## 理论题 1（红色卷）

## 月地系统的演化

科学家们可以极精确地确定月地间距离。1969 年，宇航员在月球表面放置了一个特别的反射镜，通过测量一束激光到达反射镜并返回所花的时间就可以达到精确测量月地距离的目的（见图 1）。



图 1 一束从天文台发出，被用于精确测量月地距离的激光。

通过上述方法，科学家们直接测得月亮在缓慢的远离地球，即，月地间距在随时间增加。如图 2 所示，这是由于潮汐引起的扭矩使得地球不断地将角动量传给月球所致。在此题中，你需要推导与此现象有关的基本参数。

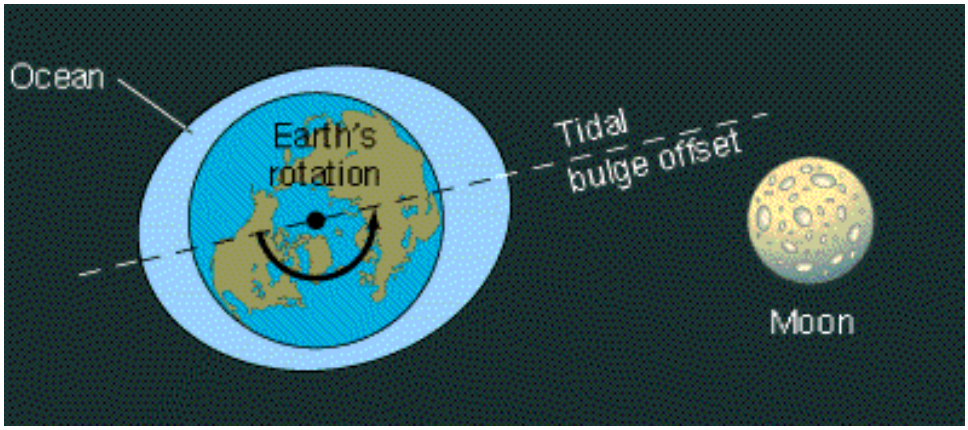



图 2　月球的引力会造成地球上的潮汐形变或称“膨凸”。由于地球的自转，贯穿膨凸的连线与月地间的连线并不共线。这种偏离会产生一个扭矩，此扭矩会将地球的自转角动量转移给月球的公转角动量。此图并不是按比例画的。

## 1. 角动量守恒

用 $L_1$ 表示月地系统的当前总角动量，并作如下假定：i） $L_1$ 仅是地球绕其自转轴转动和月球绕地球公转的角动量之和，ii）月球的轨道是一个圆，且月球可视为质点，iii）地球自转轴与月球的公转轴平行，iv）为计算简单起见，认为月球是绕地球公转，而不是绕系统质心公转。本题中用到的所有转动惯量、扭矩和角动量都是相对于地球自转轴而言的。V）忽略太阳的影响。

| | | |
|---|---|---|
| 1a | 写出表示月地系统当前总角动量的方程。将方程用地球的转动惯量 $I_E$，地球的当前自转角速度 $\omega_{E1}$，月球相对于地球自转轴的当前转动惯量 $I_{M1}$，及月球的当前公转角速度 $\omega_{M1}$ 表示。 | 0.2 |

此角动量的转移过程将在地球自转周期与月球公转周期相等时结束。此时，月球引起的潮汐膨凸将处于月球于地球的中心连线上，因此，扭矩将消失。

| | | |
|---|---|---|
| 1b | 写出表示月地系统终态总角动量 $L_2$ 的方程。作与（1a）中相同的假定，将方程用地球的转动惯量 $I_E$，地球的终态自转角速度，也是月球的终态公转角速度$\omega_2$，以及月球的终态转动惯量 $I_{M2}$ 表示。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1c | 就本题而言，忽略地球自转对终态总角动量的贡献，写出表示角动量守恒的方程。 | 0.3 |

## 2. 月地系统的终态距离与终态角速度

假定月球绕地球转动的轨道是圆的，并忽略地球自转对终态总角动量的贡献。

| | | |
|---|---|---|
| 2a | 对月球绕地球的圆形轨道，写出终态时的引力表达式，用 $\omega_2$ 、地球质量 $M_E$ 、万有引力常数 $G$ 和月地间的终态距离 $D_2$ 表示。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2b | 写出表示月地间终态距离 $D_2$ 的方程，用已知的系统当前总角动量 $L_1$ 、地球质量 $M_E$ 、月球质量 $M_M$ 和万有引力常数 $G$ 表示。 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | 写出表示月地系统终态角速度 $\omega_2$ 的方程，用已知参数 $L_1$ 、 $M_E$ 、 $M_M$ 和 $G$ 表示。 | 0.5 |

