理论试题一、 点电荷在金属物体中的静电镜像

概述 – 镜像法

一个置于半径为 R 的接地金属球附近[见图 1（a）]，电量为 q 的点电荷，会在金属球表面上产生感应电荷分布。要由表面电荷的分布计算电场和电势是一项令人生畏的工作。但这种计算可以用所谓的镜像法大大简化。通过镜像法，在球面上的感应电荷产生的电场和电势等效于一个放置在球内的点电荷 q' 产生的电场和电势（你不必证明这一结论）。**注意：这个像电荷 q' 产生的电场和电势仅在金属球外（包括球面）与上述球面上感应出的电荷产生的电场和电势相同。**

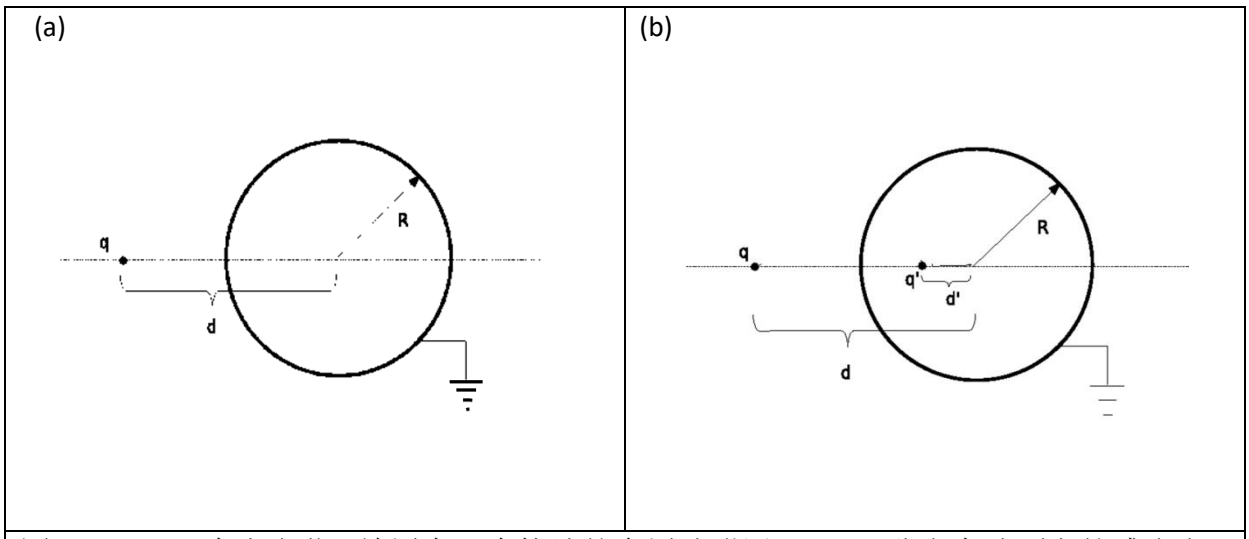


图 1（a） 一个点电荷 q 放置在一个接地的金属球附近。（b）分布在球面上的感应电荷产生的电场等效于一个像电荷 q' 产生的电场。

任务 1　像电荷

本问题的对称性表明，像电荷应该位于点电荷 q 与球心的连线上[见图 1（b）]。

a）球上的电势值是多大？（0.3 分）
b）用 R 、q 和 d 等表示像电荷 q' 和其到导体球心的距离 d'，推导过程写在演算纸上。（1.9 分）
c）求作用在电荷 q 上的力的大小。这个力是排斥力吗？（0.5 分）

任务 2　对静电场的屏蔽

考虑一个电量为 q 的点电荷，置于距接地金属球的球心 d 处，金属球的半径为 R. 我们感兴趣的是：接地金属球怎样影响 A 点的电场？A 与 q 分别在球的两边，并且 A 在点电荷 q 与球心的连线上，A 到 q 的距离是 r .

a）求 A 点处的电场矢量。（0.6 分）
b）当 $r >> d$ 时，用近似公式 $(1+a)^{-2} \approx 1\text{-}2a$（这里 $a <<1$），求电场的表达式。（0.6 分）
c）在 d 取什么极限值时，接地金属球能完全屏蔽点电荷 q 的电场，即 A 点处的电场精确为 0？（0.3 分）

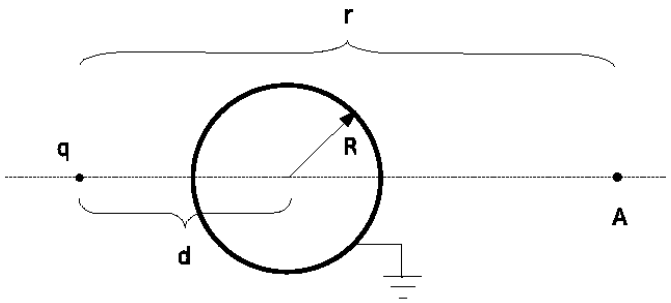


图 2. A 点的电场被接地导体球部分地屏蔽。

任务 3　接地导体球的电场中的小振动

在接地导体球附近，将质量为 m 的点电荷 q 用长度为 L 的线悬挂在墙上。在你的各种考虑中，忽略墙的所有静电效应。如图 3 所示，点电荷构成了一个单摆，悬挂点与球心的距离为 l。假设重力的影响可以忽略。

a) 对于给定角度α，给出作用在点电荷上的静电力的大小，并在答题纸上用一示意图清楚地标明力的方向。（0.8 分）
b) 将此作用力在垂直悬挂线方向的分量用 l、L、R、q 和α 等表示出来。（0.8 分）

c) 求此摆作小振动时的角频率。（1.0 分）

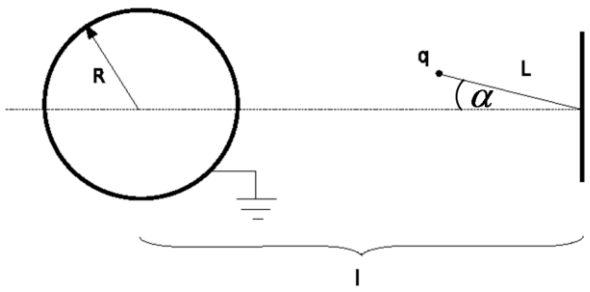


图 3. 在接地导体球附近，一个点电荷象单摆一样振动。

任务 4　系统的静电能

给定一个电荷分布，知道系统的静电能很重要。在我们的问题中（见图 1*a*），外部电荷 q 与导体球表面上的感应电荷间存在静电作用力，球表面上的感应电荷自身之间也存在静电作用力。用电荷 q，球半径 R 和距离 d 确定下列静电能：

a) 电荷 q 与它在球表面上感应出的电荷之间相互作用的静电能；（1.0 分）
b) 球表面上的感应电荷之间相互作用的静电能；（1.2 分）
c) 系统总的相互作用静电能。（1.0 分）

提示：此问题有几种解法：

（1） 在其中一种解法中，你可以利用积分公式：$\int_d^\infty \frac{xdx}{\left(x^2-R^2\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{d^2-R^2}$。

（2） 在另一种解法中，你可以利用此结论：对于由分别位于点 $\vec{r}_i, i=1,\ldots,N$ 的 N 个电量为 q_i 的点电荷构成的系统，其静电能是所有点电荷间两两相互作用静电能之和：

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}.$$

理论试题二、 烟囱的物理

概述

如图 1 所示，燃烧的气体产物通过截面积为 A，高度为 h 的烟囱排放到温度为 T_{atm} 的大气中。固态物质在温度为 T_{smoke} 的炉中燃烧。B 为在炉中每单位时间产生的气体体积。

假设：

- 炉中气体的速度小到可以忽略
- 在相同的温度和压强下，燃烧产生的气体的密度与空气的密度相同。在炉内，气体可被视为理想气体。
- 空气的压强随高度的变化满足流体静力学规律，且空气密度随高度的变化可忽略。
- 气体的流动满足伯努利方程。在同一流线上各点所满足的伯努利方程为

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{常量}$$

其中 ρ 是气体的密度，$v(z)$是流速，$p(z)$是压强，z 是高度。

- 在整个烟囱内，气体的密度变化可忽略。

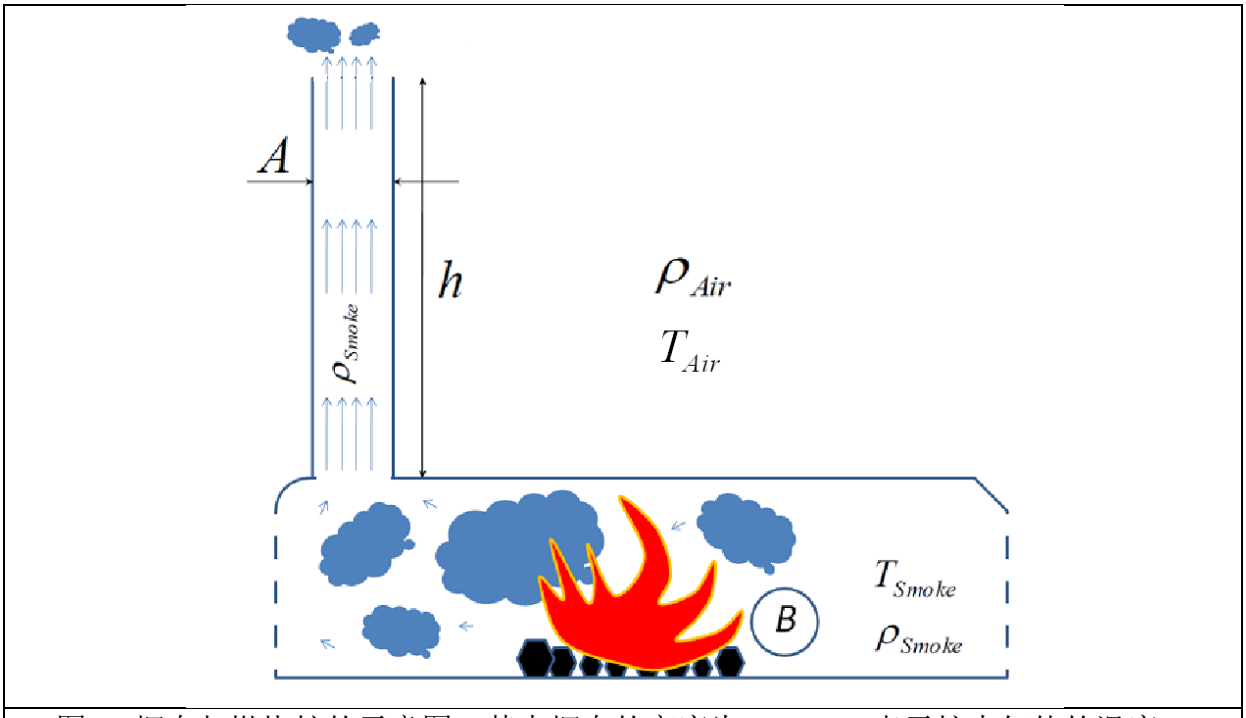


图 1　烟囱与燃烧炉的示意图，其中烟囱的高度为 h，T_{smoke} 表示炉内气体的温度。

任务 1

a) 为了能让烟囱将所有的气体产物排放到大气中，即烟囱能有效运转，烟囱所需的最小高度是多少？结果用 B、A 和 T_{Air} 等表示。取 g=9.81m/s^2, $\Delta T=T_{Smoke}-T_{Air}$。**重要提示：**在接下来的所有任务中，都假设烟囱的高度为此最小高度。（3.5 分）

b) 假设要建造的两个烟囱满足完全相同的目的。它们的截面积相同，但一个位于寒冷区域，大气的平均温度为 -30^0C；另一个位于温暖区域，大气的平均温度为 30^0C。炉子内部温度都是 400^0C。若已求出位于寒冷区域的烟囱高度是 100m，则另一个烟囱的高度是多少？（0.5 分）

c) 假设烟囱的截面积不随高度变化，烟囱内不同高度的气体速度如何变化？画一个示意草图来说明。要在图中标明气体进入烟囱的位置。（0.6 分）

d) 气体的压强随着烟囱的高度如何变化？（0.5 分）

太阳能发电厂

气体在烟囱中的流动可以被用来建造一种特殊的太阳能发电厂（即太阳能烟囱），其原理见图 2。图中收集装置（collector）下面的空气被太阳加热。上述收集装置的外围是开放的，因此空气可不受阻碍地流入（见图 2）。随着被加热的空气在烟囱中上升（细实箭头），新空气从收集装置的周围进入收集装置（粗虚线箭头），这将在发电厂中形成一个连续的空气流。通过烟囱的空气流推动涡轮，从而产生电能。G 为单位时间、单位水平面积的收集装置所接收到的太阳能。 假设所有的能量都能被用于加热收集装置中的空气（空气的质量热容量是 c，并且我们能忽略该热容量对空气温度的依赖）。我们将太阳能烟囱的效率定义为：空气流的动能与空气进入烟囱前被加热的过程中吸收的太阳能之比。

