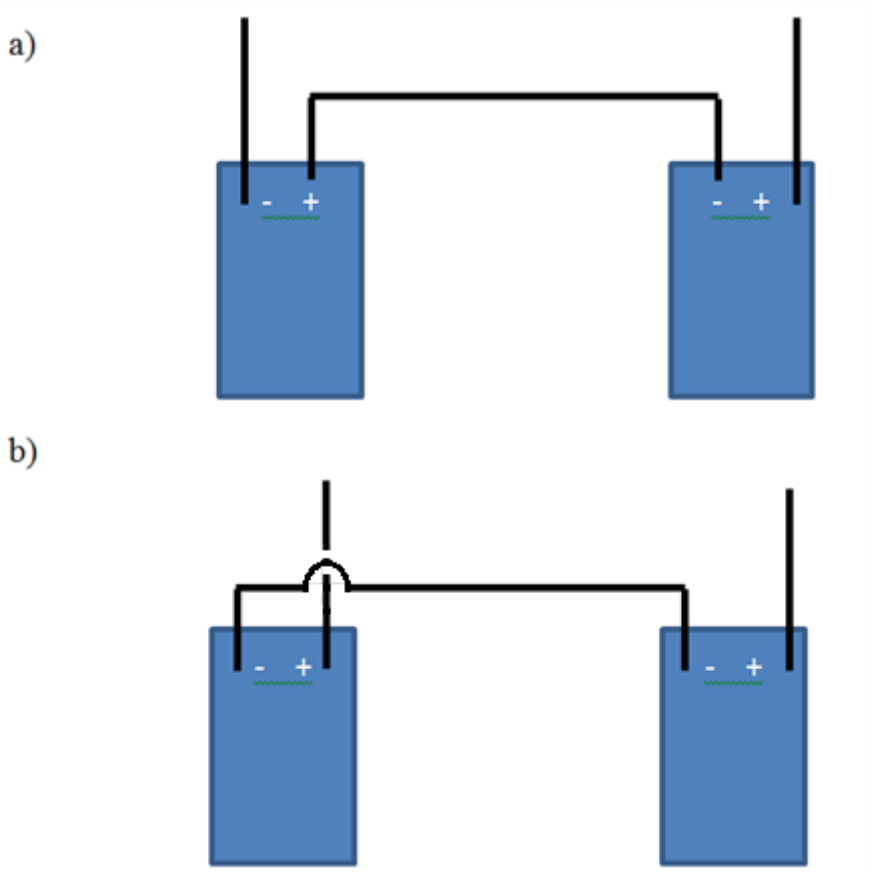


图 2.7 小题 2.6 中所说的太阳能电池串联的两种方法。使它们并联连接的两种方法没有画出

2.6	当一块太阳能电池被遮蔽板（在图 2.1 中的元件 J）遮挡住时，上述的两个太阳能电池的四种连接方法中的哪一种，可以在外电路中产生最大的功率。提示：你可以测量上述每种方法中的最大电压和最大电流，来计算最高功率 画出相应的测量电路图	1.0

2.7 透光容器（大比色皿）对太阳能电池电流的影响

将光源安装在箱子里，把太阳能电池 A 装在单支架上并将圆孔光阑紧放在其前面，太阳能电池和光源之间的距离约为 50 mm。紧靠光阑前面放置空的透光容器(大比色皿），如**图 2.8** 所示。

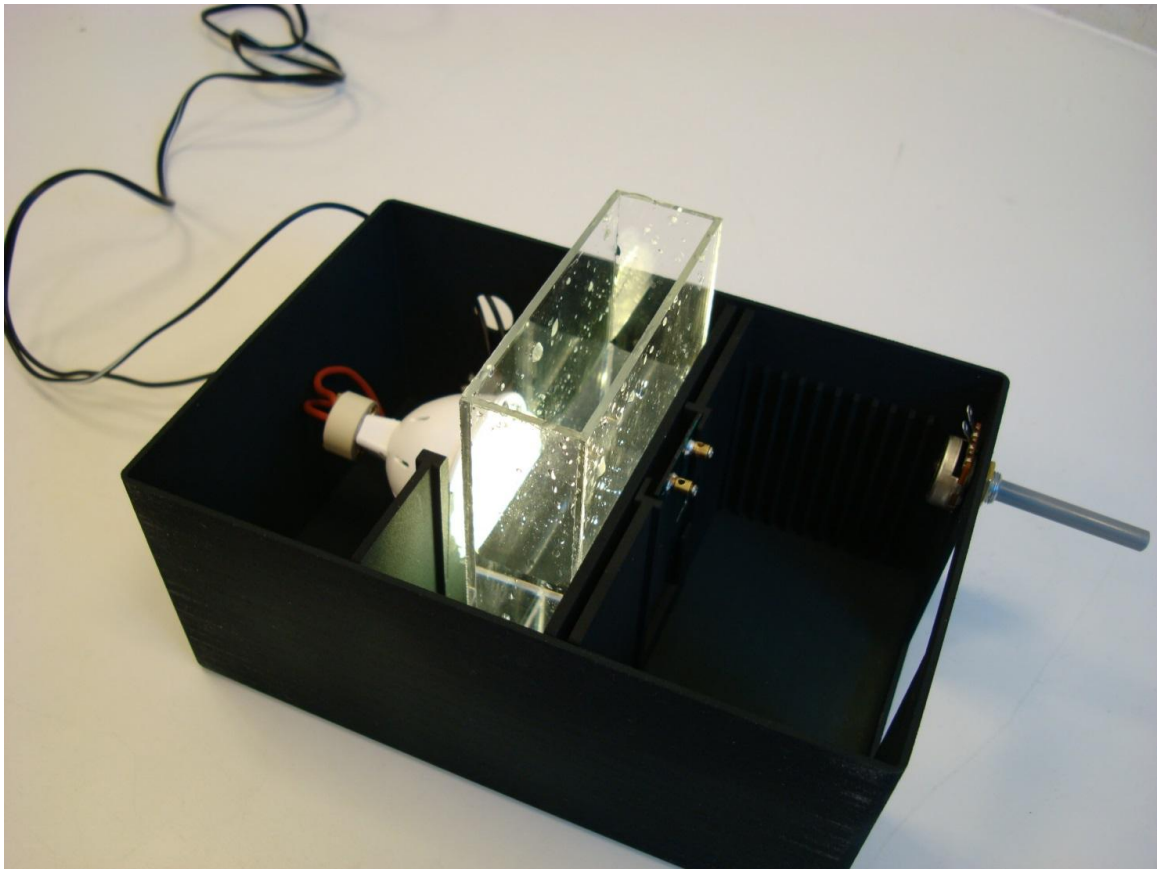


图 2.8 小题 2.7 的实验装置

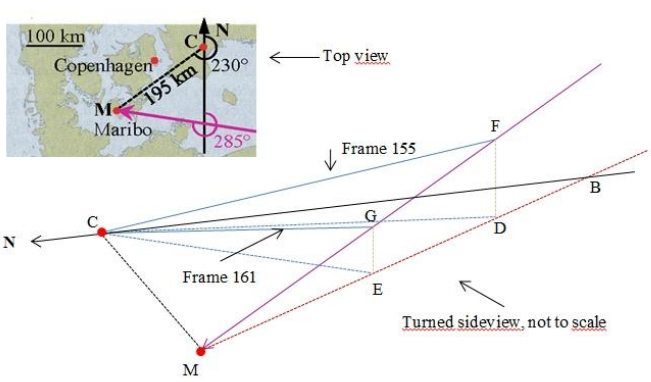
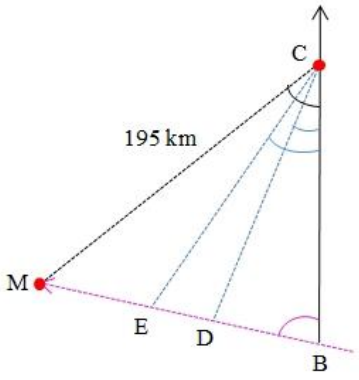
2.7a	见图 2.8，在透光容器中假如不同高度的水,测量电流 I，这里 I 是容器中水的高度 h 的函数。将测量结果填入表格并根据数据作图	1.0
2.7b	画出示意图,仅用示意图和符号解释为何出现上图中的曲线	1.0

将光源安装在箱子里，把太阳能电池 A 放在单支架上并使太阳能电池和光源之间的距离最大。紧靠太阳能电池的前面放置圆孔光阑。

2.7c	用这套装置进行下面内容： —测量太阳能电池和光源之间的距离r_1 和电流I_1 —将空的透光容器紧挨着放在圆孔光阑前面，测量电流I_2 —将容器充满水，水基本上到顶部，测量电流I_3	0.6
2.7d	利用你在 2.7c 中的测量结果，得到水的折射率n_w的值。用适当的示意图和公式说明你的方法。你也可以再做些更多的测量	1.6

The Maribo Meteorite T1

Solutions

1.1	  Top view: Triangle MCB: $\lvert CM\rvert = 195$ km, $\angle MCB = 230° - 180° = 50°$, and $\angle MBC = 75°$, so $\angle CMB = 180° - 75° - 50° = 55°$. Then $\lvert CB\rvert = \frac{\lvert CM\rvert \sin(\angle CMB)}{\sin(\angle MBC)} = 165.4$ km. Triangle DCB: $\lvert CB\rvert = 165.4$ km, $\angle DCB = 215° - 180° = 35°$,and $\angle DBC = 75°$, so $\angle CDB = 180° - 75° - 35° = 70°$. Then $\lvert CD\rvert = \frac{\lvert CB\rvert \sin(\angle DBC)}{\sin(\angle CDB)} = 170.0$ km. Triangle ECB: $\lvert CB\rvert = 165.4$ km, $\angle ECB = 221° - 180° = 41°$, and $\angle EBC = 75°$, so $\angle CEB = 180° - 75° - 41° = 64°$. Then $\lvert CE\rvert = \frac{\lvert CB\rvert \sin(\angle EBC)}{\sin(\angle CEB)} = 177.7$ km. Triangle ECD:$\angle ECD = 41° - 35° = 6°$. Horisontal distance travelled by Maribo:$\lvert DE\rvert = \frac{\lvert DC\rvert \sin(\angle ECD)}{\sin(\angle CED)} = 19.77$ km Side view: Triangle CFD: $\lvert FD\rvert = \lvert CD\rvert \tan(\angle FCD) = 59.20$ km Triangle CGE: $\lvert GE\rvert = \lvert CE\rvert \tan(\angle GCE) = 46.62$ km Thus vertical distance travelled by Maribo: $\lvert FD\rvert - \lvert GE\rvert = 12.57$ km. Total distance travelled by Maribo from frame 155 to 161: $\lvert FG\rvert = \sqrt{\lvert DE\rvert^2 + (\lvert FD\rvert - \lvert GE\rvert)^2} = 23.43$ km. The speed of Maribo is $v = \frac{23.43\text{ km}}{2.28\text{ s} - 1.46\text{ s}} = 28.6$ km/s	1.2

1.2a	Newton's second law: $m_M \frac{dv}{dt} = -k\rho_{atm}\pi R_M^2 v^2$ yields $\frac{1}{v^2}dv = -\frac{k\rho_{atm}\pi R_M^2}{m_M}dt$. By integration $t = \frac{m_M}{k\rho_{atm}\pi R_M^2}\left(\frac{1}{0.9} - 1\right)\frac{1}{v_M} = 0.88$ s.	0.7
1.2b	$\frac{E_{kin}}{E_{melt}} = \frac{\frac{1}{2}v_M^2}{c_{sm}(T_{sm} - T_0) + L_{sm}} = \frac{4.2\times10^8}{2.1\times10^6} = 2.1 \times 10^2 \gg 1.$	0.3