下面，将要求你给出 $D_2$ 和 $\omega_2$ 的数值。为此，你需要知道地球的转动惯量。

| | | |
|---|---|---|
| 2d | 写出表示地球转动惯量 $I_E$ 的方程。假定地球为球形，当半径小于 $r_i$ 时密度为 $\rho_i$ , 半径在 $r_i$ 与最外层半径 $r_o$ 间时密度为 $\rho_o$ 。（见图 3） | 0.5 |

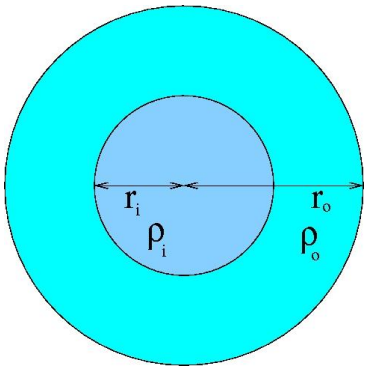



图 3 将地球看成是 $\rho_i$ 和 $\rho_o$ 两种密度构成的球。
.

在此题中所有数值结果都要求保留两位有效数字。

| | | |
|---|---|---|
| 2e | 估计地球的转动惯量 $I_E$ 。取 $\rho_i = 1.3\times10^4$ kg m$^{-3}$, $r_i = 3.5\times10^6$ m, $\rho_o = 4.0\times10^3$ kg m$^{-3}$, 和 $r_o = 6.4\times10^6$ m 。 | 0.2 |

地球质量和月球质量分别为 $M_E = 6.0\times10^{24}$ kg 和 $M_M = 7.3\times10^{22}$ kg。当前月地间距为 $D_1 = 3.8\times10^8$ m。当前地球自转角速度为 $\omega_{E1} = 7.3\times10^{-5}$ s$^{-1}$。月球绕地球的当前公转角速度为 $\omega_{M1} = 2.7\times10^{-6}$ s$^{-1}$，万有引力常数 $G = 6.7\times10^{-11}$ m$^3$kg$^{-1}$s$^{-2}$.

| | | |
|---|---|---|
| 2f | 估计系统当前总角动量 $L_1$ 的数值。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2g | 分别以米和以当前距离 $D_1$ 为单位，给出月地终态距离 $D_2$ 的值。 | 0.3 |

| | | |
|---|---|---|
| 2h | 以 $s^{-1}$ 为单位，给出终态角速度 $\omega_2$ 的值。以当前的一天时长为单位，给出终态时一天的时长。 | 0.3 |

给出地球自转的终态角动量和月球公转的终态角动量之比，并由此比值是小量验证地球自转角动量对总角动量的贡献可忽略的假定是合理的。

| | | |
|---|---|---|
| 2i | 给出地球自转的终态角动量和月球公转的终态角动量之比 | 0.2 |

## 3．月球每年退行多少?

现在，你要给出月球相对地球每年退行多少。为此，你需要知道现在作用在月球上的扭矩是多少。如图 4 所示，假定潮汐膨凸可以用位于地球表面的每个质量为 m 的两个质点来近似表示。令 $\theta$ 为两个膨凸间连线与月地中心连线间的夹角。