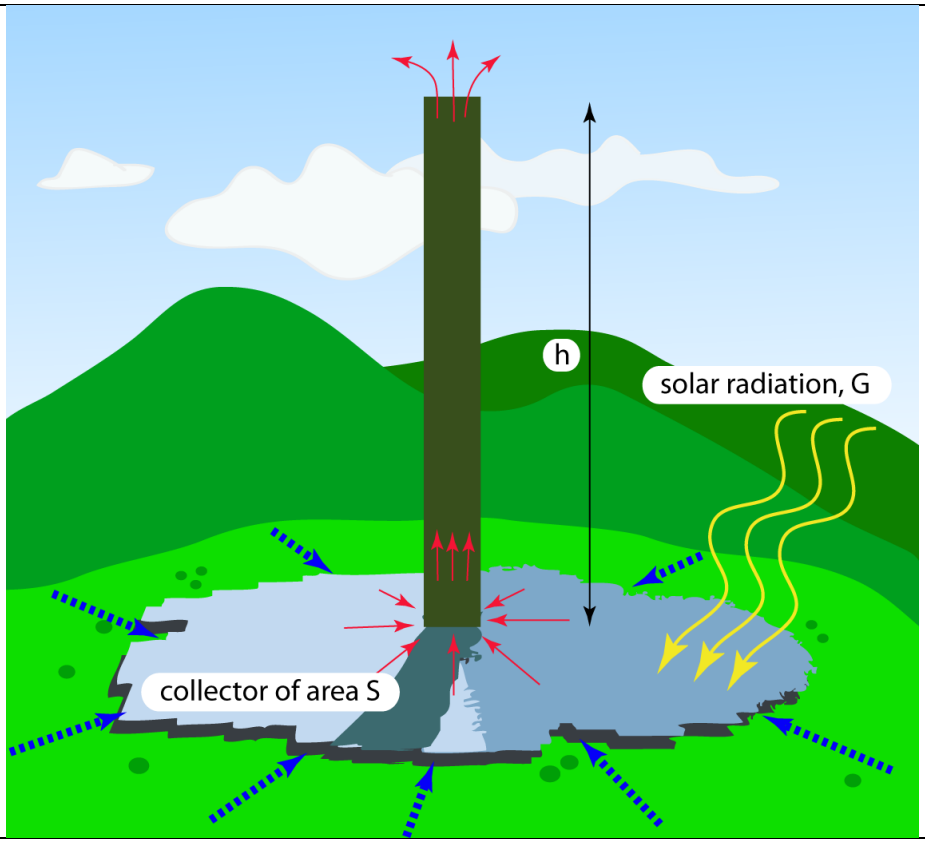


图 2. 太阳能工厂示意图。

任务 2

a）　出太阳能烟囱发电厂的效率表达式？（2.0 分）
b）　画一草图来表示烟囱发电厂效率随烟囱高度变化的关系。（0.4 分）

曼察纳尔斯太阳能发电原型机

在西班牙的曼察纳尔斯建成了一座太阳能烟囱原型机，该烟囱高 195 米，**半径** 5 米。其收集装置是圆形的，**直径**为 244 米。空气在该原型机的典型工作条件下的比热为 1012 J/kg K，热空气的密度大约是 0.9 kg/m^3，典型大气温度为 T_{Air} = 295 K. 在曼察纳尔斯，当天气晴朗时，单位水平面积上的太阳辐照功率的典型值为 150 W/m^2。

任务 3

a）　上述太阳能原型烟囱发电厂的效率是多少？写出估算出的数值。（0.3 分）
b）　该太阳能发电厂的功率是多少？（0.4 分）
c）　在一个典型的日照时间内，该太阳能工厂一天能提供多少能量？（0.3 分）

任务 4

a) 周围空气（冷空气）进入烟囱变成热空气后，其温度上升了多少？写出一般公式， 并就上述太阳能原型烟囱求上述温度上升的值。（1.0 分）

b) 通过该原型烟囱的空气质量流量是多少？（0.5 分）

理论题三、 原子核的简单模型

概述

虽然原子核是量子系统，有关它们的基本性质（像核半径或结合能）的几个唯象规律却可以从下列简单假设得出：（i）原子核由核子（质子和中子）构成；（ii）将这些核子结合在一起的强相互作用具有非常短的作用范围（它只存在于相邻核子之间）；（iii）在一个给定的原子核中，质子的数目（Z）近似等于中子的数目（N），即Z ≈ N ≈ A/2，这里 A 是核子的总数。**重要提示：在下面的任务 1 至任务 4 中都要使用这些假设。**

任务 1　将原子核当作核子紧密填充的系统

在一个简单模型中，原子核可以被当作由核子紧密填充的球体（参考图 1（a）），这里核子被当作半径为 $r_N = 0.85\text{fm}$（$1\text{fm} = 10^{-15}m$）的球体。核力只存在于相互接触的核子之间。原子核的体积 V 大于组成原子核的核子体积之和AV_N，这里$V_N = \frac{4}{3} r_N^3 \pi$.

比值 $f = AV_N / V$ 被称作填充因子，给出了空间被核物质填充的百分比。

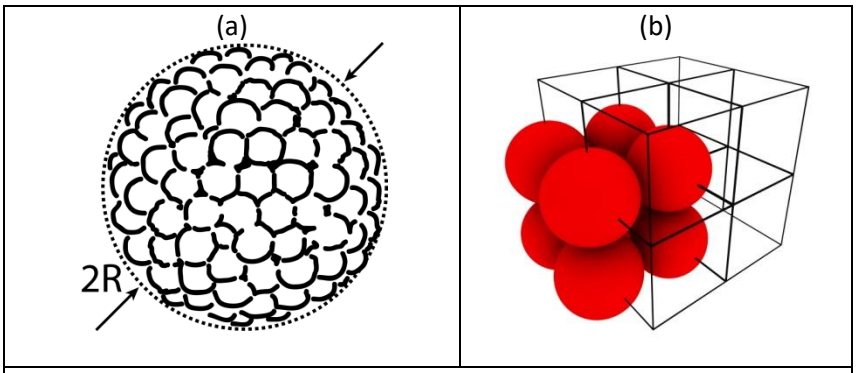


图 1 （a）原子核被当作由核子紧密堆积的球体。（b）简单立方式的堆积。

a) 如果核子按“简单立方”晶格排布（参考图 1（b）），即每个核子位于无限立方晶格的格点上，计算这种情况下的填充因子 f.（0.3 分）

重要提示：在接下来的所有任务中，假设原子核的实际填充因子都等于在“任务 1a)”得到的值。如果你不能算出它的值，在接下来的任务中，就使用 $f = 1/2$.

b) 对于具有 A 个核子的原子核，估算它的平均的质量密度ρ_m，电荷密度ρ_c和半径 R，核子的平均质量是$1.67 \times 10^{-27} kg$。（1.0 分）

任务 2　原子核的结合能——体积项和表面项

一个原子核的结合能等于将它分离成单独核子所需的能量，这一能量基本上来源于每个核子与它相邻的核子相互作用的吸引力部分。如果一个给定的核子不在原子核的表面，它对总结合能的贡献为 a_V= 15.8 MeV (1 MeV = 1.602×10^{-13} J)。一个位于核表面的核子对结合能的贡献约为 $a_V/2$。用 A、a_V 和 f 表示一个核子数为 A 的核的结合能 E_b，要包含表面修正。（1.9 分）

任务 3　结合能中的静电（库仑）效应

一个半径为 R，总电量为Q_0的均匀带电球体的静电能为：

$$U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

其中，$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C}^2N^{-1}m^{-2}.$

a) 应用上面的公式来计算一个原子核的静电能。在一个原子核中，每个质子与自身没有库仑相互作用，而是只作用在其它的质子上。在所得到的表达式中，通过作 $Z^2 \to Z(Z-1)$ 替换可以计入这一事实的影响。在接下来的所有任务中都要使用这一修正。（0.4 分）

b) 写出结合能的完整表达式，其中包括主要项（即体积项），表面修正项和所得到的静电修正项。（0.3 分）

任务 4　重原子核的裂变

原子核分裂为若干较小部分（即较轻原子核）的过程称为核裂变。假设一个有 A 个核子的原子核分裂为两个相等部分，如图 2 所示。

a） 设两个较轻的核的中心被分开距离 $d \geq 2R(A/2)$，这里 $R(A/2)$是较轻的两个核的半径，计算裂变产生的两个较轻核的总动能。已知两个较轻的核分开之前（即大核）是静止的。（1.3 分）

b） 假定 $d = 2R(A/2)$，分别取 A= 100, 150, 200 和 250，根据问题“a）”得到的 E_{kin} 的表达式，求 E_{kin} 的值（结果用 MeV 为单位表示出来）。对于上面的模型，估算裂变能够发生对应的 A 值的范围。（1.0 分）

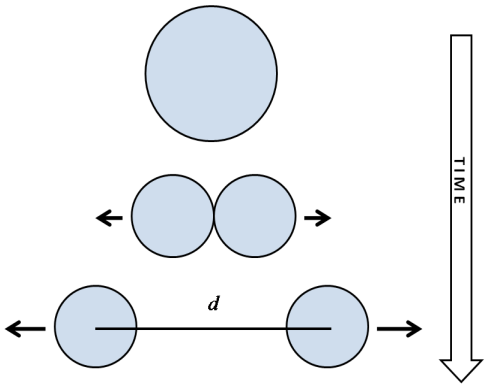


图 2. 我们所用模型中的核裂变示意图。

任务 5　转移反应

在近代物理中，原子核的能量及它们的反应涉及的能量都由质量来描述。例如，一个静止的原子核处于激发能为 E_{exc}（即高于基态的能量）的激发态，其质量为 $m = m_0 + E_{exc}/c^2$，这里 m_0 是该原子核处于基态、静止时的质量。核反应 $^{16}O+^{54}Fe \rightarrow ^{12}C+^{58}Ni$ 就是所谓的“转移反应”的一个例子，在这个反应中，一个原子核的某一部分（称为原子核团簇）被转移到另一个原子核中（见图 3）。在我们的例子中，被转移的部分是 ^{4}He-团簇（即 α-粒子）。如果在转移反应中，反应后出射核（在我们这个例子中就是 ^{12}C）的速度的大小和方向都等于反应前入射核（在我们这个例子中就是 ^{16}O）的速度，转移反应发生的概率最大。这里，靶核 ^{54}Fe 在反应前静止。在反应中，^{58}Ni 被激发到某一个高激发态。如果入射核 ^{16}O 的动能是 50MeV，求 ^{58}Ni 所处的态的激发能。已知光速为 c= 3×10^8 m/s.（2.2 分）

1.	M(^{16}O)	15.99491 a.m.u.
2.	M(^{54}Fe)	53.93962 a.m.u.
3.	M(^{12}C)	12.00000 a.m.u.
4.	M(^{58}Ni)	57.93535 a.m.u.

表 1. 参加反应的核在它们的基态时的静止质量.　1 a.m.u.= $1.6605\cdot10^{-27}$ kg.