1.3a	$[x] = [t]^{\alpha}[\rho_{\mathrm{sm}}]^{\beta}[c_{\mathrm{sm}}]^{\gamma}\,[k_{\mathrm{sm}}]^{\delta} = [\mathrm{s}]^{\alpha}[\mathrm{kg\,m^{-3}}]^{\beta}[\mathrm{m^2\,s^{-2}K^{-1}}]^{\gamma}\,[\mathrm{kg\,m\,s^{-3}K^{-1}}]^{\delta}$, so $[\mathrm{m}] = [\mathrm{kg}]^{\beta+\delta}[\mathrm{m}]^{-3\beta+2\gamma+\delta}[\mathrm{s}]^{\alpha-2\gamma-3\delta}[\mathrm{K}]^{-\gamma-\delta}$. Thus $\beta+\delta=0$, $-3\beta+2\gamma+\delta=1$, $\alpha-2\gamma-3\delta=0$, and $-\gamma-\delta=0$. From which $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \left(+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)$ and $x(t) \approx \sqrt{\frac{k_{\mathrm{sm}}t}{\rho_{\mathrm{sm}}c_{\mathrm{sm}}}}$.	0.6
1.3b	$x(5\ \mathrm{s}) = 1.6$ mm $\qquad x/R_{\mathrm{M}} = 1.6\ \mathrm{mm}/130\ \mathrm{mm} = 0.012$.	0.4

1.4a	Rb-Sr decay scheme: ${}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$	0.3
1.4b	$N_{87\mathrm{Rb}}(t) = N_{87\mathrm{Rb}}(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ and Rb→Sr: $N_{87\mathrm{Sr}}(t) = N_{87\mathrm{Sr}}(0) + [N_{87\mathrm{Rb}}(0) - N_{87\mathrm{Rb}}(t)]$. Thus $N_{87\mathrm{Sr}}(t) = N_{87\mathrm{Sr}}(0) + (\mathrm{e}^{\lambda t}-1)N_{87\mathrm{Rb}}(t)$, and dividing by $N_{86\mathrm{Sr}}$ we obtain the equation of a straight line: $\frac{N_{87\mathrm{Sr}}(t)}{N_{86\mathrm{Sr}}} = \frac{N_{87\mathrm{Sr}}(0)}{N_{86\mathrm{Sr}}} + (\mathrm{e}^{\lambda t}-1)\frac{N_{87\mathrm{Rb}}(t)}{N_{86\mathrm{Sr}}}$.	0.7
1.4c	Slope: $\mathrm{e}^{\lambda t}-1 = a = \frac{0.712-0.700}{0.25} = 0.050$ and $T_{½} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 4.9\times10^{10}$ year. So $\tau_M = \ln(1+a)\frac{1}{\lambda} = \frac{\ln(1+a)}{\ln(2)}T_{½} = 3.4\times10^{9}$ year .	0.4

1.5	Kepler's 3rd law on comet Encke and Earth, with the orbital semi-major axis of Encke given by $a = \frac{1}{2}(a_{\mathrm{min}} + a_{\mathrm{max}})$. Thus $t_{\mathrm{Encke}} = \left(\frac{a}{a_{\mathrm{E}}}\right)^{\frac{3}{2}} t_{\mathrm{E}} = 3.30$ year $= 1.04\times10^{8}$ s.	0.6

1.6a	For Earth around its rotation axis: Angular velocity $\omega_{\mathrm{E}} = \frac{2\pi}{24\ \mathrm{h}} = 7.27\times10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}}$. Moment of inertia $I_{\mathrm{E}} = 0.83\frac{2}{5}m_{\mathrm{E}}R_{\mathrm{E}}^2 = 8.07\times10^{37}\ \mathrm{kg\,m^2}$. Angular momentum $L_{\mathrm{E}} = I_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{E}} = 5.87\times10^{33}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$. Astroid $m_{\mathrm{ast}} = \frac{4\pi}{3}R_{\mathrm{ast}}^3\rho_{\mathrm{ast}} = 1.57\times10^{15}$ kg and angular momentum $L_{\mathrm{ast}} = m_{\mathrm{ast}}v_{\mathrm{ast}}R_{\mathrm{E}} = 2.51\times10^{26}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$. L_{ast} is perpendicular to L_{E}, so by conservation angular momentum: $\tan(\Delta\theta) = L_{\mathrm{ast}}/L_{\mathrm{E}} = 4.27\times10^{-8}$. The axis tilt $\Delta\theta = 4.27\times10^{-8}$ rad (so the north pole move $R_{\mathrm{E}}\,\Delta\theta = 0.27$ m).	0.7
1.6b	At vertical impact $\Delta L_{\mathrm{E}} = 0$ so $\Delta(I_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{E}}) = 0$. Thus $\Delta\omega_{\mathrm{E}} = -\omega_{\mathrm{E}}(\Delta I_{\mathrm{E}})/I_{\mathrm{E}}$, and since $\Delta I_{\mathrm{E}}/I_{\mathrm{E}} = m_{\mathrm{ast}}R_{\mathrm{E}}^2/I_{\mathrm{E}} = 7.9\times10^{-10}$ we obtain $\Delta\omega_{\mathrm{E}} = -5.76\times10^{-14}\ \mathrm{s^{-1}}$. The change in rotation period is $\Delta T_{\mathrm{E}} = 2\pi\left(\frac{1}{\omega_{\mathrm{E}}+\Delta\omega_{\mathrm{E}}} - \frac{1}{\omega_{\mathrm{E}}}\right) \approx -2\pi\frac{\Delta\omega_{\mathrm{E}}}{\omega_{\mathrm{E}}^2} = 6.84\times10^{-5}$ s.	0.7
1.6c	At tangential impact L_{ast} is parallel to L_{E} so $L_{\mathrm{E}} + L_{\mathrm{ast}} = (I_{\mathrm{E}} + \Delta I_{\mathrm{E}})(\omega_{\mathrm{E}} + \Delta\omega_{\mathrm{E}})$ and thus $\Delta T_{\mathrm{E}} = 2\pi\left(\frac{1}{\omega_{\mathrm{E}}+\Delta\omega_{\mathrm{E}}} - \frac{1}{\omega_{\mathrm{E}}}\right) = 2\pi\left(\frac{I_{\mathrm{E}}+\Delta I_{\mathrm{E}}}{L_{\mathrm{E}}+L_{\mathrm{ast}}} - \frac{1}{\omega_{\mathrm{E}}}\right) = -3.62\times10^{-3}$ s.	0.7

1.7a	Minimum impact speed is the escape velocity from Earth: $v_{\text{imp}}^{\min} = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = 11.2\ \text{km/s}$	0.5
1.7b	Maximum impact speed $v_{\text{imp}}^{\max}$ arises from three contributions: (I) The velocity v_{b} of the body at distance a_{E} (Earth orbit radius) from the Sun, $v_{\text{b}} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{a_E}} = 42.1\ \text{km/s}$. (II) The orbital velocity of the Earth, $v_{\text{E}} = \frac{2\pi a_E}{1\ \text{year}} = 29.8\ \text{km/s}$. (III) Gravitational attraction from the Earth and kinetic energy seen from the Earth: $\frac{1}{2}(v_{\text{b}} + v_{\text{E}})^2 = -\frac{Gm_E}{R_E} + \frac{1}{2}\left(v_{\text{imp}}^{\max}\right)^2$. In conclusion: $v_{\text{imp}}^{\max} = \sqrt{(v_{\text{b}} + v_{\text{E}})^2 + \frac{2Gm_E}{R_E}} = 72.8\ \text{km/s}$.	1.2

	Total	**9.0**

Solutions

A single spherical silver nanoparticle

2.1	Volume of the nanoparticle: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.19 \times 10^{-24}$ m^3. Mass of nanoparticles: $M = V\,\rho_{\mathrm{Ag}} = 4.39 \times 10^{-20}$ kg Number of ions: $N = N_A \frac{M}{M_{\mathrm{Ag}}} = 2.45 \times 10^5$. Charge density $\rho = \frac{eN}{V} = 9.38 \times 10^9$ C m^{-3} Electron concentration $n = \frac{N}{V} = 5.85 \times 10^{28}$ m^{-3}, so charge density $\rho = en$ Total charge of free electrons $Q = eN = 3.93 \times 10^{-14}$ C, Total mass of free electrons $m_0 = m_e N = 2.23 \times 10^{-25}$ kg.	0.7

The electric field in a charge-neutral region inside a charged sphere

2.2	For a sphere with radius R and constant charge density ρ, for any point inside the sphere designated by radius-vector $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ($r < R$) Gauss's law yields directly $4\pi r^2 \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_+ = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\, \boldsymbol{e}_r$, where $\boldsymbol{e}_r$ is the unit radial vector pointing away from the center of the sphere. Thus, $\boldsymbol{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$. Likewise, inside another sphere of radius R_1 and charge density $-\rho$ the field is $\boldsymbol{E}_- = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}'$, where $\boldsymbol{r}'$ is the radius-vector of the point in the coordinate system with the origin in the center of this sphere. Merging the two charge configurations gives the setup we want with $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_d$. So inside the charge-free region $\lvert\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}\rvert < R_1$ the field is $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_d)$ or $\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_d$ with the pre-factor $A = \frac{1}{3}$	1.2

The restoring force on the displaced electron cloud

2.3	With $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = x_{\mathrm{p}}\,\boldsymbol{e}_x$ and $x_{\mathrm{p}} \ll R$ we have from above that approximately the filed induced inside the particle is $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$. The number of electrons that produced $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}$ is negligibly smaller than the number of electrons inside the particle, so $\boldsymbol{F} \cong Q\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}} = (-eN)\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = -\frac{4\pi}{9\varepsilon_0}R^3 e^2 n^2\, x_p \boldsymbol{e}_x$ (like for a harmonic oscillator). The work done on the electrons to shift the electron cloud is $W_{\mathrm{el}} = -\int_0^{x_{\mathrm{p}}} F(x')\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{9\varepsilon_0}R^3 e^2 n^2\right)x_{\mathrm{p}}^2$	1.0

The spherical silver nanoparticle in an external constant electric field

2.4	Inside the metallic particle in the steady state the electric field must be equal to 0. The induced field (from 2.2 or 2.3) compensates the external field: $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}} = 0$, so $x_{\mathrm{p}} = \frac{3\varepsilon_0}{\rho}E_0 = \frac{3\varepsilon_0}{en}E_0$. Charge displaced through the yz-plane is the total charge of electrons in the cylinder of	0.6

	radius R and height x_p: $-\Delta Q = -\rho\,\pi R^2 x_\mathrm{p} = -\pi R^2\, ne\, x_\mathrm{p}$.	