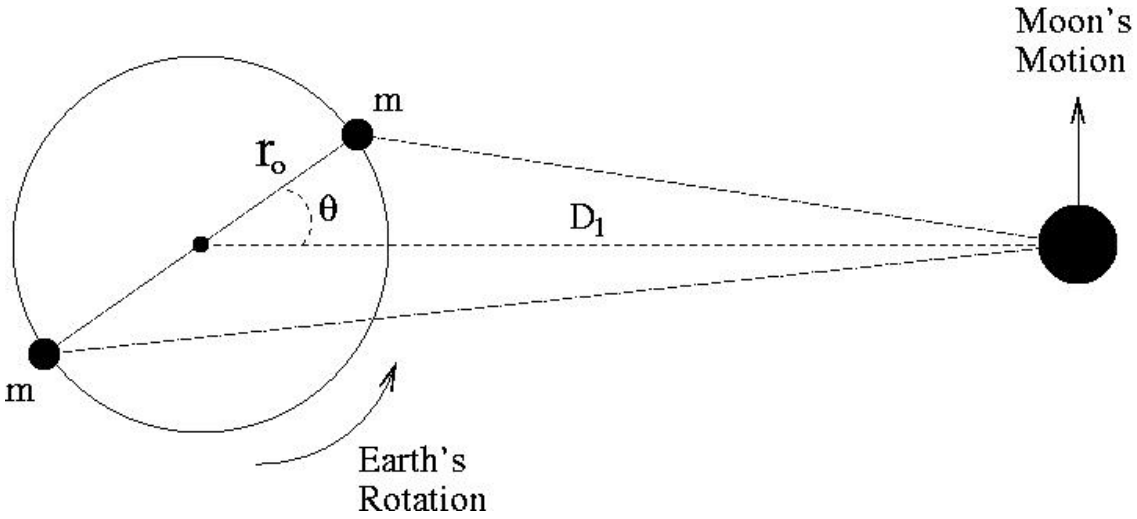



图 4 估计地球上的膨凸作用在月球上的转矩的示意图。此图并未按比例画。

| | | |
|---|---|---|
| 3a | 给出最靠近月球的质点作用在月球上的力 $F_c$ 的大小。 | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | 给出最远离月球的质点作用在月球上的力 $F_f$ 的大小。 | 0.4 |

你现在可以估计这些质点产生的扭矩。

| | | |
|---|---|---|
| 3c | 给出最靠近月球的质点作用在月球上的力矩 $\tau_c$ 的大小。 | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3d | 给出最远离月球的质点作用在月球上的力矩 $\tau_f$ 的大小。 | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3e | 给出这对质点作用在月球上的总力矩 $\tau$ 的大小。由于 $r_o << D_1$，在表达式中应该只保留到 $r_o / D_1$ 的最低次项。如果 x<<1，你可以利用 $(1+x)^a \approx 1+ax$ $x<<1$。 | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3f | 取 $\theta = 3^\circ$ 和 $m = 3.6\times10^{16}$ kg（注意此质量仅为地球质量的 $10^{-8}$），计算总转矩的数值。 | 0.5 |

因为扭矩是角动量随时间变化的速率，给出当前月地距离每年的增加量。在此步，仅用 $M_M$、$M_E$、$D_1$ 和 $G$ 来表示月球的角动量。

| | | |
|---|---|---|
| 3g | 给出当前月地距离每年的增加量。 | 1.0 |

最后，估计每年天长的增加量。

| | | |
|---|---|---|
| 3h | 给出地球自转角速度 $\omega_{E1}$ 每年的下降量？每年天长增加多少？ | 1.0 |

## 4．能量到那里去了？

与保持守恒的角动量不同，系统的总能（包括转动能和引力能）并不守恒。在本题的最后，我们要来考察此问题。

| | | |
|---|---|---|
| 4a | 写出月地系统的总能（包括转动能和引力能）$E$ 的表达式，并仅用 $I_E$、$\omega_{E1}$、$M_M$、$M_E$、$D_1$ 和 $G$ 表示。 | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4b | 写出 $E$ 的变化量 $\Delta E$ 作为 $D_1$ 的变化量和 $\omega_{E1}$ 的变化量的函数。$D_1$ 的变化量和 $\omega_{E1}$ 的变化量分别采用（3g）和（3h）中得到的结果，计算一年的 $\Delta E$ 数值。 | 0.4 |

验证这一能量损失与用月球引起的地球潮汐的热耗散能估计的结果一致。假定潮汐使地球任何地方的水面平均升高 0.5m，地球表面深度 h＝0.5m 的水层参与潮汐（为简单起见，假定地球的整个表面都覆盖满水）。潮汐每天发生两次，并进一步假定由于水的粘滞性 10%的重力

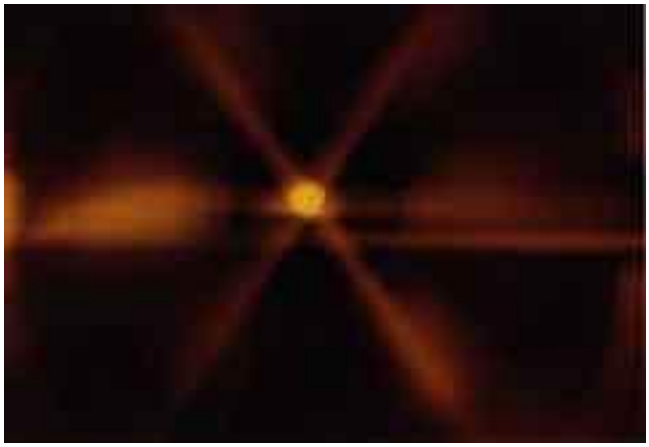
势能在水的下降过程中耗散为热。取水的密度为 $\rho_{water} = 10^3 \,\mathrm{kgm}^{-3}$，地球表面附近的重力加速度为 $g = 9.8 \,\mathrm{ms}^{-2}$。

| | | |
|---|---|---|
| 4c | 表面水层的质量是多少？ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4d | 在一年中耗散的能量是多少？此能量与月地系统每年的能量损失相比如何? | 0.3 |