b）问题“a）”讨论的处于激发态的 ^{58}Ni 原子核，通过发射一个与 ^{58}Ni 的运动方向相同的伽马光子而退激发到其基态。在相对于处于激发态的 ^{58}Ni 静止的参考系处理其衰变，求 ^{58}Ni 的反冲能量（即 ^{58}Ni 发射伽马光子后获得的动能）。在上述参考系中，光子的能量是多少？在实验室参考系中，光子的能量是多少（即：在 ^{58}Ni 运动方向上放置探测器，测得的光子的能量是多少）？（1.6 分）

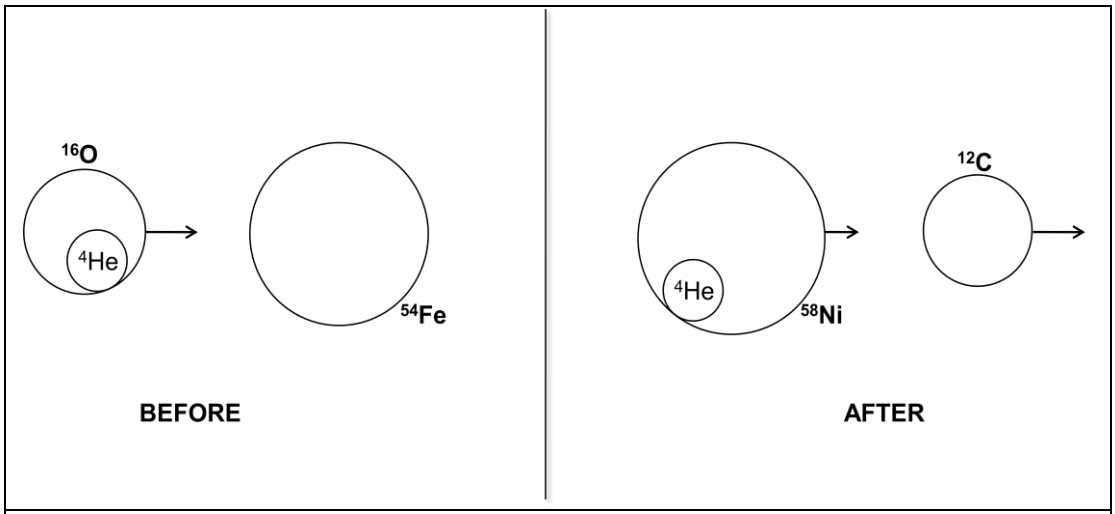


图 3. 转移反应示意图

北京大学物理学院　王若鹏 荀坤 陈晓林　译

实验试题一

实验题共两道，均使用你桌上的装置来完成。你要在 5 小时内完成所有任务（一、二两道题）。

实验题一：片状物的弹性

概述

弹簧是由能储存机械能的弹性材料制成的。最著名的螺旋式弹簧就很好地满足胡克定律，即压缩弹簧所用的力与其偏离平衡位置的位移成线性比例关系：$F=-k\Delta x$，这里 k 是弹簧的劲度系数，Δx是偏离平衡的位移，F 是作用力[见图 1（a）]。然而，弹簧可以具有不同于通常螺旋形的各种形状，并且对于较大的变形，胡克定律一般不再成立。本问题中，我们测量由弹性材料薄片做成的弹簧的性质，这种弹簧的示意图见图 1（b）。

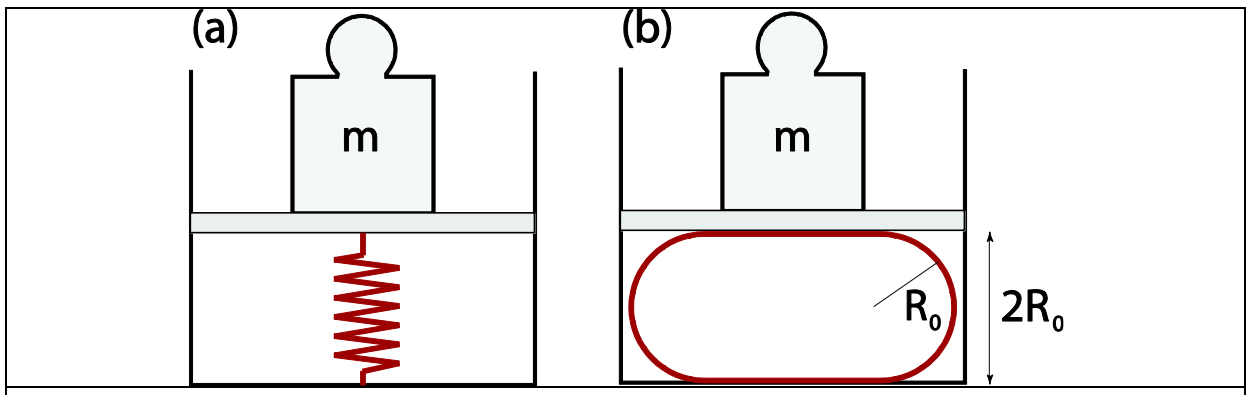


图 1 （a）螺旋式弹簧的示意图。（b）由弹性材料薄片卷成圆筒所成的弹簧的示意图。后一种弹簧被压缩到一定程度时，其截面具田径场状（含半径均为R_0的两个半圆，见正文）。

透明薄片卷成筒形弹簧

假设我们取一个弹性材料的薄片（例如，一张透明片），弯曲它。它弯曲得越厉害，其中储存的弹性势能就越大。弹性势能依赖于薄片弯曲的曲率。薄片中具有较大曲率的部分储存较多的势能（薄片中平直的部分曲率为零，不储存势能）。本实验所用弹簧就是用矩形透明片卷成圆筒而制成的（见图 2）。此圆筒所储存的弹性势能为

$E_{el} = \frac{\kappa}{2}\frac{1}{R_c^2}A$，	(1)

这里 A 表示圆筒的侧面积，R_c表示它的半径，参量 κ 被称作弯曲劲度系数，由材料的弹性性质和薄片厚度决定。这里我们忽略了薄片的拉伸。

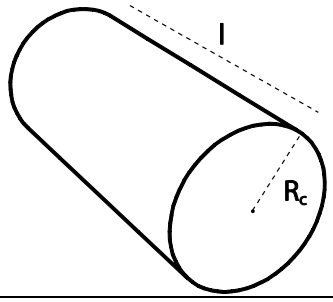


图 2 弹性片卷成半径为R_c、长度为 l 的圆筒的示意图。

假设这样一个圆筒象图 1（b）所示那样被压缩。对于一个给定的压力(F)，偏离平衡位置的位移依赖于透明片的弹性。当所加压力在一定范围时，被压缩透明片圆筒的截面和田径场的形状一样，即由两直线、两个半径为 R_0 的半圆组成。可以证实， R_0 与外力间 F 有如下关系：

$R_0^2 = \frac{l\kappa\pi}{2F}$.	(2)

这里，F 用一台称量质量的电子秤测量，因此有 $F=mg$，这里 m 是电子秤显示的质量读数，g = 9.81 m/s^2。

实验装置（第一题）

在你的桌子上有以下物品（用于实验一）：

1、 挤压器（带一个压块）；如需要，可以查看单独给出的使用说明。
2、 一个量程为 5000 克的电子秤，请参见单独给出的使用说明。
3、 若干透明片（所有透明片的尺寸都是 21cm×29.7cm，蓝色透明片厚度为 200μm，无色透明片厚度为 150μm）；如果需要更多透明片，请向工作人员提出。
4、 胶带
5、 剪刀
6、 带有刻度的直尺
7、 长方形木质平板（该板放在秤上，而圆筒放在该板上）

此装置的用法见图 3。通过旋转带翼螺母可使挤压器的上平板上、下移动，挤压器施加的作用力由电子秤测量。

重要：带翼螺母每转动 360 度，将移动 2mm.（在实验题一中，不使用小铝棒）

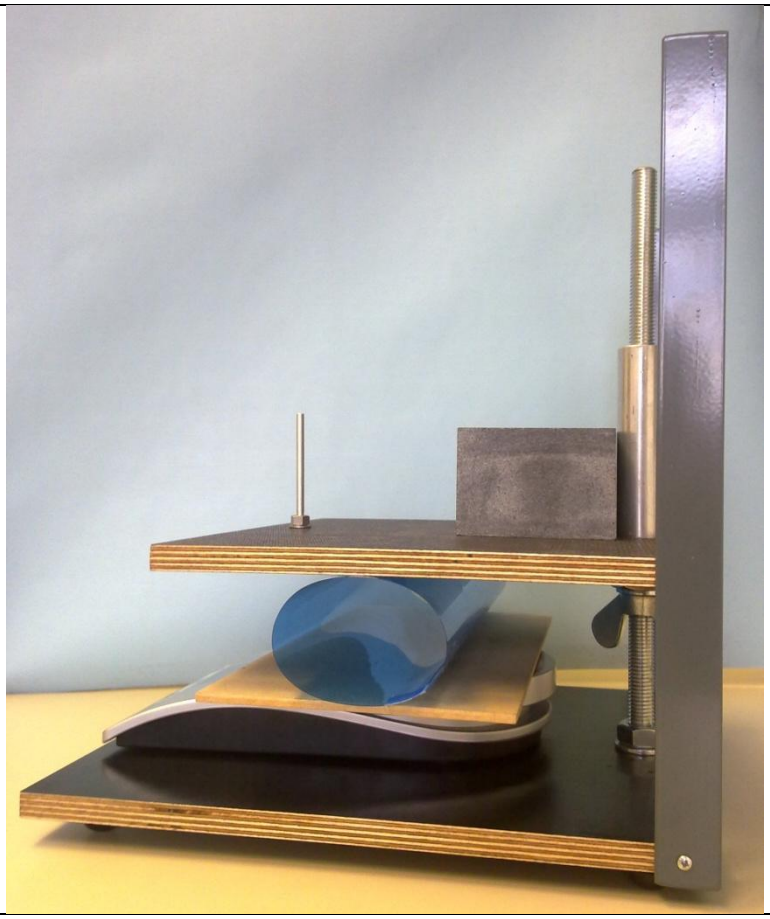


图 3、测量弯曲劲度系数的装置图。

任务 1

分别将两张蓝色透明片卷成圆筒状，其中一张沿长边卷，另一张沿短边卷，首尾边缘的交叠量以 0.5cm 为佳，卷好后用胶带固定。

（a） 对两种透明片圆筒弹簧，分别测量秤的质量读数与挤压器两个平板的间距的依赖关系。（1.9 分）

（b） 将你的测量结果分别画成适当的图。借助目测和直尺，在数据点中画出适当的直线，并由此定出两个透明片的劲度系数 κ。在图上标出近似关系（即田径场近似）成立的区域。估计当 $\frac{R_0}{R_c}$ 分别小于何值时“田径场近似”才成立；这里 R_c 是圆筒弹簧未被挤压时的半径。（4.3 分）

不需要进行误差分析。

任务 2

测量一张无色透明片的弯曲劲度系数。（2.8 分）

任务 3

弯曲劲度系数κ与杨氏模量Y和透明片厚度d的关系为

$\kappa = \frac{Yd^3}{12(1-\nu^2)}$,	(3)

这里ν是材料的泊松比；对大多数材料，$\nu \approx 1/3$。由前面的测量结果，分别确定蓝色和无色透明片的杨氏模量。（1.0 分）

实验试题二

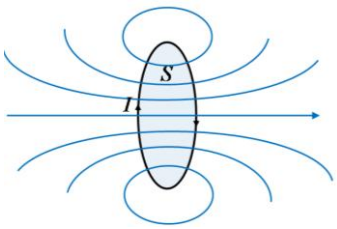
实验题共两道，均使用你桌上的装置来完成。你要在 5 小时内完成所有任务（一、二两道题）。

实验试题二、 磁体之间的作用力，稳定性和对称性的概念

概述

在面积为 S 闭合环路中流过电流 I 时，将产生大小为 $m = IS$ 的磁矩[见图 1（a）]。一个永磁体可以被看成大量小磁矩的集合，而每一个小磁矩又可以看成由一个电流环产生的。这个磁体的模型（安培模型）可以用图 1（b）来说明。总磁矩就是所有这些小磁矩之和，方向从南极指向北极。

(a)



(b)

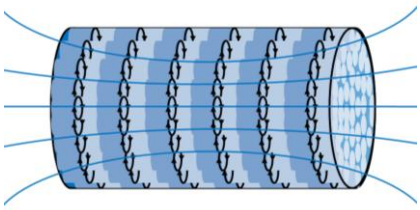


图 1.（a）电流环及其产生的磁场示意图。
（b）安培模型：磁体被看成是电流环的集合。

磁体之间的作用力

计算两个磁体之间的作用力是一件不容易的工作。我们知道，相同的磁极相互排斥，不同的磁极相互吸引。两个电流环之间的作用力依赖于电流环中电流的大小、电流环的形状以及它们的相互距离。如果我们使其中的一个电流环中的电流反向，两个电流环的作用力的大小不变，但方向相反。

在本问题中，你将通过实验研究一个环形磁体（磁环）和一个棒状磁体（磁棒）之间的作用力。我们感兴趣的是两个磁体的对称轴重合（见图 2）时的情况。磁棒能沿 z 轴从左向右移动，穿过磁环（见图 2），再继续向右。你的任务之一是测量上述两个磁铁之间的作用力随 z 变化的函数关系。两个磁铁的中心重合的点取为原点，即 $z = 0$.