The equivalent capacitance and inductance of the silver nanoparticle

2.5a	The electric energy W_el of a capacitor with capacitance C holding charges $\pm\Delta Q$ is $W_\mathrm{el} = \frac{\Delta Q^2}{2C}$. The energy of such capacitor is equal to the work (see 2.3) done to separate the charges (see 2.4), thus $C = \frac{\Delta Q^2}{2W_{el}} = \frac{9}{4}\varepsilon_0 \pi R = 6.26 \times 10^{-19}$ F.	0.7
2.5b	Equivalent scheme for a capacitor reads: $\Delta Q = CV_0$. Combining charge from (2.4) and capacitance from (2.5a) gives $V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{4}{3} R\, E_0$.	0.4

2.6a	The kinetic energy of the electron cloud is defined as the kinetic energy of one electron multiplied by the number of electrons in the cloud $W_\mathrm{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 N = \frac{1}{2} m_e v^2 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\, n\right)$. The current I is the charge of electrons in the cylinder of area πR^2 and height $v\Delta t$ divided by time Δt, thus $I = -e\, nv\, \pi R^2$.	0.7
2.6b	The energy carried by current I in the equivalent circuit with inductance L is $W = \frac{1}{2} L\, I^2$ is, in fact, the kinetic energy of electrons W_kin. Taking the energy and current from (2.6a) results $L = \frac{4\, m_e}{3\pi R n e^2} = 2.57 \times 10^{-14}$ H.	0.5

The plasmon resonance of the silver nanoparticle

2.7a	From the LC-circuit analogy we can directly derive $\omega_p = (LC)^{-1/2} = \sqrt{ne^2/3\varepsilon_0 m_e}$. Alternatively it is possible to use the harmonic law of motion in (2.3) and get the same result for the frequency	0.5
2.7b	$\omega_\mathrm{p} = 7.88 \times 10^{15}$ rad/s, for light with angular frequency $\omega = \omega_\mathrm{p}$ wavelength is $\lambda_\mathrm{p} = 2\pi c/\omega_\mathrm{p} = 239$ nm.	0.4

The silver nanoparticle illuminated with light at the plasmon frequency

2.8a	The velocity of an electron $v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin\omega t = v_0 \sin\omega t$. For harmonic motion it is enough to average over period of oscillations. The time-averaged kinetic energy on the electron $\langle W_k\rangle = \langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle = \frac{m_e}{2}\langle v^2\rangle$. During time t_0 each electron hits the ions t_0/τ times. So The energy lost in the whole nanoparticle during one period of oscillations is $W_{heat} = N\langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle = \frac{4}{3}\pi R^3 n \langle\frac{m_e v^2}{2}\rangle$. Time-averaged Joule heating power $P_\mathrm{heat} = \frac{1}{\tau} W_\mathrm{kin} = \frac{1}{2\tau} m_e \langle v^2\rangle \left(\frac{4}{3}\pi R^3\, n\right)$. The expression for current is taken from (2.6a), squared and averaged	1.0

	$\langle I^2\rangle = (en\,\pi R^2)^2\,\langle v^2\rangle = \left(\frac{3Q}{4R}\right)^2\langle v^2\rangle$.	
2.8b	The oscillating current $I = I_0 \sin\omega t = \pi R^2 n e v_0 \sin\omega t$ produces the heat in the resistance R_{heat} equal to $P_{\text{heat}} = R_{heat}\langle I^2\rangle$, what together with results from (2.8a) leads to $R_{\text{heat}} = \frac{W_{\text{kin}}}{\tau I^2} = \frac{2m_e}{3\pi n e^2 R\tau} = 2.46\ \Omega$.	1.0

2.9	$R_{\text{scat}} = \frac{P_{\text{scat}}}{\langle I^2\rangle}$ and $\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}\omega_{\text{p}}^2 x_0^2$ yields $R_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_{\text{p}}^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{16R^2}{9Q^2\langle v^2\rangle} = \frac{8\omega_0^2 R^2}{27\pi\varepsilon_0 c^3} = 2.45\ \Omega$.	1.0

2.10a	Ohm's law for a *LCR* serious circuit is $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(R_{heat}+R_{scat})^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. At the resonance frequency time-averaged voltage squared is $\langle V^2\rangle = Z_R^2\langle I^2\rangle = (R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2\langle I^2\rangle$. And from (2.5b) $\langle V^2\rangle = \frac{1}{2}V_0^2 = \frac{8}{9}R^2E_0^2$, so Ohm's law results in $\langle I^2\rangle = \frac{8R^2E_0^2}{9(R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2}$. Now time-averaged power loses are $P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}}\langle I^2\rangle = \frac{8R_{\text{heat}}R^2}{9(R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2}E_0^2$ and $P_{\text{scat}} = \frac{8R_{\text{scat}}R^2}{9(R_{\text{heat}}+R_{\text{scat}})^2}E_0^2 = \frac{R_{\text{scat}}}{R_{\text{heat}}}\langle P_{\text{heat}}\rangle$.	1.2
2.10b	Starting with the electric field amplitude $E_0 = \sqrt{2S/(\varepsilon_0 c)} = 27.4\ \text{kV/m}$, we calculate $P_{\text{heat}} = 6.82\ \text{nW}$ and $P_{\text{scat}} = 6.81\ \text{nW}$.	0.3

Steam generation by light

2.11a	Total number of nanoparticles in the vessel: $N_{\text{np}} = h^2 a\, n_{\text{np}} = 7.3\times10^{11}$. Then the total time-averaged Joule heating power: $P_{\text{st}} = N_{\text{np}}P_{\text{heat}} = 4.98\ \text{kW}$. This power goes into the steam generation: $P_{\text{st}} = \mu_{\text{st}}L_{\text{tot}}$, with $L_{\text{tot}} = c_{\text{wa}}(T_{100}-T_{\text{wa}}) + L_{\text{wa}} + c_{\text{st}}(T_{\text{st}}-T_{100}) = 2.62\times10^6\ \text{J kg}^{-1}$. Thus the mass of steam produced in second μ_{st}: $\mu_{\text{st}} = \frac{P_{\text{st}}}{L_{\text{tot}}} = 1.90\times10^{-3}\ \text{kg s}^{-1}$.	0.6
2.11b	The power of light incident on the vessel $P_{\text{tot}} = h^2 S = 0.01\text{m}^2 \times 1\ \text{MW m}^{-2} = 10.0\ \text{kW}$, and the power directed for steam production by nanoparticles is given in 2.11a. Thus $\eta = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{4.98\ \text{kW}}{10.0\ \text{kW}} = 0.498$.	0.2

	Total	**12.0**

Solutions

3.1	The pressure is given by the hydrostatic pressure $p(x,z) = \rho_{\text{ice}} g(H(x) - z)$, which is zero at the surface.	0.3

3.2a	The outward force on a vertical slice at a distance x from the middle and of a given width Δy is obtained by integrating up the pressure times the area: $$F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}}\, g\, (H(x) - z)\, \mathrm{d}z \;= \frac{1}{2}\, \Delta y\, \rho_{\text{ice}}\, g\, H(x)^2$$ which implies that $\Delta F = F(x) - F(x + \Delta x) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\Delta x = -\Delta y\, \rho_{\text{ice}}\, g\, H(x) \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\Delta x$. This finally shows that $$S_{\text{b}} = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\,\rho_{\text{ice}}\, g\, H(x) \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$$ Notice the sign, which must be like this, since S_b was defined as positive and $H(x)$ is a decreasing function of x.	0.9
3.2b	To find the height profile, we solve the differential equation for $H(x)$: $$-\frac{S_{\text{b}}}{\rho_{\text{ice}}\, g} = H(x) \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x)^2$$ with the boundary condition that $H(L) = 0$. This gives the solution: $$H(x) = \sqrt{\frac{2 S_b L}{\rho_{\text{ice}}\, g}} \sqrt{1 - x/L}$$ Which gives the maximum height $H_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2 S_b L}{\rho_{\text{ice}}\, g}}$. Alternatively, dimensional analysis could be used in the following manner. First notice that $\mathcal{L} = [H_{\text{m}}] = \left[\rho_{\text{ice}}^{\alpha}\, g^{\beta} \tau_{\text{b}}^{\gamma} L^{\delta}\right]$. Using that $\left[\rho_{\rho_{\text{ice}}}\right] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}$, $[g] = \mathcal{L}\,\mathcal{T}^{-2}$, $[\tau_b] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\,\mathcal{T}^{-2}$, demands that $\mathcal{L} = [H_{\text{m}}] = \left[{\rho_i}^{\alpha} g^{\beta} {\tau_b}^{\gamma} L^{\delta}\right] = \mathcal{M}^{\alpha+\gamma} \mathcal{L}^{-3\alpha+\beta-\gamma+\delta}\, \mathcal{T}^{-2\beta-2\gamma}$, which again implies $\alpha + \gamma = 0$, $-3\alpha + \beta - \gamma + \delta = 1$, $2\beta + 2\gamma = 0$. These three equations are solved to give $\alpha = \beta = -\gamma = \delta - 1$, which shows that $$H_{\text{m}} \propto \left(\frac{S_{\text{b}}}{\rho_{\rho_{\text{ice}}} g}\right)^{\gamma} L^{1-\gamma}$$ Since we were informed that $H_{\text{m}} \propto \sqrt{L}$, it follows that $\gamma = 1/2$. With the boundary condition $H(L) = 0$, the solution then take the form $$H(x) \propto \left(\frac{S_{\text{b}}}{\rho_{\text{ice}}\, g}\right)^{1/2} \sqrt{L - x}$$ The proportionality constant of $\sqrt{2}$ cannot be determined in this approach.	0.8

3.2c	For the rectangular Greenland model, the area is equal to $A = 10L^2$ and the volume is found by integrating up the height profile found in problem 3.2b: $V_{\mathrm{G,ice}} = (5L)2\int_0^L H(x)\,\mathrm{d}x = 10L\int_0^L \left(\frac{\tau_\mathrm{b}\,L}{\rho_\mathrm{ice}\,g}\right)^{1/2}\sqrt{1-x/L}\,\mathrm{d}x = 10H_\mathrm{m}L^2\int_0^1\sqrt{1-\tilde{x}}\,\mathrm{d}\tilde{x}$ $= 10H_\mathrm{m}L^2\left[-\frac{2}{3}(1-\tilde{x})^{3/2}\right]_0^1 = \frac{20}{3}H_\mathrm{m}L^2 \propto L^{5/2},$ where the last line follows from the fact that $H_\mathrm{m} \propto \sqrt{L}$. Note that the integral need not be carried out to find the scaling with L. This implies that $V_{\mathrm{G,ice}} \propto {A_G}^{5/4}$ and the wanted exponent is $\gamma = 5/4$.	0.5

3.3	According to the assumption of constant accumulation c the total mass accumulation rate from an area of width Δy between the ice divide at $x = 0$ and some point at $x > 0$ must equal the total mass flux through the corresponding vertical cross section at x. That is: $\rho c x \Delta y = \rho \Delta y H_\mathrm{m} v_x(x)$, from which the velocity is isolated: $$v_x(x) = \frac{cx}{H_\mathrm{m}}$$	0.6

3.4	From the given relation of incompressibility it follows that $$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{c}{H_\mathrm{m}}$$ Solving this differential equation with the initial condition $v_z(0) = 0$, shows that: $$v_z(z) = -\frac{cz}{H_\mathrm{m}}$$	0.6

3.5	Solving the two differential equations $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{cz}{H_\mathrm{m}} \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{cx}{H_\mathrm{m}}$$ with the initial conditions that $z(0) = H_\mathrm{m}$, and $x(0) = x_i$ gives $$z(t) = H_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-ct/H_\mathrm{m}} \quad \text{and} \quad x(t) = x_i\,\mathrm{e}^{ct/H_\mathrm{m}}$$ This shows that $z = H_\mathrm{m}\,x_i\,/x$, meaning that flow lines are hyperbolas in the xz-plane. Rather than solving the differential equations, one can also use them to show that $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(xz) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{cx}{H_\mathrm{m}}z - x\frac{cz}{H_\mathrm{m}} = 0$$ which again implies that $xz = \mathrm{const}$. Fixing the constant by the initial conditions, again leads to the result that $z = H_\mathrm{m}x_i/x$.	0.9

3.6	At the ice divide, $x = 0$, the flow will be completely vertical, and the t-dependence of z found in 3.5 can be inverted to find $\tau(z)$. One finds that $\tau(z) = \frac{H_\mathrm{m}}{c}\ln\left(\frac{H_\mathrm{m}}{z}\right)$.	1.0