**理论题 2**
**多普勒激光冷却与光学蜜糖**

本题的目的是要发展一个简单的理论来理解所谓的“激光冷却”和“光学蜜糖”现象。这一现象是指一束中性原子，以碱金属最为典型，被相向传播的同频率激光冷却。1997 年朱隶文、菲利普斯和库恩－坦努吉就因此工作获诺贝尔奖。



上图展示了被捕捉在三个正交的相向传播的激光束对交叉点的钠原子（中心的亮点）。由于耗散性的光学力与在蜜糖中运动的物体所受的粘滞阻力类似，捕捉区域被称为“光学蜜糖”。
在本题中，你要分析一个光子入射到一个原子时的相互作用和一维的耗散机制。

**I．激光冷却基础**
考虑一个质量为 $m$ 的原子以速度 $v$ 沿 $+x$ 方向运动。为简单起见，我们考虑一维问题，即我们将不考虑 $y$ 和 $z$ 方向（见图 1）。此原子有两个内部能级。低能级称基态，能量取为零，高能级称激发态，能量记为 $\hbar\omega_0$，这里 $\hbar = h/2\pi$ 。原子最初处于基态。在实验室参考系中频率为 $\omega_L$ 的一束激光沿 $-x$ 方向照到所讨论的原子上。按量子力学的观点，此激光由大量的能量为 $\hbar\omega_L$，动量为 $-\hbar q$ 的光子组成。原子可以吸收一个光子，随后又自发地发射一个光子，发射的光子沿 $+x$ 和 $-x$ 方向的概率相等。因为原子的运动速度远小于光速，即，$v/c << 1$（$c$ 是光速），再考虑到 $\hbar q/mv << 1$，即，原子的动量远大于单个光子的动量，你的结果只需保留到 $v/c$ 和 $\hbar q/mv$ 的一次项。

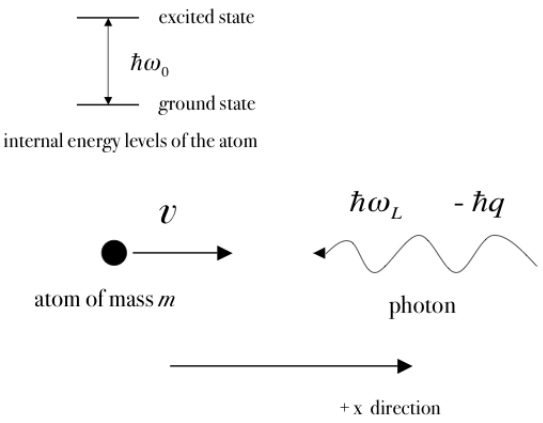



图 1 一个质量为$m$，速度$v$沿$+x$方向的原子与频率为$\hbar\omega_L$，动量为$-\hbar q$的光子碰撞的示意图。原子有两个能量差为$\hbar\omega_0$的内部能级。

假定激光的频率$\omega_L$被调到，在运动的原子看来，该频率激光正好能与原子的两个内部能级间发生跃迁共振。回答下列问题：

**1. 吸收**

| | | |
|---|---|---|
| 1a | 写出光子共振吸收的条件 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1b | 写出吸收光子后实验室参考系中原子动量$p_{at}$的表达式。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1c | 写出吸收光子后实验室参考系中原子总能$\varepsilon_{at}$的表达式 | 0.2 |

**2. 沿$-x$方向自发发射一个光子**

在某些时候，吸收上述光子后，原子会沿$-x$方向发射一个光子。

| | | |
|---|---|---|
| 2a | 写出实验室参考系中看到的沿$-x$方向发射的光子的能量$\varepsilon_{ph}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2b | 写出实验室参考系中看到的沿$-x$方向发射的光子的动量$p_{ph}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | 写出沿$-x$方向发射一个光子后,实验室参考系中观察到的原子动量$p_{at}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2d | 写出沿$-x$方向发射一个光子后,实验室参考系中观察到的原子总能量$\varepsilon_{at}$。 | 0.2 |

**3. 沿$+x$方向自发发射一个光子**

在某些时候，吸收上述光子后，原子会沿$+x$方向发射一个光子。

| | | |
|---|---|---|
| 3a | 写出实验室参考系中看到的沿$+x$方向发射的光子的能量$\varepsilon_{ph}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | 写出实验室参考系中看到的沿$+x$方向发射的光子的动量$p_{ph}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3c | 写出沿$+x$方向发射一个光子后,实验室参考系中观察到的原子动量$p_{at}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3d | 写出沿$+x$方向发射一个光子后,实验室参考系中观察到的原子总能量$\varepsilon_{at}$。 | 0.2 |