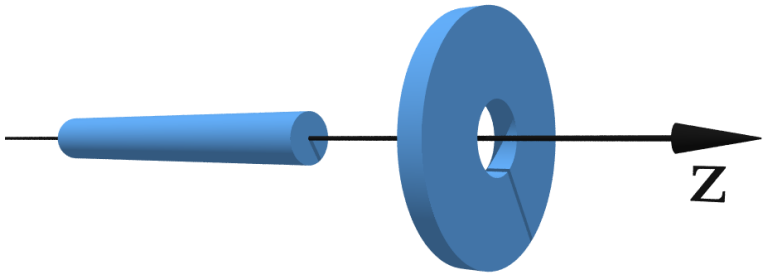


图 2. 磁棒和磁环的对称轴相重合。它们之间的作用力随着磁棒沿 *z* 轴移动而变化。

为了确保磁棒沿对称轴（*z* 轴）移动，磁环被固定在一个透明的圆柱内，圆柱沿 *z* 轴打有一细孔。于是，磁棒被限制在细孔内，只能沿 *z* 轴移动（见图 3）。两个磁体均沿 *z* 轴方向磁化。细孔确保两个磁体没有横向的相对位移。



图 3. 两个磁体及中空透明圆柱的照片；磁棒只能在透明圆柱体内的细孔中移动。

实验装置（第二题）

你的桌上应放有下列部件（用于第二题）：

1. 挤压器（包括一个压块），如有必要可查阅另备的说明书。
2. 量程为 5000g 的电子秤（具备去除皮重的功能，如有必要可查阅另备的说明书。）
3. 一个中空的透明圆筒，其中一端内置一个环形磁铁
4. 一个柱形磁铁
5. 一个细木棍（可用来将柱形磁铁推出透明圆筒）

用此装置测量磁体之间作用力的方法如图 4 所示。相对于实验题一，需要将挤压器的上平板翻转过来。挤压器上平板上的细铝棒是用来在改变柱形磁铁在透明圆筒内圆孔中的位置。电子秤用来测作用力（显示的是质量）。挤压器的上平板可通过转动带翼螺母上下移动。**重要指示：带翼螺母每转过 360 度后移动 2mm。**



图 4 实验装置及其用于测量磁体间作用力时的使用方法。

任务 1：

假设 Z-轴如图 2 一样取在水平面内，请借助手和木棍定性地确定两个磁铁之间的所有平衡位置，并在答题纸上将他们画出来。答题纸上已经给出了一个稳定平衡位置的表示方法，你要按照这个方法来画出其它所有平衡位置，在 S 上画圈来标记稳定平衡，在 U 上画圈来标记非稳定平衡，用阴影来区分磁铁的极性。（2.5 分）

任务 2：

使用所给实验装置测量不同 Z 坐标下两个磁铁之间的作用力。令 Z 轴的正方向指向透明圆筒内（沿正方向的作用力是正值）。对于磁矩平行的各种配置，作用力用 $F_{\uparrow\uparrow}(z)$ 标记，磁矩反平行则用 $F_{\uparrow\downarrow}(z)$ 标记。**重要指示：忽略磁棒的质量（即忽略重力），利用磁铁之间作用力的对称性测量曲线的不同部分。**如果你通过分析，发现了作用力的任何对称性，就在答题纸上写出它们。在答题纸上写出测量值，并在每一个记录表旁，仿照给出的示例，画出与该表对应的磁铁配置。（3.0 分）

任务 3：

利用任务 2 的测量值，在毫米坐标纸上详细画出作用力 $F_{\uparrow\uparrow}(z)$ 在 $z>0$ 范围的函数

依赖关系。分别画出曲线 $F_{\uparrow\uparrow}(z)$（沿 Z 轴的正向和反向）和 $F_{\uparrow\downarrow}(z)$（沿 Z 轴的正向和反向）的曲线示意图。在每一个曲线示意图上标记每一个稳定平衡点的位置，并画出相应的磁铁位置及极性配置图（象任务 1 的示例一样）。（4.0 分）

任务 4：

如果我们不忽略棒型磁铁的质量，当 Z 轴垂直设置时，如果平衡位置总数会增加，请在答题纸上画新增加的所有平衡位置。（0.5 分）

北京大学物理学院 荀坤 王若鹏 陈晓林 译

Solution - Image of a charge

Solution of Task 1

Task 1a)

As the metallic sphere is grounded, its potential vanishes, V=0.

Task1b)

Let us consider an arbitrary point B on the surface of the sphere as depicted in Fig. 1.

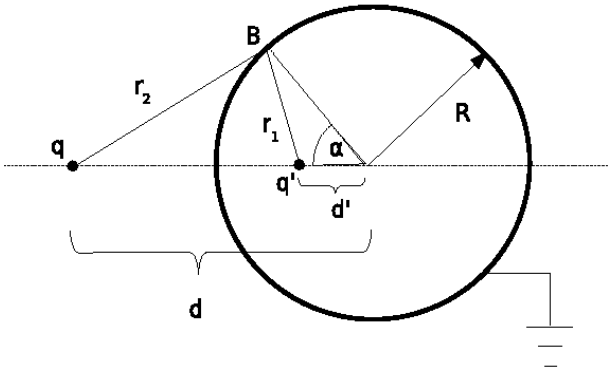


Fig 1. The potential at point *B* is zero.

The distance of point *B* from the charge q' is

$$r_1 = \sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos\alpha} \qquad (1)$$

whereas the distance of the point B from the charge q is given with the expression

$$r_2 = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos\alpha} \qquad (2)$$

The electric potential at the point B is

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r_1}\right) \qquad (3)$$

This potential must vanish,

$$\frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r_1} = 0 \qquad (4)$$

i.e. its numerical value is 0 V.

Combining (1), (2) and (3) we obtain

$$R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 (R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\alpha) \quad (5)$$

As the surface of the sphere must be equipotential, the condition (5) must be satisfied for every angle α what leads to the following results

$$d^2 + R^2 = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 (R^2 + d'^2) \quad (6)$$

and

$$dR = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 (d'R) \quad (7)$$

By solving of (6) and (7) we obtain the expression for the distance d' of the charge q' from the center of the sphere

$$d' = \frac{R^2}{d} \quad (8)$$

and the size of the charge q'

$$q' = -q\frac{R}{d} \quad (9)$$

Task 1c)

Finally, the magnitude of force acting on the charge q is

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 Rd}{\left(d^2 - R^2\right)^2} \quad (10)$$

The force is apparently **attractive.**

Solution of Task 2

Task 2a)

The electric field at the point A amounts to

$$\vec{E}_A = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\frac{R}{d}}{\left(r - d + \frac{R^2}{d}\right)^2} \right) \hat{r} \qquad (11)$$

Task 2b)

For very large distances r we can apply approximate formula $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$ to the expression (11) what leads us to

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{R}{d}\right) q}{r^2} \hat{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q\frac{R}{d}\left(d - \frac{R^2}{d}\right)}{r^3} \hat{r} \qquad (12)$$

In general a grounded metallic sphere cannot completely screen a point charge *q* at a distance *d* (even in the sense that its electric field would decrease with distance faster than $1/r^2$) and the dominant dependence of the electric field on the distance *r* is as in standard Coulomb law.

Task 2c)

In the limit $d \to R$ the electric field at the point *A* vanishes and the grounded metallic sphere screens the point charge completely.

Solution of Task 3

Task 3a)

Let us consider a configuration as in Fig. 2.

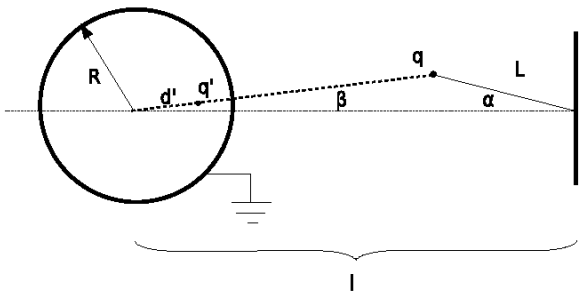


Fig 2. The pendulum formed by a charge near a grounded metallic sphere.

The distance of the charge q from the center of the sphere is

$$d = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL\cos\alpha}$$	(13)

The magnitude of the electric force acting on the charge q is

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(d-d')^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 Rd}{(d^2-R^2)^2}$$	(14)

From which we have

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R\sqrt{l^2+L^2-2lL\cos\alpha}}{\left(l^2+L^2-2lL\cos\alpha-R^2\right)^2}$$	(15)

Task 3b)

The direction of the vector of the electric force (17) is described in Fig. 3.

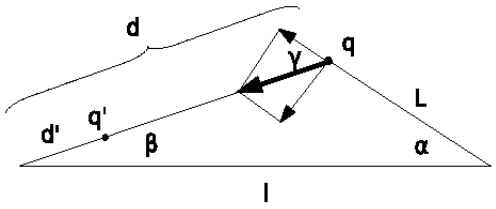


Fig 3. The direction of the force *F*.

The angles α and β are related as

$$L\sin\alpha = d\sin\beta$$	(16)

whereas for the angle γ the relation γ=α+β is valid. The component of the force perpendicular to the thread is F sin γ, that is ,

$$F_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R\sqrt{l^2+L^2-2lL\cos\alpha}}{\left(l^2+L^2-2lL\cos\alpha-R^2\right)^2}\sin(\alpha+\beta)$$ where $$\beta = \arcsin\left(\frac{L}{\sqrt{L^2+l^2-2Ll\cos\alpha}}\sin\alpha\right)$$	(17)

Task 3c)

The equation of motion of the mathematical pendulum is

$mL\ddot{\alpha} = -F_{\perp}$	(18)

As we are interested in small oscillations, the angle α is small, i.e. for its value in radians we have α much smaller than 1. For a small value of argument of trigonometric functions we have approximate relations sin x $\approx$ x and cos x $\approx$ 1-$x^2/2$. So for small oscillations of the pendulum we have $\beta \approx \alpha L/(l-L)$ and $\gamma \approx l\alpha/(l-L)$.

Combining these relations with (13) we obtain

$mL\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 Rd}{\left(d^2-R^2\right)^2}\left(1+\frac{L}{d}\right)\alpha = 0$	(19)

Where $d = l - L$ what leads to

$\omega = \frac{q}{d^2-R^2}\sqrt{\frac{Rd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mL}\left(1+\frac{L}{d}\right)} = \\ = \frac{q}{(l-L)^2-R^2}\sqrt{\frac{Rl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mL}}$	(20)

Solution of Task 4

First we present a solution based on the definition of the electrostatic energy of a collection of charges.

Task 4a)

The total energy of the system can be separated into the electrostatic energy of interaction of the external charge with the induced charges on the sphere, $E_{el,1}$, and the electrostatic energy of mutual interaction of charges on the sphere, $E_{el,2}$, i.e.