3.7a	The present interglacial period extends to a depth of 1492 m, corresponding to 11,700 year. Using the formula for $\tau(z)$from problem 3.6, one finds the following accumulation rate for the interglacial: $$c_{\mathrm{ig}} = \frac{H_{\mathrm{m}}}{11{,}700\ \mathrm{years}} \ln\left(\frac{H_{\mathrm{m}}}{H_{\mathrm{m}} - 1492\ \mathrm{m}}\right) = 0.1749\ \mathrm{m/year}.$$ The beginning of the ice age 120,000 years ago is identified as the drop in $\delta^{18}\mathrm{O}$ in figure 3.2b at a depth of 3040 m. Using the vertical flow velocity found in problem 3.4, on has $\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{c}{H_{\mathrm{m}}}\mathrm{d}t$, which can be integrated down to a depth of 3040 m, using a stepwise constant accumulation rate: $$H_{\mathrm{m}} \ln\left(\frac{H_{\mathrm{m}}}{H_{\mathrm{m}} - 3040\ \mathrm{m}}\right) = -H_{\mathrm{m}} \int_{H_{\mathrm{m}}}^{H_{\mathrm{m}}-3040\ \mathrm{m}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z$$ $$= \int_{11{,}700\ \mathrm{year}}^{120{,}000\ \mathrm{year}} c_{\mathrm{ia}}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{11{,}700\ \mathrm{year}} c_{\mathrm{ig}}\,\mathrm{d}t$$ $$= c_{\mathrm{ia}}(120{,}000\ \mathrm{year}\text{-}11{,}700\ \mathrm{year}) + c_{\mathrm{ig}} 11{,}700\ \mathrm{year}$$ Isolating form this equation leads to $c_{\mathrm{ia}} = 0.1232$, i.e. far less precipitation than now.	0.8
3.7b	Reading off from figure 3.2b: $\delta^{18}\mathrm{O}$ changes from $-43{,}5$ ‰ to $-34{,}5$ ‰. Reading off from figure 3.2a, T then changes from -40 °C to -28 °C. This gives $\Delta T \approx 12$ °C.	0.2

3.8	From the area A_{G} one finds that $L = \sqrt{A_{\mathrm{G}}/10} = 4.14 \times 10^5$ m. Inserting numbers in the volume formula found in 3.2c, one finds that: $$V_{\mathrm{G,ice}} = \frac{20}{3} L^{5/2} \sqrt{\frac{2S_{\mathrm{b}}}{\rho_{\mathrm{ice}} g}} = 3.45 \times 10^{15}\ \mathrm{m}^3$$ This ice volume must be converted to liquid water volume, by equating the total masses, i.e. $V_{\mathrm{G,wa}} = V_{\mathrm{G,ice}} \frac{\rho_{\mathrm{ice}}}{\rho_{\mathrm{wa}}} = 3.17 \times 10^{15}\ \mathrm{m}^3$, which is finally converted to a sea level rise, as $h_{\mathrm{G,rise}} = \frac{V_{\mathrm{G,wa}}}{A_{\mathrm{o}}} = 8.79$ m.	0.6

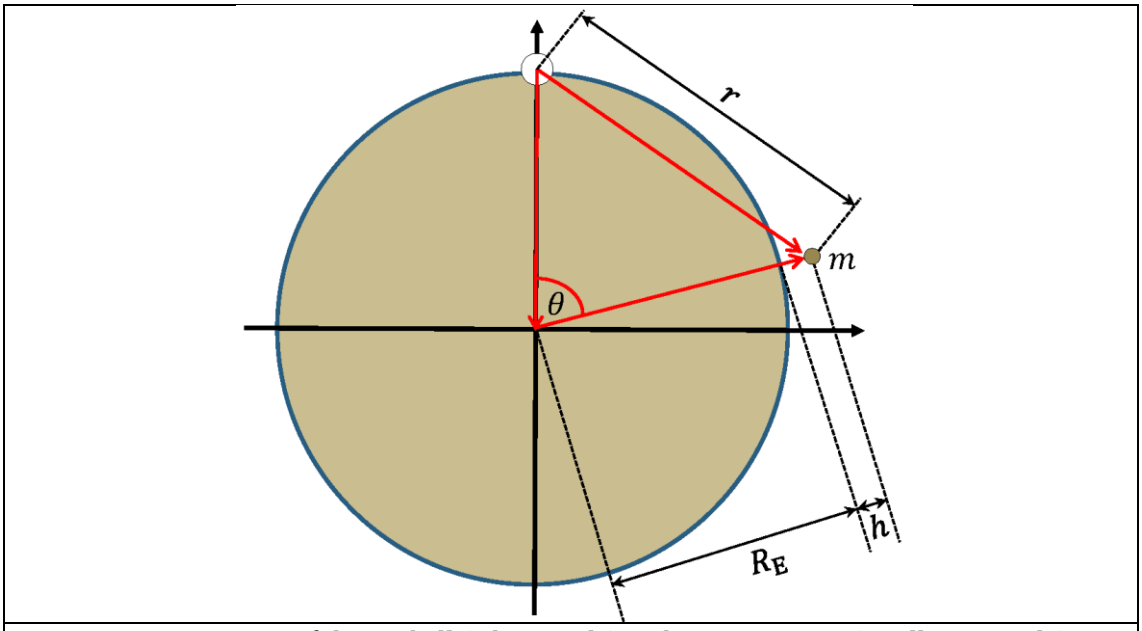


Figure 3.S1 Geometry of the ice ball (white circle) with a test mass m (small gray circle).

The total mass of the ice is

$$M_{\text{ice}} = V_{\text{G,ice}}\,\rho_{\text{ice}} = 3.17 \times 10^{18}\ \text{kg} = 5.31 \times 10^{-7} m_{\text{E}}$$

3.9 The total gravitational potential felt by a test mass m at a certain height h above the surface of the Earth, and at a polar angle θ (cf. figure 3.S1), with respect to a rotated polar axis going straight through the ice sphere is found by adding that from the Earth with that from the ice: 1.6

$$U_{\text{tot}} = -\frac{Gm_{\text{E}}m}{R_{\text{E}}+h} - \frac{GM_{\text{ice}}m}{r} = -mgR_E\left(\frac{1}{1+h/R_E} + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}\right)$$

where $g = Gm_E/R_E^2$. Since $h/R_{\text{E}} \ll 1$ one may use the approximation given in the problem, $(1+\text{x})^{-1} \approx 1 - x,\ |x| \ll 1$, to approximate this by

$$U_{\text{tot}} \approx -mgR_E\left(1 - \frac{h}{R_E} + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}\right).$$

Isolating h now shows that $h = h_0 + \frac{M_{ice}/m_E}{r/R_E}R_E$, where $h_0 = R_E + U_{\text{tot}}/(mg)$. Using again that $h/R_{\text{E}} \ll 1$, trigonometry shows that $r \approx 2R_{\text{E}}|\sin(\theta/2)|$, and one has:

$$h(\theta) - h_0 \approx \frac{M_{\text{ice}}/m_{\text{E}}}{2|\sin(\theta/2)|}R_E \approx \frac{1.69\ \text{m}}{|\sin(\theta/2)|}.$$

To find the magnitude of the effect in Copenhagen, the distance of 3500 km along the surface is used to find the angle $\theta_{\text{CPH}} = (3.5 \times 10^6\ \text{m})/R_E \approx 0.549$, corresponding to $h_{\text{CPH}} - h_0 \approx 6.25$ m. Directly opposite to Greenland corresponds to $\theta = \pi$, which gives $h_{\text{OPP}} - h_0 \approx 1.69$ m. The difference is then $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} \approx 4.56$ m, where h_0 has dropped out.

	Total	**9.0**

Solution E1 /version 3 (Important: In this document decimal comma is used instead of decimal point in graphs and tables)

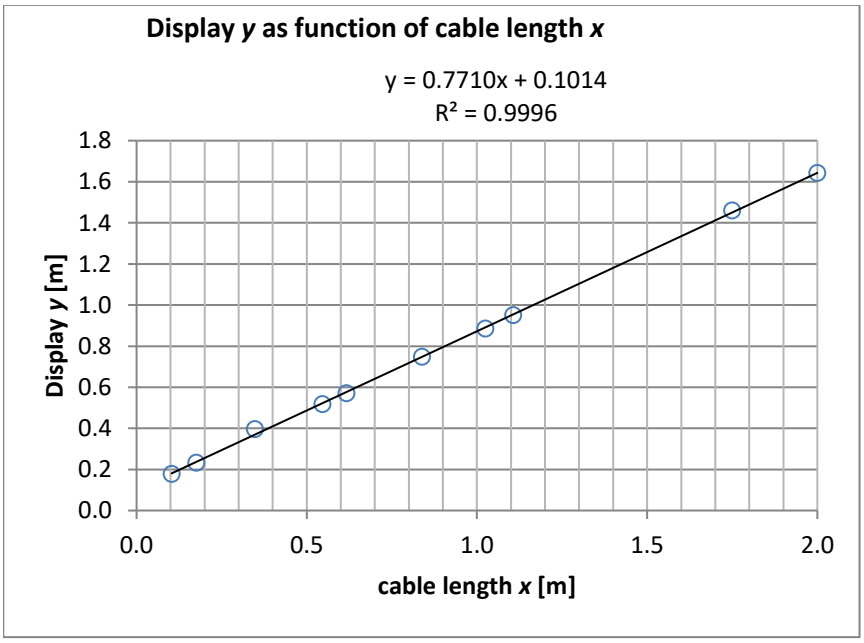
1.1

$H = 907\ \text{mm} \pm 2\ \text{mm}$. See the sketch in the figure corresponding to 1.3b. It must appear how the height is measured with the LDM in the rear mode.

1.2a

I used a 2 m cable but 1 m is sufficient. There should be about 8 lengths evenly distributed in the interval [0; 1 m].

x	*y*
m	m
0,103	0,177
0,176	0,232
0,348	0,396
0,546	0,517
0,617	0,570
0,839	0,748
1,025	0,885
1,107	0,950
1,750	1,459
2,000	1,642



1.2b

The refractive index is twice the gradient of the linear graph, $n_{\text{co}} = 2 \cdot 0.7710 = 1.542$.

The reason for that is that the travel time for a light pulse

$$t = \frac{x}{v_{\text{co}}} = \frac{x n_{\text{co}}}{c}$$

The display will therefore show $y = \frac{1}{2}ct + k \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}n_{\text{co}}x + k$.