**4. 吸收后的平均发射**

沿$-x$和$+x$方向发射一个光子的概率相等。基于此，回答如下问题：

| | | |
|---|---|---|
| 4a | 写出所发射光子的平均能量$\varepsilon_{ph}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4b | 写出所发射光子的平均动量$p_{ph}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4c | 写出发射光子后原子的平均总能 $\varepsilon_{at}$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4d | 写出发射光子后原子的平均动量 $p_{at}$。 | 0.2 |

**5. 能量和动量转移**

如上所述，对一个完整的单光子吸收－发射过程，在激光辐射与原子间存在一个净的平均动量和能量转移。

| | | |
|---|---|---|
| 5a | 写出经历一个完整的单光子吸收－发射过程后，原子能量的平均变化量 $\Delta\varepsilon$。 | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 5b | 写出经历一个完整的单光子吸收－发射过程后，原子动量的平均变化量 $\Delta p$。 | 0.2 |

**6. 沿 $+x$ 方向传播的激光造成的能量动量转移**

现在考虑一束频率为 $\omega_L'$ 的激光沿 $+x$ 方向照到原子上，而原子依然以速度 $v$ 沿 $+x$ 方向运动。假定，在原子参考系看来，激光频率与原子内部能级间跃迁的共振条件依然满足。回答下列问题：

| | | |
|---|---|---|
| 6a | 写出经历一个完整的单光子吸收－发射过程后，原子能量的平均变化量 $\Delta\varepsilon$。 | 0.3 |

| | | |
|---|---|---|
| 6b | 写出经历一个完整的单光子吸收－发射过程后，原子动量的平均变化量 $\Delta p$。 | 0.3 |

**II. 耗散与光学蜜糖的基础**

然而，量子过程中总是存在不确定性。因此，由原子在吸收一个光子后的有限时间内会发射一个光子可以推断，前面讨论的共振条件不一定要严格满足。即，激光束的频率 $\omega_L$ 和 $\omega_L'$ 为任意值时吸收－发射过程依然能够发生。当然，这些过程发生的概率会不同。显然，当共振条件得到严格满足时发生的概率最大。平均说来，吸收到发射间经历的时间被称作原子的激发能级的寿命，用 $\Gamma^{-1}$ 表示。

考虑 $N$ 个相对于实验室参考系静止的原子的集合，有频率为 $\omega_L$ 的激光束照到它们上。原子不断地吸收和发射光子，平均说来，有 $N_{exc}$ 个原子处于激发态（因

而，有$N-N_{exc}$个原子处于基态）。经过量子力学计算可以得到下列结果：

$$N_{exc}=N\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0-\omega_L\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}$$

这里，$\omega_0$是原子跃迁的共振频率，$\Omega_R$是所谓的拉比频率，$\Omega_R^2$正比于激光束的强度。正如前面提到过的，即使激光频率$\omega_L$与原子的共振频率$\omega_0$不等，$N_{exc}$也不为零。上面结果的另一种表达方式是：单位时间内发生吸收－发射过程的数目为$N_{exc}\Gamma$。

考虑图2所描述的物理情形，两束频率相同但频率$\omega_L$任意的相向传播激光照射到包含$N$个原子，以速度$v$沿$+x$方向运动的原子气上。

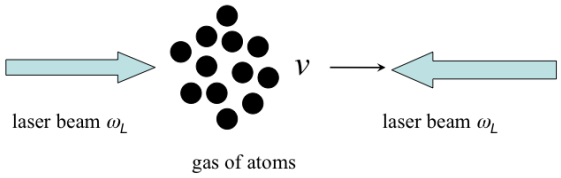



图2 两束频率相同但频率$\omega_L$任意的相向传播激光照射到包含$N$个原子，以速度$v$沿$+x$方向运动的原子气上。

**7.激光作用到原子束上的力**

| | | |
|---|---|---|
| 7a | 依照到目前为止得到的知识，给出激光作用到原子束上的力。你应该假定 $mv >> \hbar q$ 。 | 1.5 |