$E_{el} = E_{el,1} + E_{el,2}$	(21)

Let there be *N* charges induced on the sphere. These charges q_j are located at points $\vec{r}_j$, $j = 1,\ldots,N$ on the sphere. We use the definition of the image charge, i.e., the potential on the surface of the sphere from the image charge is identical to the potential arising from the induced charges:

$\frac{q'}{\left\|\vec{r}-\vec{d}'\right\|}=\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{\left\|\vec{r}_j-\vec{r}\right\|},$	(22)

where $\vec{r}$ is a vector on the sphere and $\vec{d}'$ denotes the vector position of the image charge. When $\vec{r}$ coincides with some $\vec{r}_i$, then we just have

$\frac{q'}{\left\|\vec{r}_i-\vec{d}'\right\|}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{\left\|\vec{r}_j-\vec{r}_i\right\|}.$	(23)

From the requirement that the potential on the surface of the sphere vanishes we have

$\frac{q'}{\left\|\vec{r}-\vec{d}'\right\|}+\frac{q}{\left\|\vec{r}-\vec{d}\right\|}=0,$	(24)

where $\vec{d}$ denotes the vector position of the charge $\vec{q}$ ($\vec{r}$ is on the sphere).

For the interaction of the external charge with the induced charges on the sphere we have

$E_{el,1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left\|\vec{r}_i-\vec{d}\right\|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\left\|\vec{d}'-\vec{d}\right\|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{d-d'}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2}$	(25)

Here the first equality is the definition of this energy as the sum of interactions of the charge *q* with each of the induced charges on the surface of the sphere. The second equality follows from (21).

In fact, the interaction energy $E_{el,1}$ follows directly from the definition of an image charge.

Task 4b)

The energy of mutual interactions of induced charges on the surface of the sphere is given with

$$E_{el,2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{q'}{\left|\vec{r}_i - \vec{d}'\right|} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{q}{\left|\vec{r}_i - \vec{d}\right|} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\left|\vec{d}' - \vec{d}\right|} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{d-d'} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R}{d^2 - R^2} \qquad (26)$$

Here the second line is obtained using (22). From the second line we obtain the third line applying (23), whereas from the third line we obtain the fourth using (22) again.

Task 4c)

Combining expressions (19) and (20) with the quantitative results for the image charge we finally obtain the total energy of electrostatic interaction

$$E_{el}(d) = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R}{d^2 - R^2} \qquad (27)$$

An alternative solution follows from the definition of work. By knowing the integral

$$\int_d^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2 - R^2\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{d^2 - R^2} \qquad (28)$$

We can obtain the total energy in the system by calculating the work needed to bring the charge *q* from infinity to the distance *d* from the center of the sphere:

$$E_{el}(d) = -\int_\infty^d F(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_d^\infty F(\vec{x})\,d\vec{x} =$$

$$= \int_d^\infty (-)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R x}{\left(x^2 - R^2\right)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R}{d^2 - R^2} \qquad (29)$$

This solves Task 4c).

The electrostatic energy between the charge *q* and the sphere must be equal to the energy between the charges *q* and *q'* according to the definition of the image charge:

$E_{el,1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(d-d')} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2}$	(30)

This solves Task 4a).

From this we immediately have that the electrostatic energy among the charges on the sphere is:

$E_{el,2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2}.$	(31)

This solves Task 4b).

Solution - Chimney physics

This problem was inspired and posed by using the following two references:

- W.W. Christie, *Chimney design and theory*, D. Van Nostrand Company, New York, 1902.
- J. Schlaich, R. Bergermann, W. Schiel, G. Weinrebe, *Design of Commercial Solar Updraft Tower Systems — Utilization of Solar Induced Convective Flows for Power Generation*, Journal of Solar Energy Engineering 127, 117 (2005).

Solution of Task 1

a) What is the minimal height of the chimney needed in order that the chimney functions efficiently, so that it can release all of the produced gas in the atmosphere?

Let $p(z)$ denote the pressure of air at height z; then, according to one of the assumptions $p(z) = p(0) - \rho_{Air} g z$, where $p(0)$ is the atmospheric pressure at zero altitude.

Throughout the chimney the Bernoulli law applies, that is, we can write

$\frac{1}{2}\rho_{Smoke} v(z)^2 + \rho_{Smoke} g z + p_{Smoke}(z) = const.,$	(1)

where $p_{Smoke}(z)$ is the pressure of smoke at height z, ρ_{Smoke} is its density, and $v(z)$ denotes the velocity of smoke; here we have used the assumption that the density of smoke does not vary throughout the chimney. Now we apply this equation at two points, (i) in the furnace, that is at point $z = -\varepsilon$, where ε is a negligibly small positive number, and (ii) at the top of the chimney where $z = h$ to obtain:

$\frac{1}{2}\rho_{Smoke} v(h)^2 + \rho_{Smoke} g h + p_{Smoke}(h) \approx p_{Smoke}(-\varepsilon)$	(2)

On the right hand side we have used the assumption that the velocity of gases in the furnace is negligible (and also $-\rho_{Smoke} g \varepsilon \approx 0$).

We are interested in the minimal height at which the chimney will operate. The pressure of smoke at the top of the chimney has to be equal or larger than the pressure of air at altitude h; for minimal height of the chimney we have $p_{Smoke}(h) \approx p(h)$. In the furnace we can use $p_{Smoke}(-\varepsilon) \approx p(0)$. The Bernoulli law applied in the furnace and at the top of the chimney [Eq. (2)] now reads

$\frac{1}{2}\rho_{Smoke} v(h)^2 + \rho_{Smoke} g h + p(h) \approx p(0).$	(3)

From this we get

$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1\right)}.$	(4)

The chimney will be efficient if all of its products are released in the atmosphere, i.e.,

$v(h) \geq \frac{B}{A}$,	(5)

from which we have

$h \geq \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{1}{\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}}-1}$.	(6)

We can treat the smoke in the furnace as an ideal gas (which is at atmospheric pressure $p(0)$ and temperature T_{Smoke}). If the air was at the same temperature and pressure it would have the same density according to our assumptions. We can use this to relate the ratio ρ_{Air}/ρ_{Smoke} to T_{Smoke}/T_{Air} that is,

$\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}}$, and finally	(7)
$h \geq \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{T_{Air}}{T_{Smoke}-T_{Air}} = \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{T_{Air}}{\Delta T}$.	(8)

For minimal height of the chimney we use the equality sign.

b) How high should the chimney in warm regions be?

$\frac{h(30)}{h(-30)} = \frac{\frac{T(30)}{T_{Smoke}-T(30)}}{\frac{T(-30)}{T_{Smoke}-T(-30)}}; h(30) = 145m$.	(9)

c) How does the velocity of the gases vary along the height of the chimney?

The velocity is constant,

$v = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}}-1\right)} = \sqrt{2gh\left(\frac{T_{Smoke}}{T_{Air}}-1\right)} = \sqrt{2gh\frac{\Delta T}{T_{Air}}}$.	(10)

This can be seen from the equation of continuity $Av = const.$ (ρ_{Smoke} is constant). It has a sudden jump from approximately zero velocity to this constant value when the gases enter the chimney from the furnace. In fact, since the chimney operates at minimal height this constant is equal to B, that is $v = B/A$.

d) At some height *z,* from the Bernoulli equation one gets

$p_{smoke}(z) = p(0) - (\rho_{Air} - \rho_{Smoke})gh - \rho_{Smoke}gz$.	(11)

Thus the pressure of smoke suddenly changes as it enters the chimney from the furnace and acquires velocity.

Solution of Task 2

a) The kinetic energy of the hot air released in a time interval Δt is

$E_{kin} = \frac{1}{2}(Av\Delta t\rho_{Hot})v^2 = Av\Delta t\rho_{Hot} gh\frac{\Delta T}{T_{Atm}},$	(12)

Where the index "Hot" refer to the hot air heated by the Sun. If we denote the mass of the air that exits the chimney in unit time with $w = Av\rho_{Hot}$, then the power which corresponds to kinetic energy above is

$P_{kin} = wgh\frac{\Delta T}{T_{Air}}.$	(13)

This is the maximal power that can be obtained from the kinetic energy of the gas flow.

The Sun power used to heat the air is

$P_{Sun} = GS = wc\Delta T.$	(14)

The efficiency is evidently

$\eta = \frac{P_{kin}}{P_{Sun}} = \frac{gh}{cT_{Atm}}.$	(15)

b) The change is apparently linear.

Solution of Task 3

a) The efficiency is

$\eta = \frac{gh}{cT_{Atm}} = 0.0064 = 0.64\%.$	(16)

b) The power is

$P = GS\eta = G(D/2)^2\pi\eta = 45\,\text{kW}.$	(17)

c) If there are 8 sunny hours per day we get 360kWh.

Solution of Task 4

The result can be obtained by expressing the mass flow of air w as

$w = Av\rho_{Hot} = A\sqrt{2gh\frac{\Delta T}{T_{Air}}}\rho_{Hot}$	(18)
$w = \frac{GS}{c\Delta T}$	(19)

which yields

$\Delta T = \left(\frac{G^2S^2T_{Atm}}{A^2c^2\rho_{Hot}^2 2gh}\right)^{1/3} \approx 9.1\,\text{K}.$	(20)

From this we get

$w = 760\,\text{kg/s}.$	(21)

Solution - model of an atomic nucleus

Solution of Task 1

a) In the SC-system, in each of 8 corners of a given cube there is one unit (atom, nucleon, etc.), but it is shared by 8 neighboring cubes – this gives a total of one nucleon per cube. If nucleons are touching, as we assume in our simplified model, then $a = 2r_N$ is the cube edge length a. The volume of one nucleon is then

$$V_N = \frac{4}{3} r_N^3 \pi = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi = \frac{4a^3}{3 \cdot 8}\pi = \frac{\pi}{6} a^3 \qquad (1)$$

from which we obtain

$$f = \frac{V_N}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52 \qquad (2)$$

b) The mass density of the nucleus is:

$$\rho_m = f \frac{m_N}{V_N} = 0.52 \cdot \frac{1.67 \cdot 10^{-27}}{4/3 \cdot \left(0.85 \cdot 10^{-15}\right)^3 \pi} \approx 3.40 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \qquad (4)$$

c) Taking into account the approximation that the number of protons and neutrons is approximately equal, for charge density we get:

$$\rho_c = \frac{f}{2}\frac{e}{V_N} = \frac{0.52}{2} \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{4/3 \cdot \left(0.85 \cdot 10^{-15}\right)^3 \pi} \approx 1.63 \cdot 10^{25} \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \qquad (5)$$

The number of nucleons in a given nucleus is *A*. The total volume occupied by the nucleus is:

$$V = \frac{AV_N}{f}, \qquad (6)$$

which gives the following relation between radii of nucleus and the number of nucleons:

$$R = r_N \left(\frac{A}{f}\right)^{1/3} = \frac{r_N}{f^{1/3}} A^{1/3} = \frac{0.85}{0.52^{1/3}} A^{1/3} = 1.06\,\text{fm} \cdot A^{1/3}. \qquad (7)$$

The numerical constant (1.06 fm) in the equation above will be denoted as r_0 in the sequel.