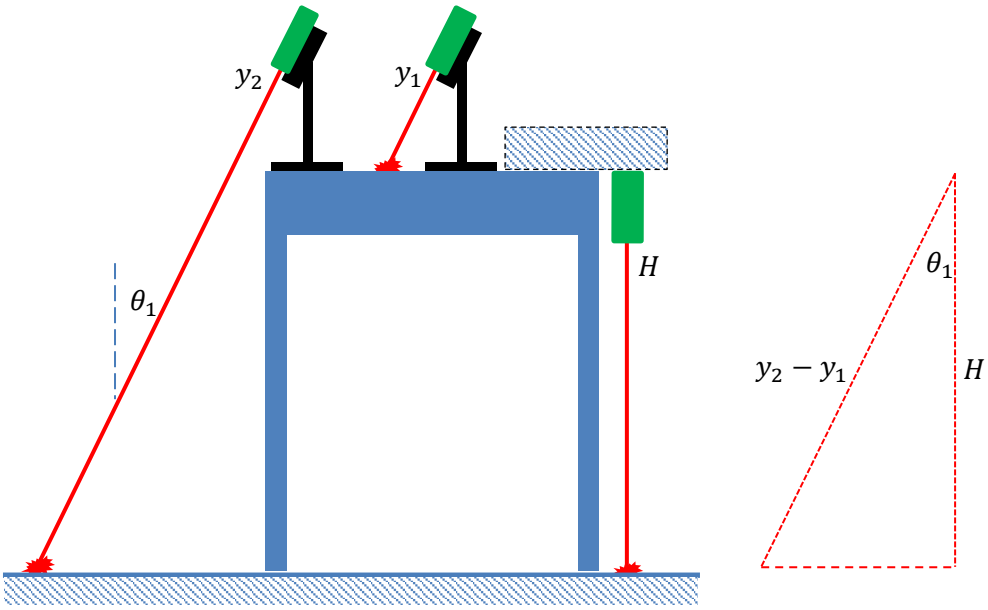
Lysets fart i lyslederkablet er $v_{\text{co}} = \frac{c}{n_{\text{co}}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}542} = 1.95 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.3a

$y_1 = 312\ \text{mm} \pm 2\ \text{mm}$, $y_2 = 1273\ \text{mm} \pm 2\ \text{mm}$

1.3b

$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{H}{y_2 - y_1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{907\ \text{mm}}{961\ \text{mm}}\right) = 19.30°$, se figure:



Measuring the horizontal part of some triangle is very inaccurate because of the size of the laser dot. No marks will be awarded for that

Using $\delta = 2\ \text{mm}$ as the uncertainty of y_1, y_2 and H, one can calculate the uncertainty of θ_1

$$\Delta \cos\theta_1 = \Delta\left(\frac{H}{y_2 - y_1}\right)$$

Using simple derivative, we get

$$\sin\theta_1 \cdot \Delta\theta_1 = \frac{\delta}{H} + \frac{2\delta}{y_2 - y_1}$$

$$\Delta\theta_1 = \frac{\left(\frac{\delta}{H} + \frac{2\delta}{y_2 - y_1}\right)}{\sin\theta_1} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{\left(\frac{2}{907} + \frac{4}{961}\right)}{\sin 19{,}30°} \cdot \frac{180°}{\pi} = 1.1°$$

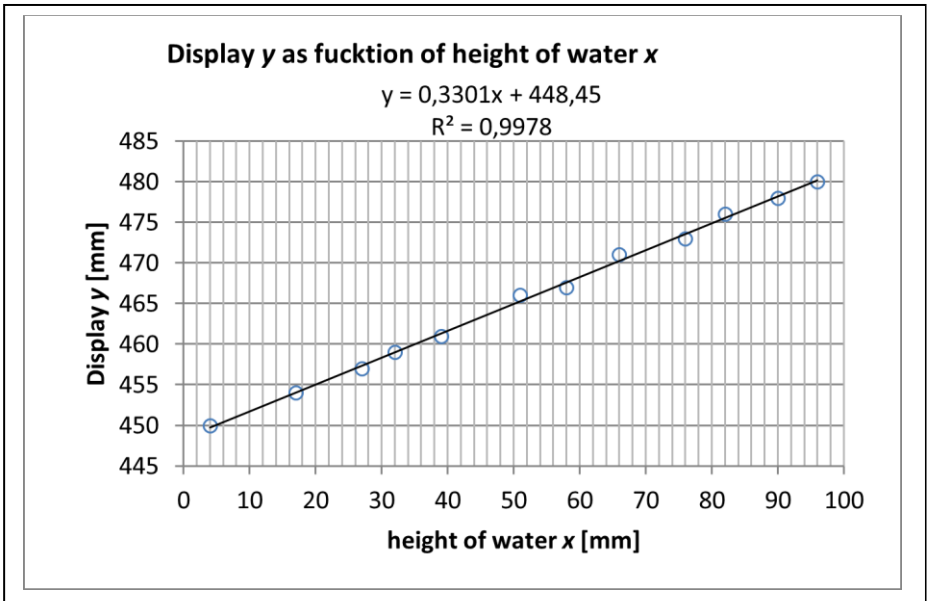
Otherwise, using min/max method

$$\Delta\theta_1 = \theta_{1\text{max}} - \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{H_{\text{min}}}{y_{2\text{max}} - y_{1\text{min}}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{905\ \text{mm}}{965\ \text{mm}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{907\ \text{mm}}{961\ \text{mm}}\right) = 1.0°$$

Also, accept $\delta = 1\ \text{mm}$ and $\Delta\theta_1 = 0.5°$

1.4a

x	*y*
mm	mm
4	450
17	454
27	457
32	459
39	461
51	466
58	467
66	471
76	473
82	476
90	478
96	480



1.4b

The time it takes the light to reach the water surface is

$$t_1 = \frac{(h-x)/\cos\theta_1}{c}$$

From the water surface to the bottom the light uses the time

$$t_2 = \frac{x/\cos\theta_2}{v}$$

Total travel time forth and back

$$t = 2t_1 + 2t_2 = 2\frac{(h-x)/\cos\theta_1}{c} + 2\frac{x/\cos\theta_2}{v} = 2\frac{h-x}{c\cos\theta_1} + 2\frac{nx}{c\cos\theta_2}$$

Hence, the display will show (we simply write $n = n_w$)

$$y = ½ct + k = \left(\frac{n}{\cos\theta_2} - \frac{1}{\cos\theta_1}\right)x + \frac{h}{\cos\theta_1} + k$$

which is a linear function of x.

Using a trigonometric identity and Snell's law,

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}}$$

we get the gradient to be

$$\alpha = \frac{n}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_1}{n^2}}} - \frac{1}{\cos\theta_1} = \frac{n^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} - \frac{1}{\cos\theta_1}$$

1.4c

Knowing the gradient α from the graph, we can find n solving this equation with respect to n.

Introducing a practical parameter,

$$p = \alpha + \frac{1}{\cos\theta_1}$$

our equation becomes

$$p = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}}$$

which can be written

$$n^4 - p^2 n^2 + p^2 \sin^2\theta_1 = 0$$

and solved

$$n_{\mathrm{w}} = \sqrt{\frac{p^2 \pm \sqrt{p^4 - 4p^2\sin^2\theta_1}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} p \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\sin\theta_1}{p}\right)^2}}$$

From our graph, we get $\alpha = 0.3301$. From there we find $p = 1.37865$ and hence $n_{\mathrm{w}} = 1.3437$, omitting negative solutions and solutions less than 1.

The official value of n_{w} for pure water at normal conditions is $n_{\mathrm{w}} = 1.331$ for the laser wavelength $\lambda = 635$ nm.

Just for your interest, we have the following approximations:
For small angles, we have

$$n_{\mathrm{w}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} p \sqrt{1 + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin\theta_1}{p}\right)^2} \approx p\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta_1}{p}\right)^2} \approx p\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta_1}{p}\right)^2\right)$$

For very small angles, we get

$$n_{\mathrm{w}} \approx p \approx \alpha + 1$$

It is much simpler but not recommendable to do the experiment with very small $\theta_1 \approx 0$: Reflections in the water surface will ruin the signal from the bottom.

2.1 The dependence of the solar cell current on the distance to the light source

$$I(r) = \frac{I_a}{1 + \frac{r^2}{a^2}}$$

2.1a	Measure I as a function of r, and set up a table of your measurements.	1.0
2.1b	Determine the values of I_a and a by the use of a suitable graphical method.	1.0

slot #	r	I	$1/I$	r^2
	mm	mA	1/mA	mm^2
3	9.0	5.440	0.184	81
4	14.5	5.290	0.189	210
5	20.0	5.010	0.200	400
6	25.5	4.540	0.220	650
7	31.0	3.840	0.260	961
8	36.5	3.230	0.310	1332
9	42.0	2.730	0.366	1764
10	47.5	2.305	0.434	2256
11	53.0	1.985	0.504	2809
12	58.5	1.730	0.578	3422
13	64.0	1.485	0.673	4096
14	69.5	1.305	0.766	4830
15	75.0	1.140	0.877	5625
16	80.5	1.045	0.957	6480
17	86.0	0.930	1.075	7396
18	91.5	0.840	1.190	8372
19	97.0	0.755	1.325	9409
20	102.5	0.690	1.449	10506

$$I\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) = I_a$$

$$r^2 = I_a a^2 \cdot \frac{1}{I} - a^2$$

$$a^2 = 1200\ \text{mm}^2 \pm 100\ \text{mm}^2,$$

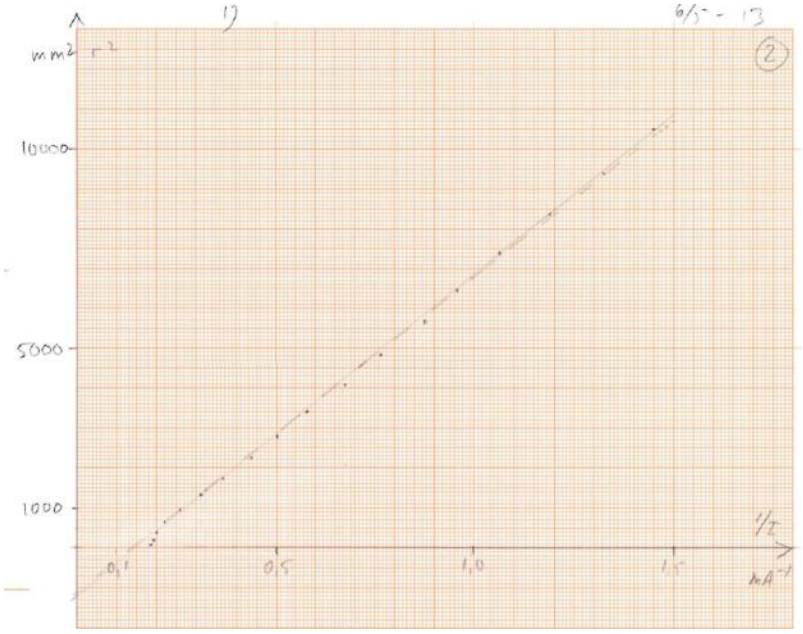
$$a = 35\ \text{mm} \pm \pm 2\ \text{mm}$$

$$I_a a^2 = \frac{10870-0}{1.50-0.15} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{mA}^{-1}} = 8051.85\ldots\ \text{mm}^2\text{mA}$$

$$I_a = \frac{8051.85\,\frac{\text{mm}^2}{\text{mA}^{-1}}}{1200\ \text{mm}^2} = 6.7\ \text{mA} \pm 0.5\ \text{mA}$$

$$(I_a a^2)_{\text{min}} = \frac{10700 - 0}{1.50 - 0.14} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{mA}^{-1}} = 7867.6\ldots\ \text{mm}^2\text{mA}$$