**8. 低速极限**

现在假定原子的速度足够小，使得你可以将力的表达式展开到$v$的一阶项。

| | | |
|---|---|---|
| 8a | 在此极限下，给出“7a”中力的表达式。 | 1.5 |

利用此结果，你可以给出利用激光辐照使原子加速、减速和根本不对原子产生影响的条件。

| | | |
|---|---|---|
| 8b | 写出得到一个正作用力（即，使原子加速）的条件。 | 0.25 |

| | | |
|---|---|---|
| 8c | 写出作用力为零的条件。 | 0.25 |

| | | |
|---|---|---|
| 8d | 写出得到一个负作用力的条件（使原子减速） | 0.25 |

| | | |
|---|---|---|
| 8e | 现在考虑原子以速度 $-v$ （沿 $-x$ 方向）运动。写出得到使原子减速的力的条件。 | 0.25 |

**9. 光学蜜糖**

在负作用力的条件下，我们得到一个摩擦耗散力。假定初始时，$t=0$，原子气具有速度 $v_0$.

| | | |
|---|---|---|
| 9a | 在低速极限下，给出在被激光束照射 $\tau$ 时间后原子的速度。 | 1.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 9b | 现在假定原子气处于温度为 $T_0$ 的热平衡状态，给出激光束照射 $\tau$ 时间后的温度 $T$. | 0.5 |

此模型不允许你达到任意低的温度。

## 理论试题 3

# 恒星为什么这么大

恒星是炽热的气体球。大部分恒星发光的能量，来源于在其核心部分发生的将氢变为氦的核聚变过程。在本题中，我们分别采用经典和量子的观念，以及静电学和热力学的知识，来理解为什么恒星必须足够大才能保证核聚变过程的发生，同时导出能保证氢聚变为氦的反应发生的最小恒星的质量和半径。

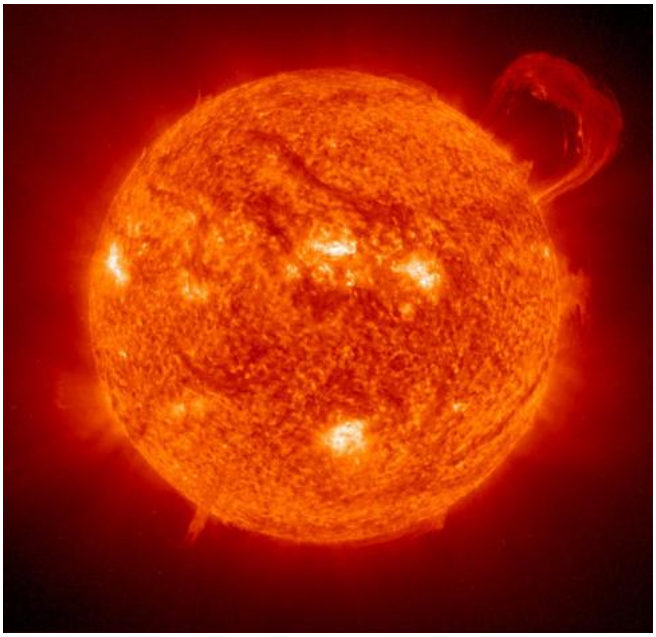


图 1. 我们的太阳象大多数恒星一样，依靠其中心部分发生的氢聚变为氦的热核反应来发光。

| 实用常数 |
| --- |
| 万有引力常数 = $G = 6.7\times10^{-11}$ $m^3\ kg^{-1}\ s^2$ |
| 波尔兹曼常数 = $k = 1.4\times10^{-23}$ $J\ K^{-1}$ |
| 普朗克常数 = $h = 6.6\times10^{-34}$ $m^2\ kg\ s$ |
| 质子质量 = $m_p = 1.7\times10^{-27}$ kg |
| 电子电量 = $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg |
| 电量单位 = $q = 1.6\times10^{-19}$ C |
| 真空介电常数 = $\varepsilon_0 = 8.9\times10^{-12}$ $C^2\ N^{-1}\ m^{-2}$ |
| 太阳半径 = $R_S = 7.0\times10^{8}$ m |
| 太阳质量 = $M_S = 2.0\times10^{30}$ kg |

**1. 恒星中心温度的经典理论估算**

假设构成恒星的气体是电离氢（等数量的质子与电子），并假设可以把构成恒星的气体当作理想气体来处理。根据经典理论的观点，要使聚变发生，两个质子间的距离必须小到 $10^{-15}$ m。只有在这样小的间距下，质子间吸引性的短程核力才足以盖过排斥力。两个质子要能够靠近到这样小的距离，它们首先需要克服库仑斥力。假设可以把质子看作经典的点电荷。考虑两个质子以速度 $v_{rms}$（$v_{rms}$ 为质子速度的方均值）反向运动并发生一维正碰。

| | | |
| --- | --- | --- |
| 1a | 气体的温度 $T_c$ 要到达什么值才能使质子最小间距 $d_c$ 等于 $10^{-15}$ m？本题所有数值结果保留两位有效数字。 | 1.5 |