Solution of Task 2

First one needs to estimate the number of surface nucleons. The surface nucleons are in a spherical shell of width $2r_N$ at the surface. The volume of this shell is

$$V_{surface} = \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}(R-2r_N)^3\pi =$$
$$= \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}R^3\pi + \frac{4}{3}\pi 3R^2 2r_N - \frac{4}{3}\pi 3R4r_N^2 + \frac{4}{3}\pi 8r_N^3$$
$$= 8\pi Rr_N(R-2r_N) + \frac{4}{3}\pi 8r_N^3 =$$
$$= 8\pi(R^2r_N - 2Rr_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3)$$

(8)

The number of surface nucleons is:

$$A_{surface} = f\frac{V_{surface}}{V_N} = f\frac{8\pi(R^2r_N - 2Rr_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3)}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} =$$
$$= f6\left(\left(\frac{R}{r_N}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r_N}\right) + \frac{4}{3}\right) =$$
$$= f6\left(\left(\frac{A}{f}\right)^{2/3} - 2\left(\frac{A}{f}\right)^{1/3} + \frac{4}{3}\right) =$$
$$= 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f =$$
$$= 6^{2/3}\pi^{1/3}A^{2/3} - 2\cdot 6^{1/3}\pi^{2/3}A^{1/3} + \frac{4}{3}\pi \approx$$
$$\approx 4.84A^{2/3} - 7.80A^{1/3} + 4.19.$$

(9)

The binding energy is now:

$$E_b = (A - A_{surface})a_V + A_{surface}\frac{a_V}{2} =$$
$$= Aa_V - A_{surface}\frac{a_V}{2} =$$
$$= Aa_V - (3f^{1/3}A^{2/3} - 6f^{2/3}A^{1/3} + 4f)a_V =$$
$$= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V =$$
$$= (15.8A - 38.20A^{2/3} + 61.58A^{1/3} - 33.09)\,\mathrm{MeV}$$

(10)

Solution of Task 3 - Electrostatic (Coulomb) effects on the binding energy

a) Replacing Q_0 with Ze gives the electrostatic energy of the nucleus as:

$$U_c = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

(12)

The fact that each proton is not acting upon itself is taken into account by replacing Z^2 with $Z(Z-1)$:

$U_c = \dfrac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$	(13)

b) In the formula for the electrostatic energy we should replace R with $r_N f^{-1/3} A^{1/3}$ to obtain

$\Delta E_b = -\dfrac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = -\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\cdot 1.31\times 10^{-13}\ \mathrm{J}$ $= -\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\cdot 0.815\ \mathrm{MeV} \approx -0.204\mathrm{A}^{5/3}\mathrm{MeV} + 0.409\mathrm{A}^{2/3}\ \mathrm{MeV}$	(14)

where *Z≈A/2* has been used. The Coulomb repulsion reduces the binding energy, hence the negative sign before the first (main) term. The complete formula for binding energy now gives:

$E_b = Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \dfrac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\left(\dfrac{A^{5/3}}{4} - \dfrac{A^{2/3}}{2}\right)$	(15)

Solution of Task 4 - Fission of heavy nuclei

a) The kinetic energy comes from the difference of binding energies (2 small nuclei – the original large one) and the Coulomb energy between two smaller nuclei (with *Z/2=A/4* nucleons each):

$E_{kin}(d) = 2E_b\left(\dfrac{A}{2}\right) - E_b(A) - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{A^2e^2}{4\cdot 4\cdot d} =$ $= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3}-1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3}-1)$ $-4fa_V - \dfrac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\dfrac{A^{5/3}}{4}\left(2^{-2/3}-1\right) - \dfrac{A^{2/3}}{2}\left(2^{1/3}-1\right)\right]$ $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{A^2e^2}{16d}$	(16)

(notice that the first term, Aa_v, cancels out).

b) The kinetic energy when $d = 2R(A/2)$ is given with:

$E_{kin} = 2E_b\left(\dfrac{A}{2}\right) - E_b(A) - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2^{1/3}A^2e^2}{16\cdot 2r_N A^{1/3} f^{-1/3}} =$ $= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3}-1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3}-1)$ $-4fa_V - \dfrac{e^2 f^{1/3}}{\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\dfrac{3}{80}(2^{-2/3}-1) + \dfrac{2^{1/3}}{128}\right]A^{5/3} - \dfrac{e^2 f^{1/3}}{\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\dfrac{3}{40}(2^{1/3}-1)\right]A^{2/3} =$ $= (0.02203A^{5/3} - 10.0365A^{2/3} + 36.175A^{1/3} - 33.091)\mathrm{MeV}$	(17)

Numerically one gets:

A=100 … E_{kin}= -33.95 MeV,

A=150 … E_{kin}= -30.93 MeV,

A=200 … E_{kin}= -14.10 MeV,
A=250 … E_{kin}= +15.06 MeV.

In our model, fission is possible when $E_{kin}(d = 2R(A/2)) \geq 0$. From the numerical evaluations given above, one sees that this happens approximately halfway between A=200 and A=250 – a rough estimate would be A≈225. Precise numerical evaluation of the equation:

$$E_{kin} = (0.02203A^{5/3} - 10.0365A^{2/3} + 36.175A^{1/3} - 33.091)\text{MeV} \geq 0 \quad (18)$$

gives that for $A \geq 227$ fission is possible.

Solution of Task 5 – Transfer reactions

Task 5a) This part can be solved by using either non-relativistic or relativistic kinematics.

Non-relativistic solution

First one has to find the amount of mass transferred to energy in the reaction (or the energy equivalent, so-called Q-value):

$$\begin{aligned}\Delta m &= (\text{total mass})_{\text{after reaction}} - (\text{total mass})_{\text{before reaction}} = \\ &= (57.93535 + 12.00000)\ \text{a.m.u.} - (53.93962 + 15.99491)\ \text{a.m.u.} = \\ &= 0.00082\ \text{a.m.u.} = \\ &= 1.3616 \cdot 10^{-30}\ \text{kg.}\end{aligned} \quad (19)$$

Using the Einstein formula for equivalence of mass and energy, we get:

$$\begin{aligned}Q &= (\text{total kinetic energy})_{\text{after reaction}} - (\text{total kinetic energy})_{\text{before reaction}} = \\ &= -\Delta m \cdot c^2 = \\ &= -1.3616 \cdot 10^{-30} \cdot 299792458^2 = -1.2237 \cdot 10^{-13}\ \text{J}\end{aligned} \quad (20)$$

Taking into account that 1 MeV is equal to $1.602 \cdot 10^{-13}$ J, we get:

$$Q = -1.2237 \cdot 10^{-13} / 1.602 \cdot 10^{-13} = -0.761\,\text{MeV} \quad (21)$$

This exercise is now solved using the laws of conservation of energy and momentum. The latter gives (we are interested only for the case when ^{12}C and ^{16}O are having the same direction so we don't need to use vectors):

$$m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O}) = m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C}) + m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni}) \quad (22)$$

while the conservation of energy gives:

$$E_k(^{16}\text{O}) + Q = E_k(^{12}\text{C}) + E_k(^{58}\text{Ni}) + E_x(^{58}\text{Ni}) \quad (23)$$

where $E_x(^{58}\mathrm{Ni})$ is the excitation energy of ^{58}Ni, and Q is calculated in the first part of this task. But since ^{12}C and ^{16}O have the same velocity, conservation of momentum reduced to:

$$\left[m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]v\left(^{16}\mathrm{O}\right)=m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)v\left(^{58}\mathrm{Ni}\right) \tag{24}$$

Now we can easily find the kinetic energy of ^{58}Ni:

$$\begin{aligned}E_k\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)&=\frac{m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)v^2\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)}{2}=\frac{\left[m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)v\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)\right]^2}{2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)}=\\&=\frac{\left[\left[m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]v\left(^{16}\mathrm{O}\right)\right]^2}{2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)}=\\&=E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left(^{16}\mathrm{O}\right)}\end{aligned} \tag{25}$$

and finally the excitation energy of ^{58}Ni:

$$\begin{aligned}E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)&=E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)+Q-E_k\left(^{12}\mathrm{C}\right)-E_k\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)=\\&=E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)+Q-\frac{m\left(^{12}\mathrm{C}\right)v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)}{2}-E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left(^{16}\mathrm{O}\right)}=\\&=Q+E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)-E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot\frac{m\left(^{12}\mathrm{C}\right)}{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)}-E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left(^{16}\mathrm{O}\right)}=\\&=Q+E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)\left[1-\frac{m\left(^{12}\mathrm{C}\right)}{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)}-\frac{\left[m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left(^{16}\mathrm{O}\right)}\right]=\\&=Q+E_k\left(^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]\cdot\left[m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)-m\left(^{16}\mathrm{O}\right)+m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right]}{m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left(^{16}\mathrm{O}\right)}\end{aligned} \tag{26}$$

Note that the first bracket in numerator is approximately equal to the mass of transferred particle (the ^{4}He nucleus), while the second one is approximately equal to the mass of target nucleus ^{54}Fe. Inserting the numbers we get:

$$\begin{aligned}E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)&=-0.761+50\cdot\frac{(15.99491-12.)(57.93535-15.99491+12.)}{57.93535\cdot15.99491}=\\&=10.866\,\mathrm{MeV}\end{aligned} \tag{27}$$

Relativistic solution

In the relativistic version, solution is found starting from the following pair of equations (the first one is the law of conservation of energy and the second one the law of conservation of momentum):

$$m\left(^{54}\mathrm{Fe}\right)\cdot c^2+\frac{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}}=\frac{m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-v^2\left(^{12}\mathrm{C}\right)/c^2}}+\frac{m^*\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-v^2\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)/c^2}} \tag{28}$$

$$\frac{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot v\left(^{16}\mathrm{O}\right)}{\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}}=\frac{m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\cdot v\left(^{12}\mathrm{C}\right)}{\sqrt{1-v^2\left(^{12}\mathrm{C}\right)/c^2}}+\frac{m^*\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot v\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)}{\sqrt{1-v^2\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)/c^2}}$$

All the masses in the equations are the rest masses; the ^{58}Ni is NOT in its ground-state, but in one of its excited states (having the mass denoted with m^*). Since ^{12}C and ^{16}O have the same velocity, this set of equations reduces to:

$$m\left(^{54}\mathrm{Fe}\right)+\frac{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)}{\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}}=\frac{m^*\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)}{\sqrt{1-v^2\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)/c^2}}$$

$$\frac{\left(m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right)\cdot v\left(^{16}\mathrm{O}\right)}{\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}}=\frac{m^*\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot v\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)}{\sqrt{1-v^2\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)/c^2}} \qquad (29)$$

Dividing the second equation with the first one gives:

$$v\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)=\frac{\left(m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right)\cdot v\left(^{16}\mathrm{O}\right)}{\left(m\left(^{16}\mathrm{O}\right)-m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right)+m\left(^{54}\mathrm{Fe}\right)\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}} \qquad (30)$$

The velocity of projectile can be calculated from its energy:

$$E_{kin}\left(^{16}\mathrm{O}\right)=\frac{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}}-m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2$$

$$\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}=\frac{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{E_{kin}\left(^{16}\mathrm{O}\right)+m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}$$

$$v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2=1-\left(\frac{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{E_{kin}\left(^{16}\mathrm{O}\right)+m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}\right)^2$$

$$v\left(^{16}\mathrm{O}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{E_{kin}\left(^{16}\mathrm{O}\right)+m\left(^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}\right)^2}\cdot c \qquad (31)$$

For the given numbers we get:

$$v\left(^{16}\mathrm{O}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{15.99491\cdot 1.6605\cdot 10^{-27}\cdot\left(2.9979\cdot 10^8\right)^2}{50\cdot 1.602\cdot 10^{-13}+15.99491\cdot\left(2.9979\cdot 10^8\right)^2}\right)^2}\cdot c=$$

$$=\sqrt{1-0.99666^2}\cdot c=0.08172\cdot c=2.4498\cdot 10^7\ \mathrm{km/s} \qquad (32)$$

Now we can calculate:

$$v\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)=\frac{\left(15.99491-12.0\right)\cdot 2.4498\cdot 10^7\ \mathrm{km/s}}{\left(15.99491-12.0\right)+53.93962\sqrt{1-0.08172^2}}=1.6946\cdot 10^6\ \mathrm{km/s} \qquad (33)$$

The mass of ^{58}Ni in its excited state is then:

$$m^*\left(^{58}\mathrm{Ni}\right) = \left(m\left(^{16}\mathrm{O}\right) - m\left(^{12}\mathrm{C}\right)\right)\frac{\sqrt{1-v^2\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)/c^2}}{\sqrt{1-v^2\left(^{16}\mathrm{O}\right)/c^2}}\cdot\frac{v\left(^{16}\mathrm{O}\right)}{v\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)} =$$

$$= (15.99491 - 12.0)\frac{\sqrt{1-\left(1.6945\cdot10^6/2.9979\cdot10^8\right)^2}}{\sqrt{1-0.08172^2}}\cdot\frac{2.4498\cdot10^7}{1.6945\cdot10^6}\ \text{a.m.u.} =$$

$$= 57.9470\ \text{a.m.u.}$$

(34)

The excitation energy of ^{58}Ni is then:

$$E_x = \left[m^*\left(^{58}\mathrm{Ni}\right) - m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)\right]\cdot c^2 = \left(57.9470 - 57.93535\right)\cdot1.6605\cdot10^{-27}\left(2.9979\cdot10^8\right)^2 =$$

$$= 2.00722\cdot10^{-12}/1.602\cdot10^{-13}\ \mathrm{MeV/J} = 10.8636\ \mathrm{MeV}$$

(35)

The relativistic and non-relativistic results are equal within 2 keV so both can be considered as correct –we can conclude that at the given beam energy, relativistic effects are not important.