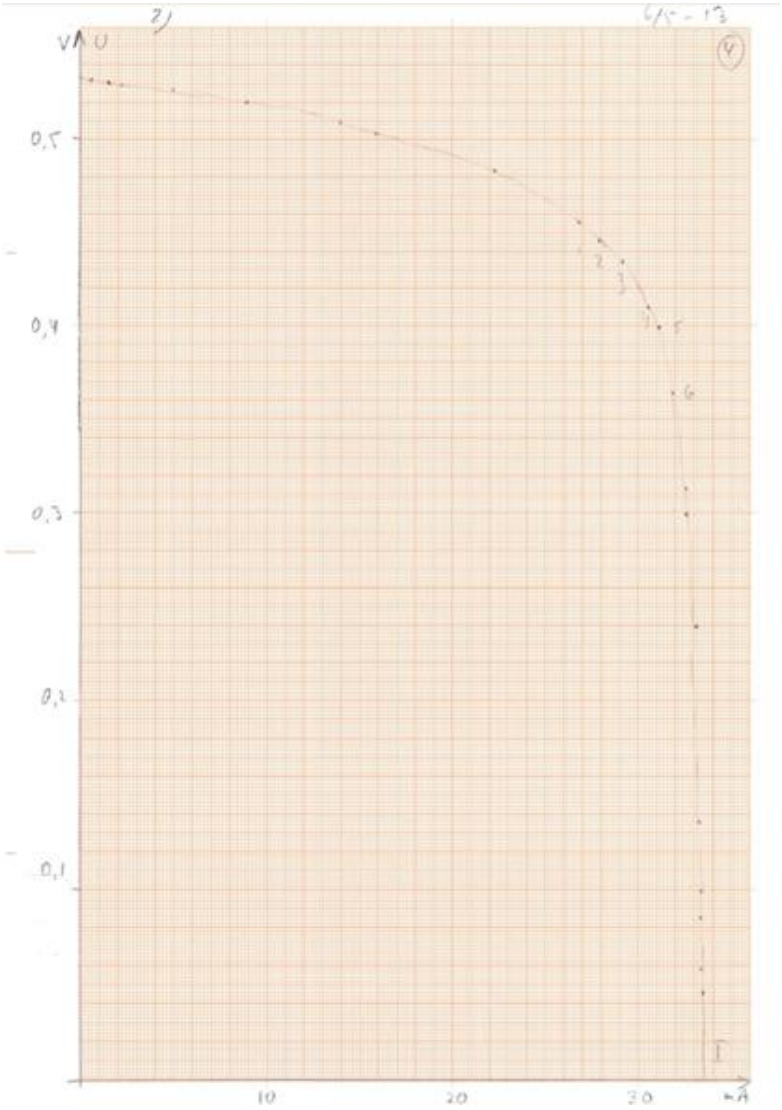
$$\rightarrow I_{a,\text{max}} = \frac{(I_a a^2)_{\text{min}}}{a^2{}_{\text{min}}} = \frac{7867.6\ \text{mm}^2\text{mA}}{1100\ \text{mm}^2} = 7.2\ \text{mA}$$



2.2 Characteristic of the solar cell

2.2a	Make a table of corresponding measurements of *U* and *I*.	0.6
2.2b	Graph voltage as a function of current	0.8

I	*U*
mA	V
0.496	0.532
1.451	0.531
5.05	0.526
8.88	0.52
14.05	0.509
31.1	0.395
25.3	0.471
21.6	0.488
30.6	0.41
31.9	0.364
32.6	0.299
32.6	0.313
33.1	0.239
33.4	0.085
33.3	0.138
33.4	0.096
33.4	0.058
33.5	0.046
33.5	0.045
1.05	0.529
27.8	0.454
15.9	0.503
22.3	0.483
26.8	0.458
29.2	0.435



2.3 Theoretical characteristic for the solar cell

2.3a	Use the graph from question 2.2b to determine $I_{\max}$.	0.4
2.3b	Estimate the range of values of U for which the mentioned approximation is good. Determine graphically the values of I_0 and η for your solar cell.	1.2

$I = I_{\max}$ for $U = 0 \rightarrow I_{\max} = 33.5$ mA

$\eta k_B T < 4 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23}\text{J/K} \cdot 300\text{ K} = 0.103$ eV

$I = I_{\max} - I_0(\exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right) - 1) \approx I_{\max} - I_0 \exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right)$

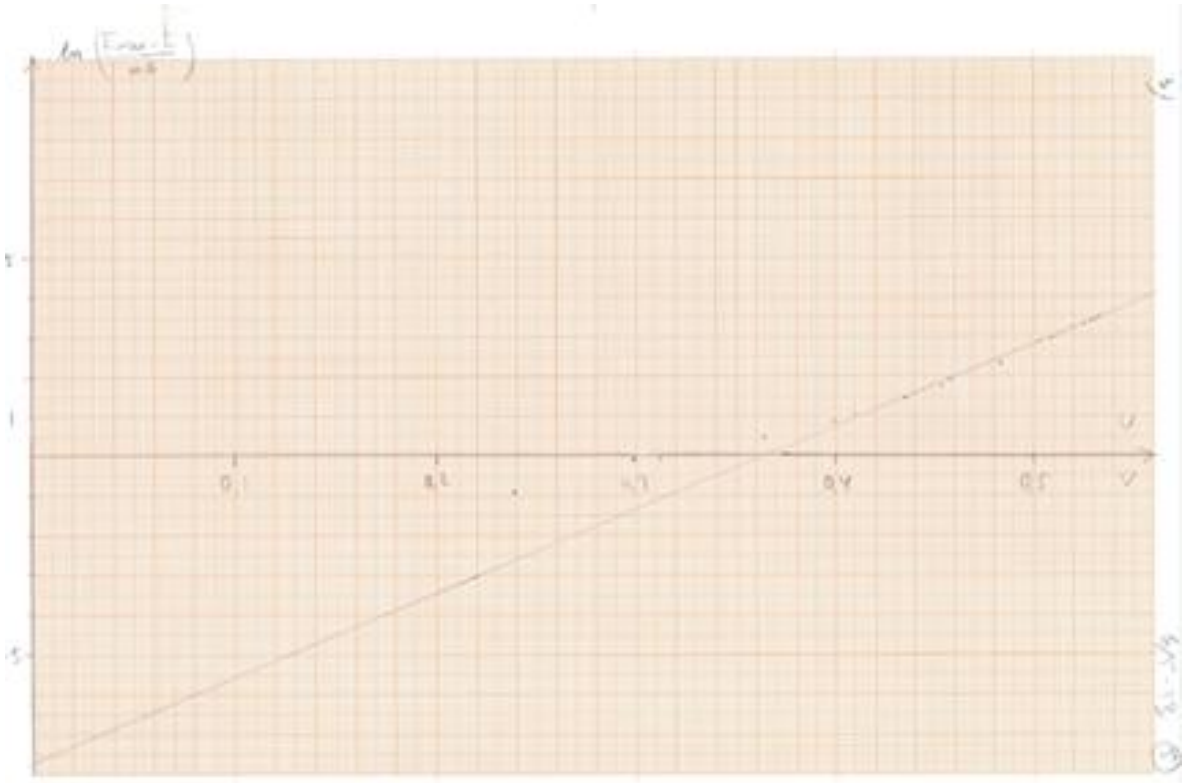
for $U > 0.4\,V$ where $\exp\left(\frac{eU}{\eta k_B T}\right) > \exp(4) \gg 1$

$ln\left(\frac{I_{max} - I}{\text{mA}}\right) = \frac{e}{\eta k_B T} U - ln\left(\frac{I_0}{\text{mA}}\right)$

$\frac{e}{\eta k_B T} = \frac{4.03 - (-7.7)}{0.56\text{ V}} = 20.95\text{ V}^{-1}$

$\rightarrow \boldsymbol{\eta} = \frac{e/(k_B T)}{20.95\text{ V}^{-1}} = 1.85$

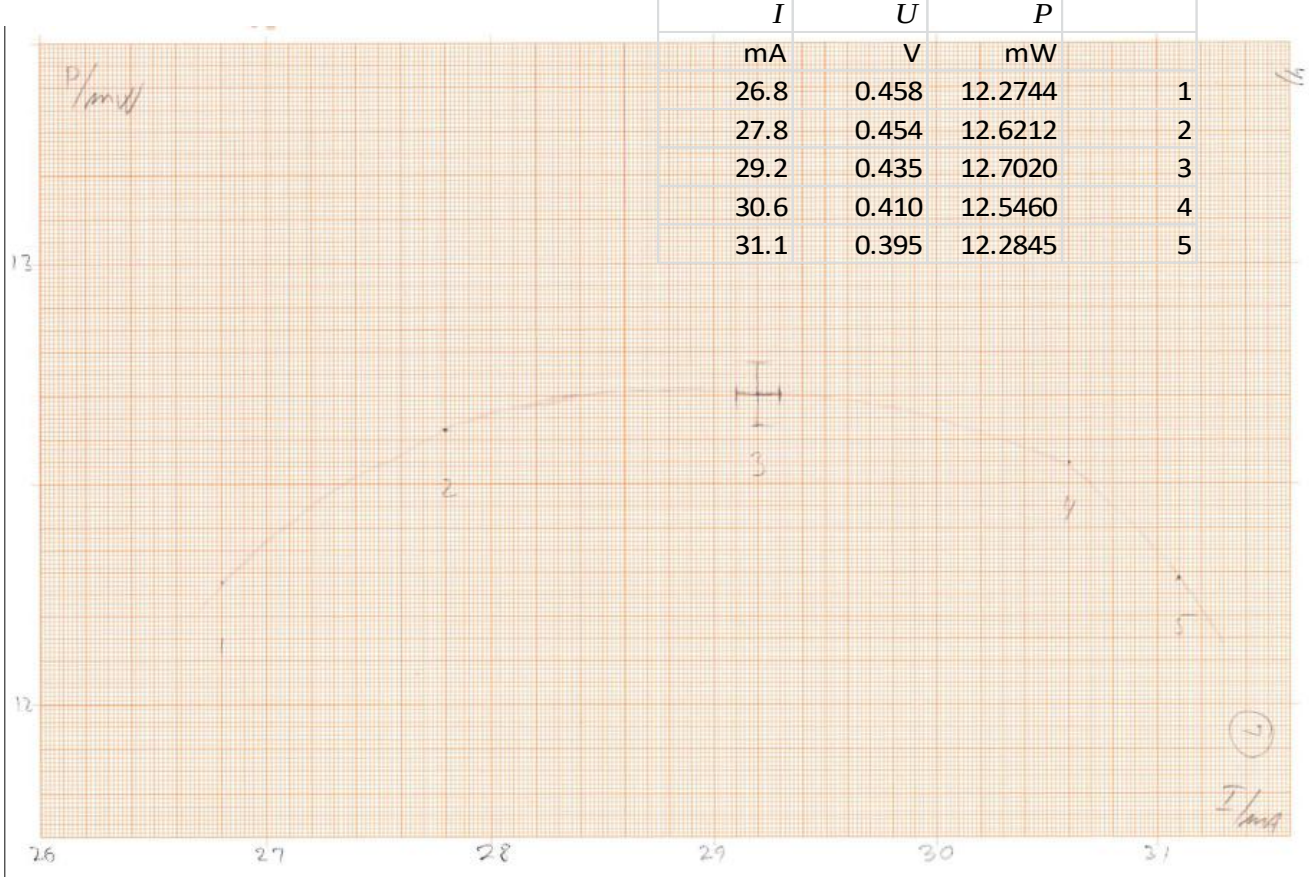
$I_0 = e^{-7.7}\text{mA} = 0.45\mu A$



2.4 Maximum power for a solar cell

2.4a	The maximum power that the solar cell can deliver to the external circuit is denoted P_{max}. Determine P_{max} for your solar cell through a few, suitable measurements. (You may use some of your previous measurements from question 2.2)	0.5
2.4b	Estimate the optimal load resistance R_{opt}, i.e. the total external resistance when the solar cell delivers its maximum power to R_{opt}. State your result with uncertainty and illustrate your method with suitable calculations.	0.5