**2. 证明前面估算的温度是错误的**

为验证前面估算的温度是否合理，我们需要一个独立的方法来估算恒星中心的温度。恒星的结构是非常复杂的，但我们可以作一些合理的假设以使问题简化。恒星处于平衡状态，既不膨胀也不收缩，向内的万有引力与向外的气体压力相平衡 (见图 2)。对于距离恒星中心 $r$ 的气体薄层平衡条件给出以下关系

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

其中 $P$ 为气体压强，$G$ 为万有引力常数，$M_r$ 为恒星中心半径为 $r$ 的球体所包含的气体的质量，$\rho_r$ 是所考察的气体球壳的密度。

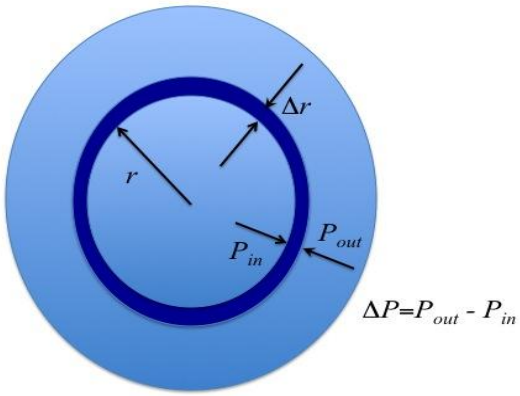



图 2. 在恒星中万有引力与气体压力差达到静力学平衡。

可通过恒星中心和表面的参数，采用以下近似来估算恒星中心温度的数量级:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

其中 $P_c$ 与 $P_o$ 分别是恒星核心处和恒星表面的压强。 由于 $P_c >> P_o$，我们可以假设

$$\Delta P \approx -P_c.$$

此时，我们有

$$\Delta r \approx R,$$

这里是恒星的半径，

$M_r \approx M_R = M$ ,

其中 $M$ 是恒星的总质量。

气体密度可以近似取为恒星中心气体密度的值

$\rho_r \approx \rho_c$ .

可以假设压强为理想气体的压强。

| | | |
|---|---|---|
| 2a | 导出一个仅由恒星半径、恒星质量和若干物理常数确定恒星中心温度$T_c$的方程。 | 0.5 |

我们可以用此模型的以下推论作为其是否有效的判据:

| | | |
|---|---|---|
| 2b | 根据(2a)中得到的方程，写出恒星$M/R$的表达式，结果仅用物理常数和$T_c$表达。 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | 采用(1a)中导出的$T_c$的值，计算一个恒星质量半径比$M/R$的数值。 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2d | 计算太阳的质量半径比$M(Sun)/R(Sun)$，并验证此值远小于(2c)中得到的值。 | 0.5 |

### 3. 恒星中心温度的量子力学理论估算

(2d)中计算结果的巨大不一致说明(1a)中经典方法估算的$T_c$是不正确的。如果考虑量子力学效应则这个不一致的问题可以得到解决。这说明质子表现出波动性，而一个质子则弥散在一个德布洛意波长$\lambda_p$量级的空间范围内。当质子间的最小距离$d_c$达到$\lambda_p$的量级时，质子在量子力学意义上发生重叠，聚变得以发生。

| | | |
|---|---|---|
| 3a | 假设 $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ 为聚变发生的条件，对于速度为$v_{rms}$的质子，导出一个仅由物理常数确定$T_c$的方程。 | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | 计算(3a)得到的$T_c$的数值。 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 3c | 采用(3b)中得到的$T_c$的值和(2b)导出的公式，计算一个恒星的质量半径比$M/R$的数值。验证这个数值与观测到的太阳的质量半径比$M(Sun)/R(Sun)$相吻合。 | 0.5 |

的确，在相当大的质量范围内，所谓主星序恒星（氢聚变）$M/R$的数值的确近似等于这里得到的结果。

### 4. 恒星的质量半径比

前面结果的吻合表明，估算太阳中心温度的量子力学方法是正确的。

| | | |
|---|---|---|
| 4a | 利用前面的结果证明靠氢聚变发光的恒星的质量$M$与半径$R$之比是相同的并只由物理常数确定。导出计算氢聚变恒星的$M/R$比的方程。 | 0.5 |

### 5. 最小恒星的质量与半径

根据(4a)中得到的结果，只要该关系成立，恒星的质量可以取任何值。但实际情况并不是这样。

我们知道在正常的氢聚变恒星中的气体可以近似看作为理想气体。这意味着电子的平均间距$d_e$要大于电子的典型德布洛意波长$\lambda_e$。如果相距更近，电子会处于所谓的简并态，而恒星的表现也将有所不同。注意我们处理恒星中质子和电子的不同方式。对于质子，其德布洛意波须重叠以发生聚变。而对于电子，其德布洛意波须不发生叠加，以便可将其当作理想气体来处理。