Task 5b) For gamma-emission from the static nucleus, laws of conservation of energy and momentum give:

$$E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right) = E_\gamma + E_{\mathrm{recoil}}$$
$$p_\gamma = p_{\mathrm{recoil}}$$

(36)

Gamma-ray and recoiled nucleus have, of course, opposite directions. For gamma-ray (photon), energy and momentum are related as:

$$E_\gamma = p_\gamma\cdot c$$

(37)

In part a) we have seen that the nucleus motion in this energy range is not relativistic, so we have:

$$E_{\mathrm{recoil}} = \frac{p_{\mathrm{recoil}}^2}{2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)} = \frac{p_\gamma^2}{2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)} = \frac{E_\gamma^2}{2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot c^2}$$

(38)

Inserting this into law of energy conservation Eq. (36), we get:

$$E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right) = E_\gamma + E_{\mathrm{recoil}} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot c^2}$$

(39)

This reduces to the quadratic equation:

$$E_\gamma^2 + 2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 \cdot E_\gamma + 2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right) = 0 \qquad (40)$$

which gives the following solution:

$$E_\gamma = \frac{-2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 + \sqrt{4\left(m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2\right)^2 + 8m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)}}{2} = \sqrt{\left(m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2\right)^2 + 2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)} - m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 \qquad (41)$$

Inserting numbers gives:

$$E_\gamma = 10.8633\,\mathrm{MeV} \qquad (42)$$

The equation (37) can also be reduced to an approximate equation before inserting numbers:

$$E_\gamma = E_x\left(1 - \frac{E_x}{2m\left(^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2}\right) = 10.8633\,\mathrm{MeV} \qquad (43)$$

The recoil energy is now easily found as:

$$E_{\mathrm{recoil}} = E_x\left(^{58}\mathrm{Ni}\right) - E_\gamma = 1.1\,\mathrm{keV} \qquad (44)$$

Due to the fact that nucleus emitting gamma-ray (^{58}Ni) is moving with the high velocity, the energy of gamma ray will be changed because of the Doppler effect. The relativistic Doppler effect (when source is moving towards observer/detector) is given with this formula:

$$f_{\mathrm{detector}} = f_{\gamma,\mathrm{emitted}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad (45)$$

and since there is a simple relation between photon energy and frequency *(E=hf)*, we get the similar expression for energy:

$$E_{\mathrm{detector}} = E_{\gamma,\mathrm{emitted}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad (46)$$

where $\beta = v/c$ and v is the velocity of emitter (the ^{58}Ni nucleus). Taking the calculated value of the ^{58}Ni velocity (equation 29) we get:

$$E_{\mathrm{detector}} = E_{\gamma,\mathrm{emitted}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 10.863\sqrt{\frac{1+0.00565}{1-0.00565}} = 10.925\,\mathrm{MeV} \qquad (47)$$

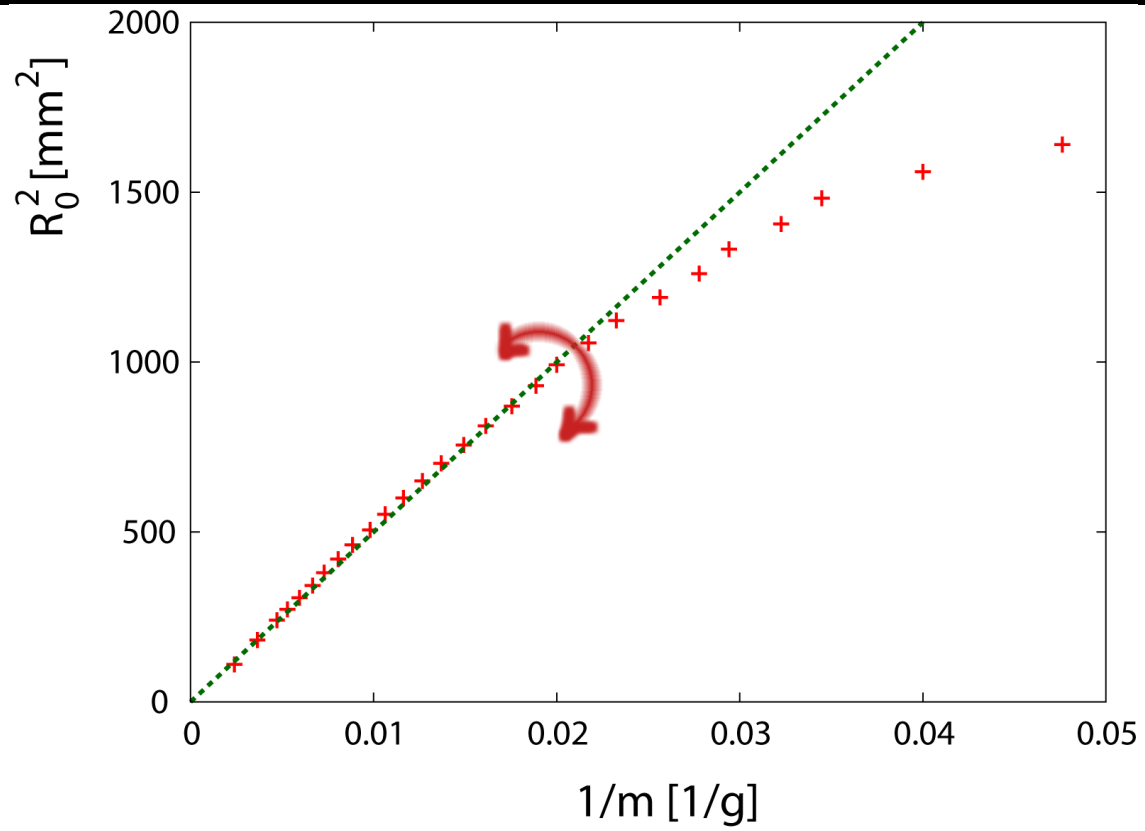
Solution: Exp. problem 1

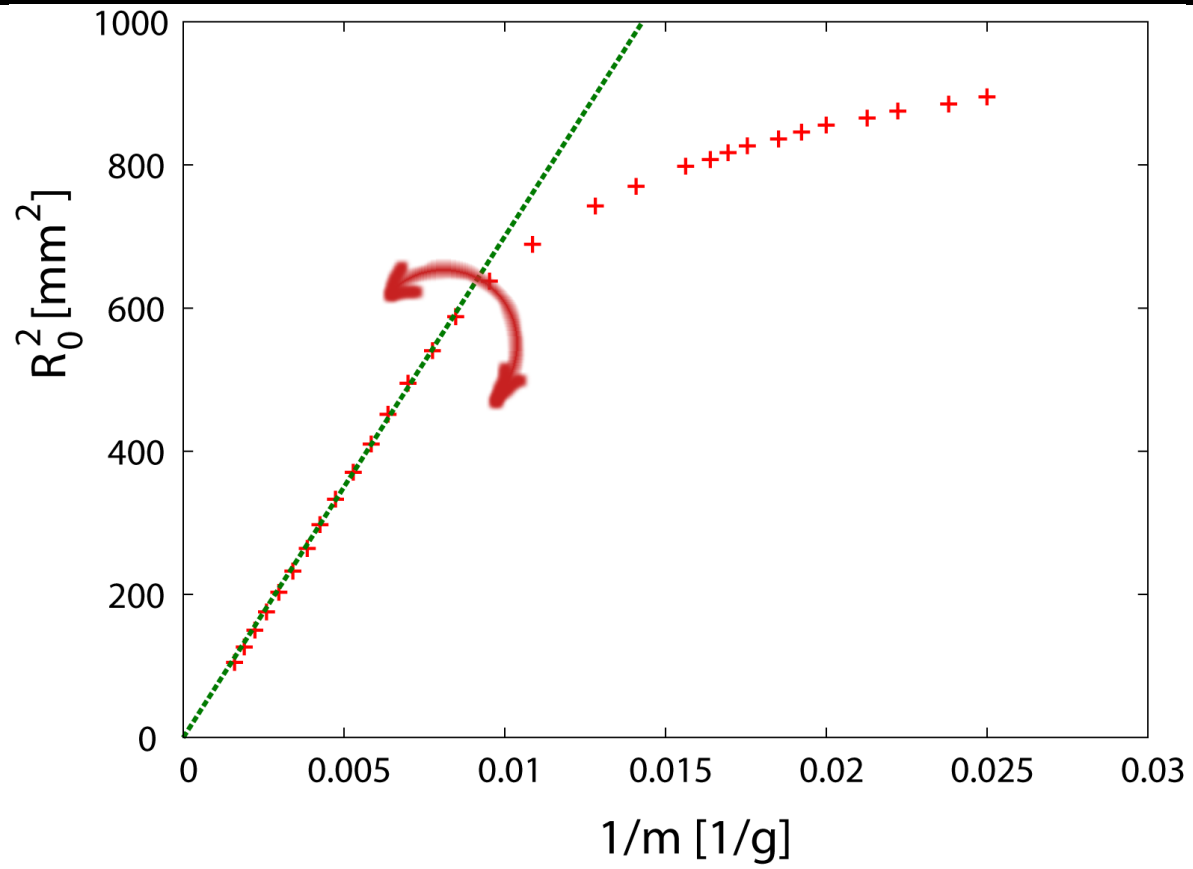
Task 1		Points
(a)		0.95

m[g]	R_0[mm]
21	40.5
25	39.5
29	38.5
31	37.5
34	36.5
36	35.5
39	34.5
43	33.5
46	32.5
50	31.5
53	30.5
57	29.5
62	28.5
67	27.5
73	26.5
79	25.5
86	24.5
94	23.5
102	22.5
113	21.5
124	20.5
137	19.5
150	18.5
168	17.5
189	16.5
212	15.5
274	13.5
417	10.5

Task 1		Points
(a)		0.95

m[g]	R_0[mm]
40	29.9
42	29.8
45	29.6
47	29.4
50	29.3
52	29.1
54	28.9
57	28.8
59	28.6
61	28.4
64	28.3
71	27.8
78	27.3
92	26.3
105	25.3
118	24.3
129	23.3
143	22.3
157	21.3
171	20.3
189	19.3
211	18.3
235	17.3
259	16.3
293	15.3
336	14.3
386	13.3
449	12.3