I	U	P	
mA	V	mW	
26.8	0.458	12.2744	1
27.8	0.454	12.6212	2
29.2	0.435	12.7020	3
30.6	0.410	12.5460	4
31.1	0.395	12.2845	5



$$P_{max} = (12.7 \pm 0.1)\text{mW}@(28.8 \pm 0.2)\text{mA}$$

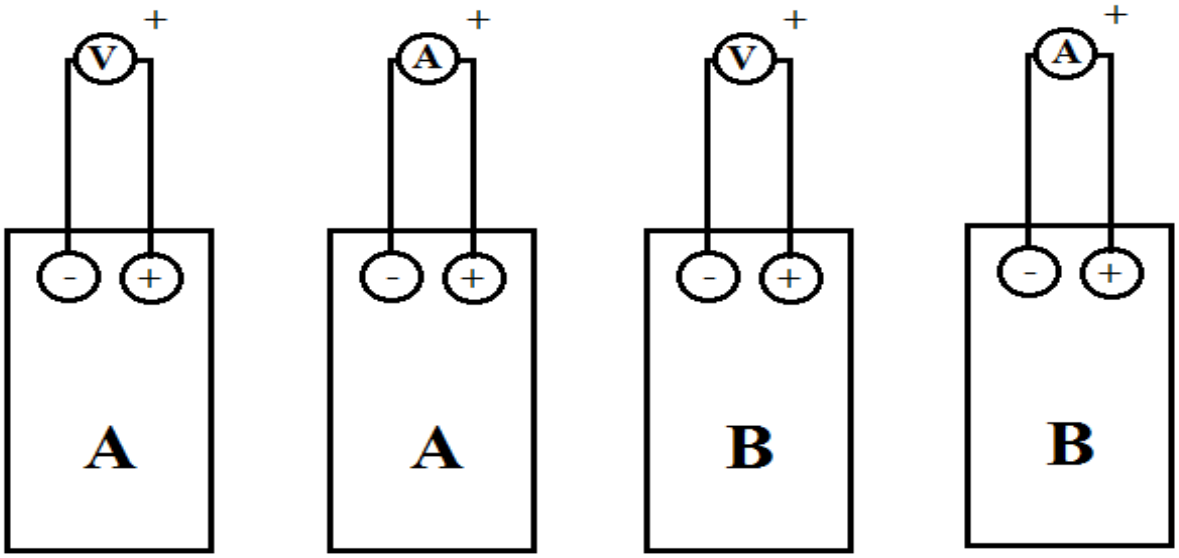
$$R_{opt} = \frac{P_{max}}{I_{opt}^2} = \frac{12.71\text{mW}}{(28.8\text{mA})^2} = (15.3 \pm 0.3)\Omega$$

2.5 Comparing the solar cells

2.5a	Measure, for the given illumination: - The maximum potential difference U_A that can be measured over solar cell A. - The maximum current I_A that can be measured through solar cell A. Do the same for solar cell B.	0.5
2.5b	Draw electrical diagrams for your circuits showing the wiring of the solar cells and the meters.	0.3

2.5a. U_A=0.512 V I_A=16.465 mA U_B=0.480 V I_B = 16.325 mA

2.5b.



2.6 Couplings of the solar cells

2.6	Determine which of the four arrangements of the two solar cells yields the highest possible power in the external circuit when one of the solar cells is shielded with the shielding plate (J in Fig. 2.1). Draw the corresponding electrical diagram.	1.0

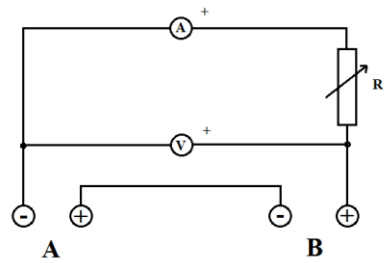
Two approaches:

Approach 1: use a constant setting of the variable resistor to simulate a constant external load.

Approach 2: use the hint given in the question and measure values of maximal U and maximal I independently (no variable resistor involved).

In the following only measurements for approach 1 are presented.

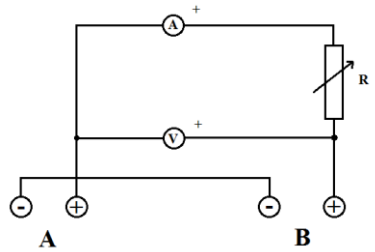
a.



Unshielded (adjusting R for reasonable P)
13.10 mA; 0.794 V; 10.4 mW

A shielded: 0.37 mA; 0.022 V
B shielded: 0.83 mA; 0.049V

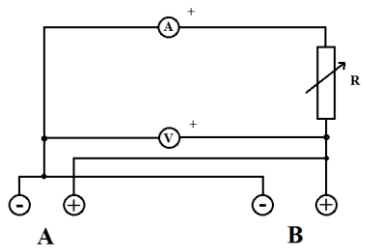
b.



R like in a.

A shielded: 1.47 mA; 0.088V
B shielded: -2.82 mA; -0.170 V

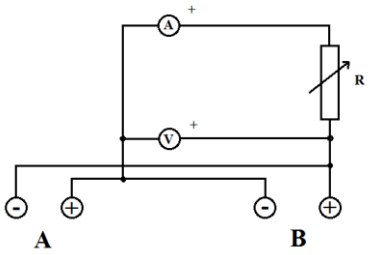
c.



R like in a.

A shielded: 6.89 mA; 0.415 V
B shielded: 6.905 mA; 0.4165 V

d.



R like in a.

A shielded: 7.14 mA; 0.436 V

B shielded: -7.76 mA; -0.474 V

Conclusion: Best power: Set-up d with B shielded. (Solar cell A slightly better than B).

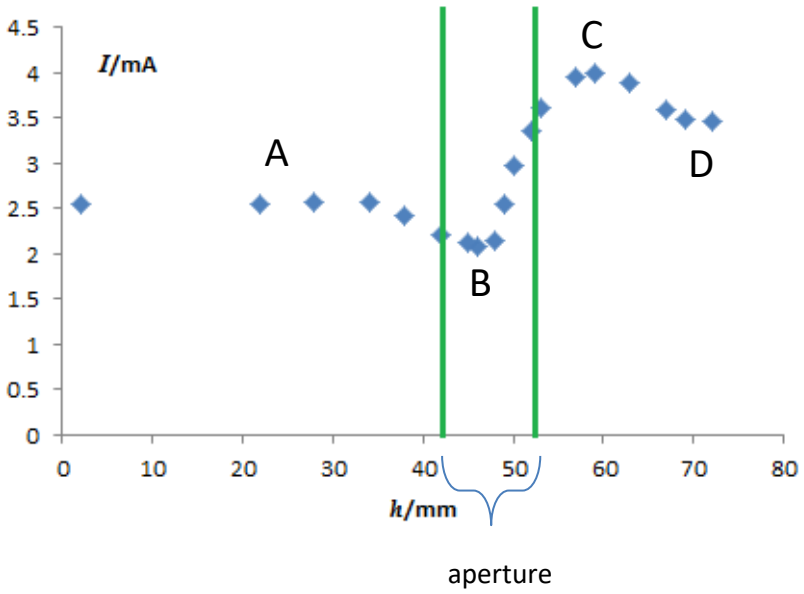
(2.7 on next page)

2.7 The effect of the optical vessel (large cuvette) on the solar cell current

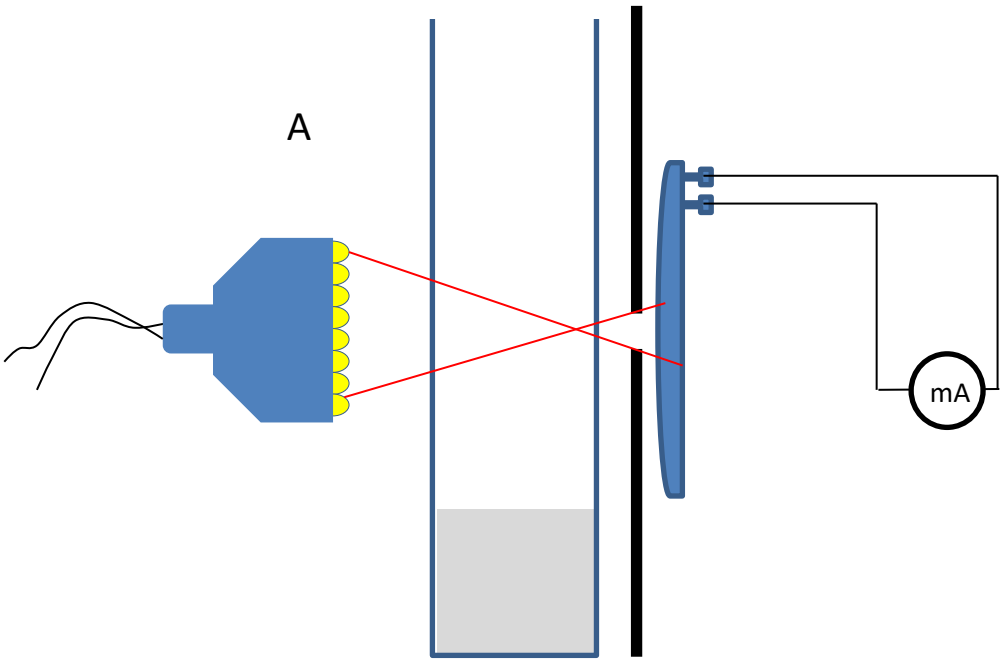
2.7a	Measure the current I, now as a function of the height, h, of water in the vessel, see Fig. 2.8. Make a table of the measurements and draw a graph.	1.0
2.7b	Explain with only sketches and symbols why the graph looks the way it does.	1.0
2.7c	For this set-up do the following: - Measure the distance r_1 between the light source and the solar cell, and the current I_1. - Place the empty vessel immediately in front of the circular aperture and measure the current I_2. - Fill up the vessel with water, almost to the top, and measure the current I_3.	0.6
2.7d	Use your measurements from 2.7c to find a value for the refractive index n_w for water. Illustrate your method with suitable sketches and equations. You may include additional measurements.	1.6

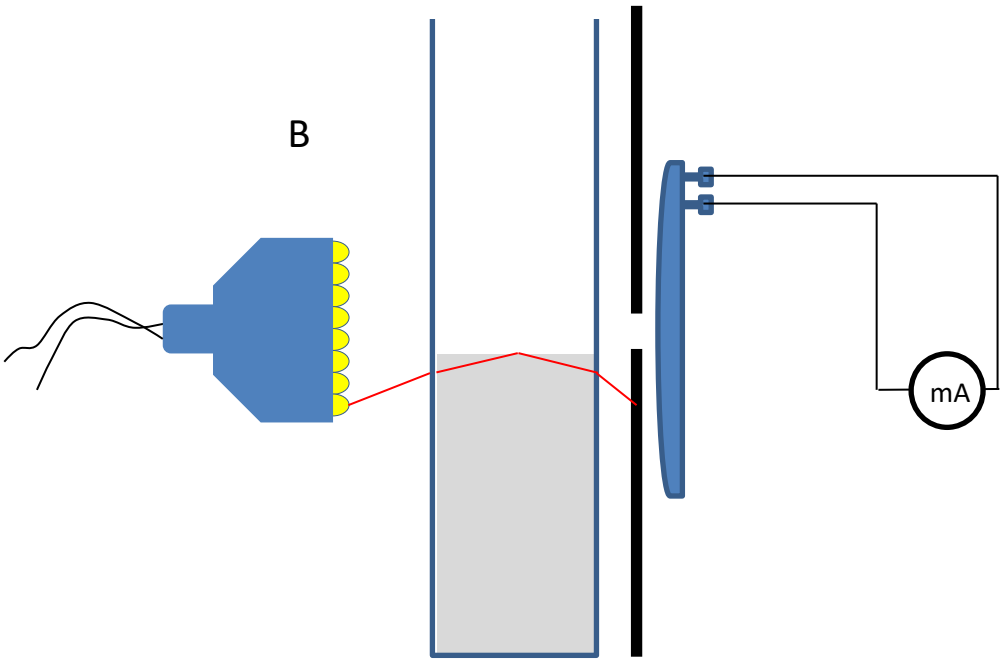
2.7a

h	I
mm	mA
2	2.54
22	2.55
28	2.56
34	2.57
38	2.42
42	2.21
45	2.13
46	2.08
48	2.15
49	2.54
50	2.97
52	3.36
53	3.61
57	3.96
59	3.99
63	3.89
67	3.6
69	3.49
72	3.47