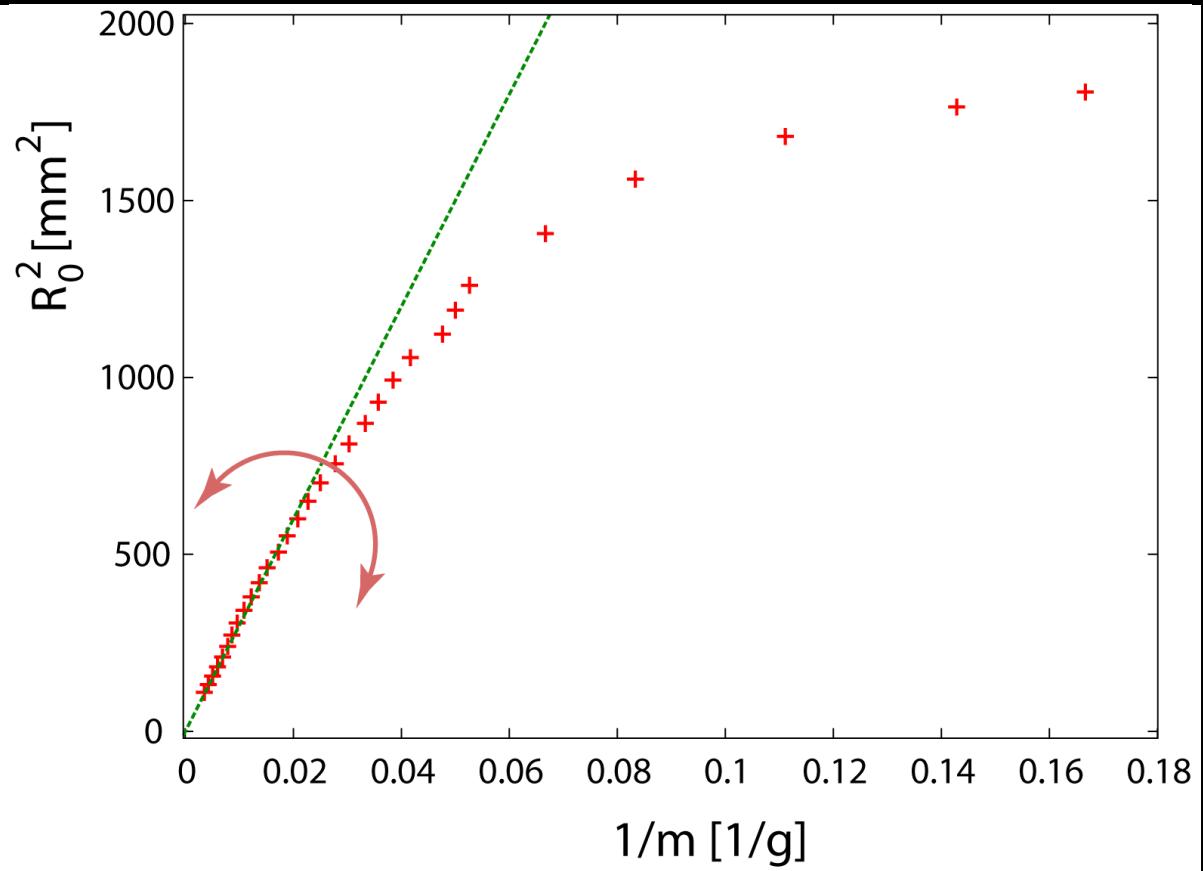
Task 1		Points
(b)	 $a = 50000\ g\ mm^2$	1.4

Task 1		Points
(b)	 $a = 70000\ \text{g mm}^2$	1.4

Task 1		Points
(b)	$\kappa = \frac{2ag}{\pi l} = 1.5$ mJ	0.5
	$\kappa = \frac{2ag}{\pi l} = 1.5$ mJ	0.5
	$\frac{R_0}{R_c} \leq 0.70$ $\qquad$ $\frac{R_0}{R_c} \leq 0.77$	0.5

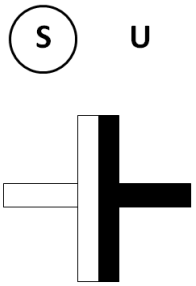
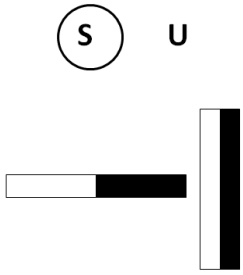
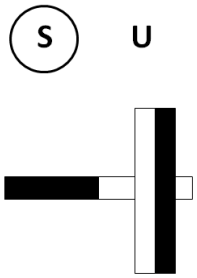
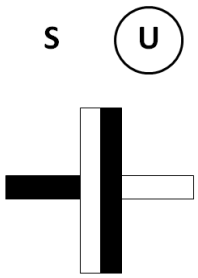
Task 2		Points
		0.9

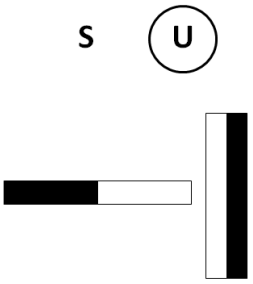
m[g]	R_0[mm]
6	42.5
7	42.
9	41.
12	39.5
15	37.5
19	35.5
20	34.5
21	33.5
24	32.5
26	31.5
28	30.5
30	29.5
33	28.5
36	27.5
40	26.5
44	25.5
48	24.5
53	23.5
58	22.5
66	21.5
73	20.5
82	19.5
92	18.5
104	17.5
116	16.5
127	15.5
145	14.5
168	13.5

Task 2		Points
	 $a = 27000\ \text{g mm}^2$	0.9

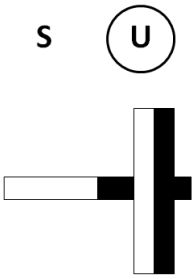
Task 2		Points
	$\kappa = 0.8$ mJ	1.0
Task 3		**Points**
	Young modulus of the blue foil: Y=2.0 GPa Y=2.0 GPa	0.6
	Young modulus of the colorless foil: Y=2.5 GPa	0.4
Total:		10

Solution - Exp. Problem 2

Task 1		Points
		0.25
		0.45
		0.45
		0.45



0.45



0.45

Task 2 — Points

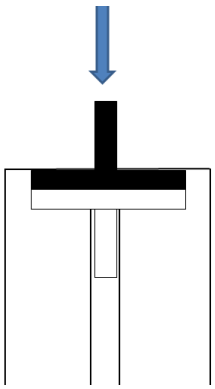
Symmetries that should be utilized in the measurements:

$F_{\uparrow\downarrow}(z) = -F_{\uparrow\downarrow}(-z)$
$F_{\uparrow\downarrow}(z) = -F_{\uparrow\uparrow}(z)$
From the two above one gets also $F_{\uparrow\uparrow}(z) = -F_{\uparrow\uparrow}(-z)$

0,6

By using the setup as it is, the whole curve can be measured by starting the measurements from three stable equilibrium points; the equilibrium point (z0) can be measured also by using the setup.

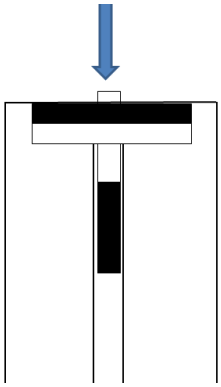
Configuration:



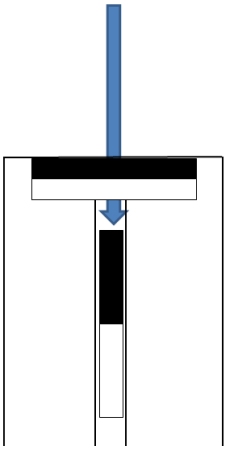
0,8

Measurements:

z0=0mm	m [g]	Δz [mm]
	0	0
	31	1
	55	2
	75	3
	97	4

	119 5 140 6 158 7 171 8 170 9 118 10 85 10,25 50 10,5 10 10,75		
	Configuration:  Measurements:		0,8
	z0=10.8mm m [g] Δz [mm] 0 0 233 1 538 2 927 3 996 3,5 1124 4 1154 4,5 1213 5 1212 5,5 1120 6 873 6,5 284 7 36 7,5		

Configuration:

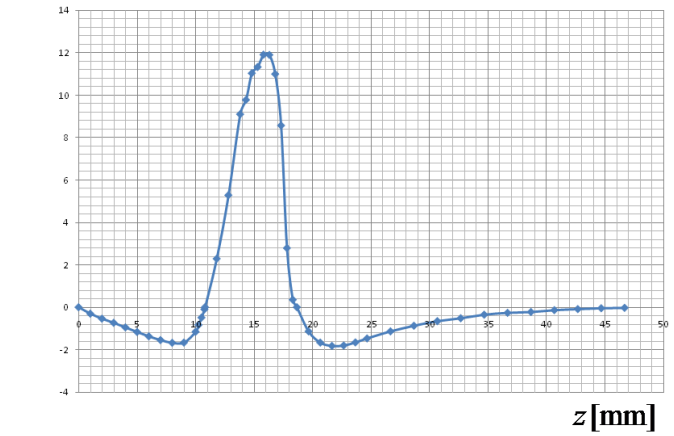


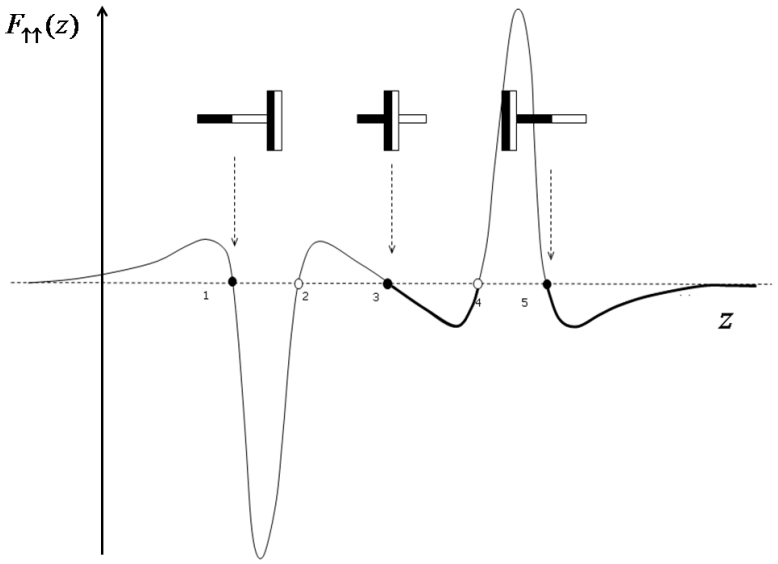
0,8

Measurements:

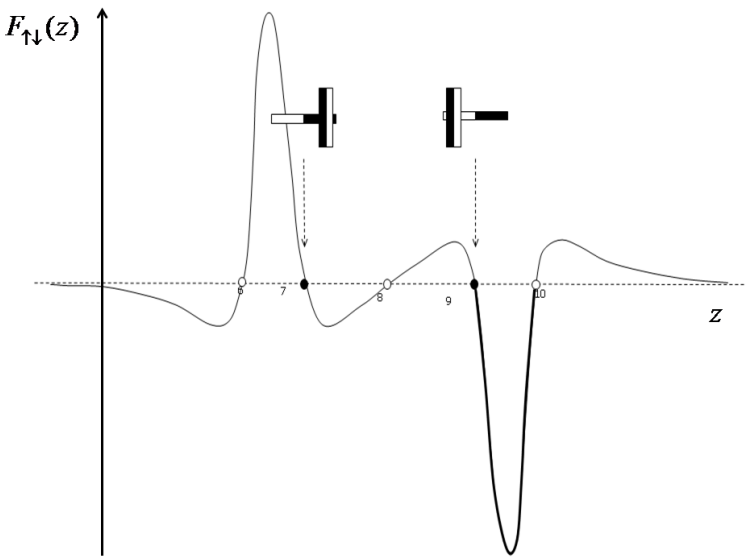
z0=18.6mm	m [g]	Δz [mm]
	0	0
	116	1
	170	2
	186	3
	184	4
	169	5
	150	6
	116	8
	89	10
	67	12
	53	14
	36	16
	27	18
	23	20
	14	22
	9	24
	5	26
	3	28

Task 3		Points
	Due to symmetry, it is sufficient to plot e.g., the following graph in detail:	2



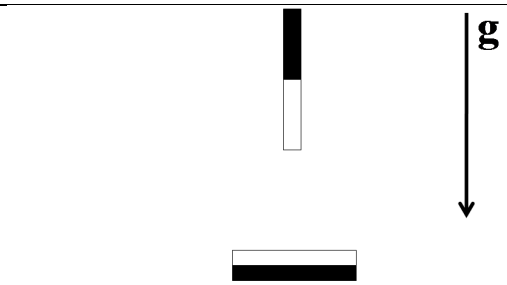
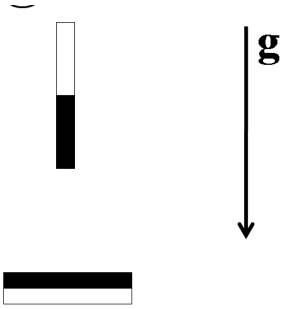


1



1

Task 4	Points

		0,5
	OR 	
Total:		10.0