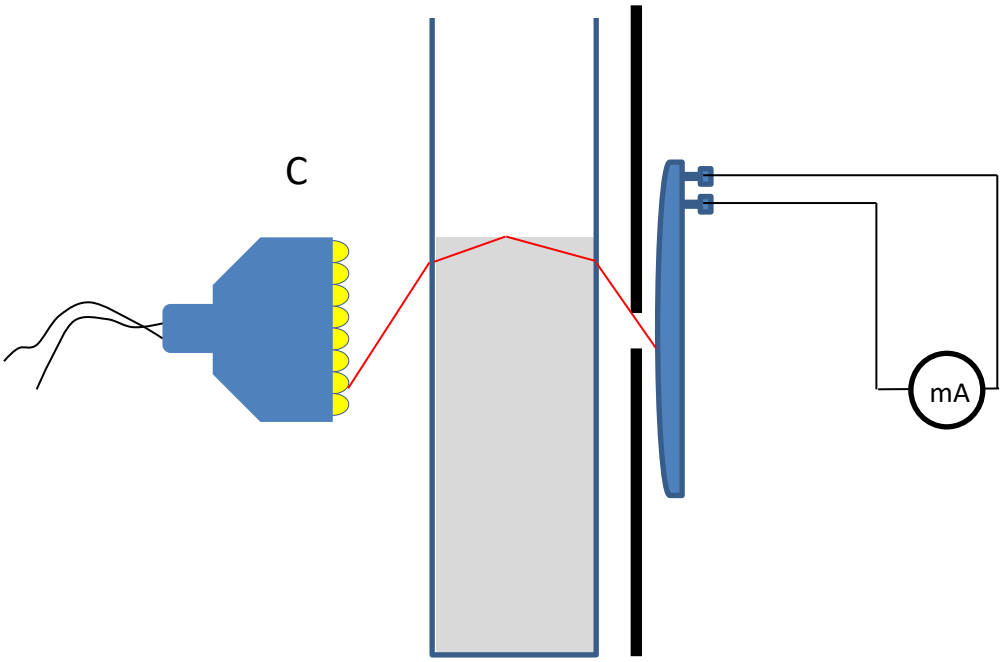


2.7b ***Exemplar*** drawings for position A, B, C and D on previous graph:

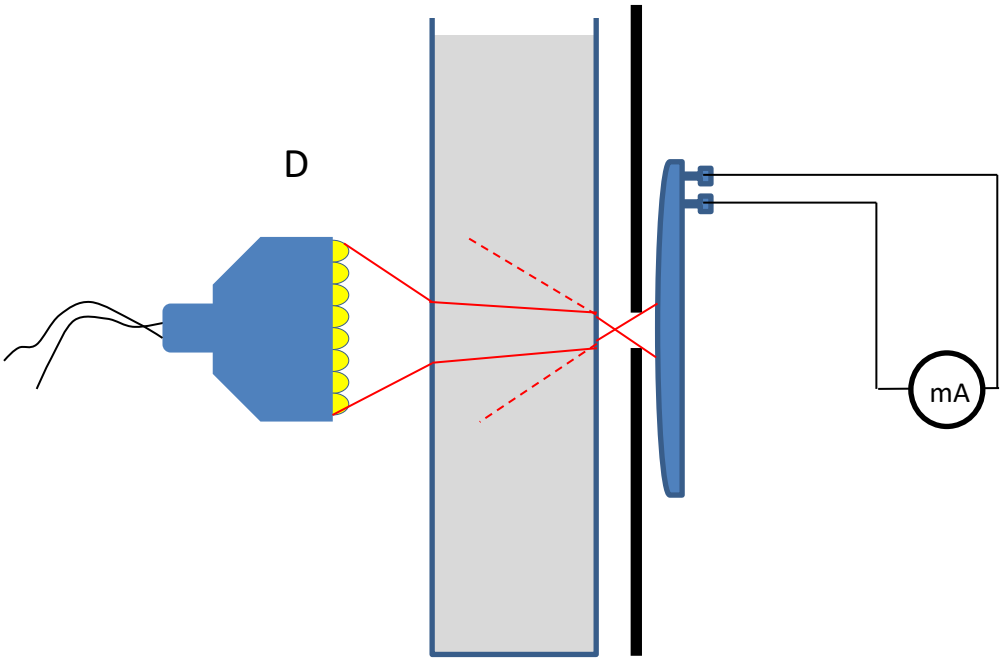




C

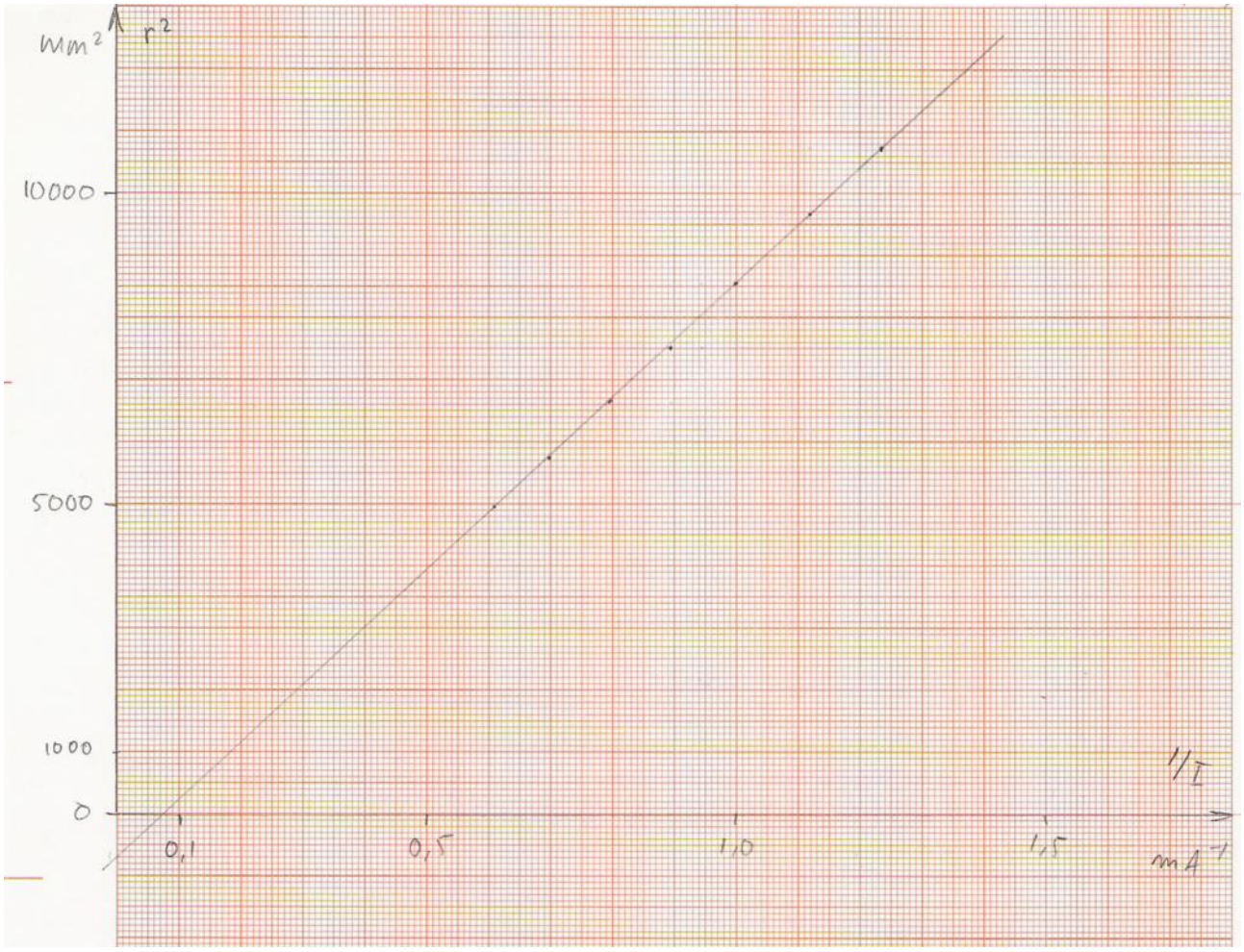


D

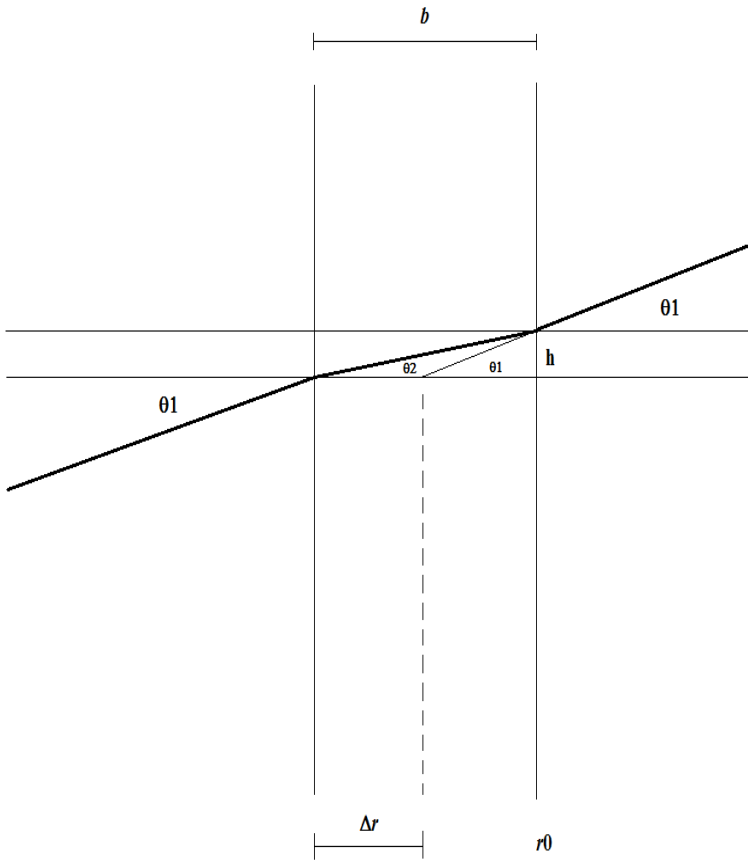


2.7c NOTE: The exemplar measurements are from a different lamp than in 2.1. For a solution to 2.7d using the distance graph you have to refer to the graph below.
$r_1 = 103.5$ mm; $I_1 = 0.81$ mA; $I_2 = 0.705$ mA; $I_3 = 0.85$ mA

$$\frac{1}{I_3} \cdot \frac{I_2}{I_1} = 1.024\ \text{mA}^{-1} \sim r_c^2 = 8800\ \text{mm}^2 \sim r_c = 93.8\ \text{mm}$$



2.7d



$$h = (b - \Delta r)\tan\theta_1 = b\tan\theta_2 \Rightarrow \frac{b}{b-\Delta r} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \approx \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n \text{ , da } \theta_2 < \theta_1 << 1.$$

$$n_w \approx \frac{b}{b-\Delta r} = \frac{b}{b-(r_1 - r_c)} = \frac{26.0\text{ mm}}{26.0\text{ mm} - (103.5 - 93.8)\text{mm}} = 1.6$$

NOTE: You may get better results. The uncertainty is rather large in this method because of the subtraction of two large numbers for Δr

A different method is to determine the shift by actually moving the set-up and perhaps making an interpolation in directly measured data.