恒星中的密度随半径的增加而增加。不过在作数量级估算时我们仍将恒星看作是均匀的。你可继续使用条件 $m_p >> m_e$。

| | | |
|---|---|---|
| 5a | 导出关于恒星中电子的平均数密度 $n_e$ 的方程。 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5b | 导出关于恒星中电子典型间距 $d_e$ 的方程。 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5c | 采用条件 $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$，写出一个关于最小正常恒星的半径的方程。设恒星内部温度均与恒星中心温度相同。 | 1.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5d | 求最小正常恒星半径的数值，分别用米和太阳半径两种单位表示。 | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5e | 求最小正常恒星质量的数值，分别用千克和太阳质量两种单位表示。 | 0.5 |

### 6. 老年恒星中氦核的聚变

随着恒星的老年化，其核心处的氢大部分都已聚变成氦(He)。这些恒星要继续发光的话，必须发生将氦核聚变成更重的元素的核聚变。一个氦核包含两个质子和两个中子，即两倍于质子的电量和四倍于质子的质量。前面我们已经给出质子聚变的条件为 $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$。

| | | |
|---|---|---|
| 6a | 对照质子的情况，设定氦核发生聚变的条件，计算氦核发生聚变所需的氦核速度的方均根值 $v_{rms}(He)$,及温度 $T(He)$。 | 0.5 |

# 2009 年国际物理奥赛实验考试说明

2009 年 7 月 15 日，星期三

本次竞赛的实验部分包括 2 个试题。其中第 1 题的目的是测量一激光二极管的工作波长，第 2 题的目的是测量云母的双折射。

**考试前请先阅读下列内容：**

1. 实验考试时间总共为 5 小时。
2. 只能用提供给你的笔答题。
3. 只能用提供给你的纸的正面答题。
4. 每一道试题都印在试题纸上，试题纸的左上角标有字母“Q”。
5. 你必须把答案汇总填入提供给你的**答题表**，答题表左上角标有字母**“A”**。
6. 此外，用提供的**演算纸**来写你的计算过程，演算纸的左上角标有字母“W”。数值计算结果的有效位数应符合题目的要求。
7. 此外，请在**答题表**和**演算纸**的顶部写上**题号**（即 1 或 2）。
8. 请在演算纸上写下你认为解题所需要的内容。请**尽可能少地使用文字**；主要用方程、数字、绘图和曲线图来表达你的意图。
9. 在试题纸、答题表、演算纸这三**部分**，都需要在每一页上方的格子中填写你的**考生编码**（Student number），连续的**页号**（Page No.）以及该**部分**的**总页数**（Total No. of pages）。如果你用某些空白演算纸打草稿，并且你不希望这些草稿被评阅，请在整张纸上画一个大叉，并且不要给这些纸编号。
10. 考试结束时，将每一题所有的纸张按下面的**正确顺序**整理好：
    a）答题表（包括绘图纸）；
    b）按顺序排好的用过的演算纸；
    c）不希望被评阅的草稿纸（每张纸上画一个大叉）；
    d）未用的纸；
    e）试题。

    将每道题所有纸张放入相应的信封。将所有物品留在你的桌上。**不能将任何一张纸和实验的任何器件带出考场。**
11. 实验用的装置和材料分 2 层放在盒子里，其照片见下页。有些装置上有标记。对每一个实验，请检查所有的材料都在盒子里。**如果你在实验过程中发现任何装置不能正确工作，请要求替换。**

# 二极管激光装置和可调节反射镜

在两个实验试题中，你都需要一个二极管激光器、激光器的支架、电源以及一个安装在调节座上的反射镜。

在你确定先做哪一个实验之前，我们建议你按图 0 所示安装激光器和反射镜。用如下材料：

1）木制光学平台；

2）二极管激光器组：包括二极管激光器，支杆，“S”形夹子和电源盒（标记为“A” ）。安装时请参考照片。**注意不要直接看激光束**。

3）一个可调节反射镜：该装置有两个调节旋钮和一个支杆（标记为“B” ）。安装时请参考照片。**注意：把支杆安在光学平台上时不要碰到反射镜镜面。安上反射镜之后再取下纸盖**。

按图 0 所示安装装置。激光束的光路调整后面再做。注意：虽然我们提供了备用的内六角扳手，所有东西用手就可以固定。

图 0. 安装激光器和反射镜。

二极管激光器，支杆，“S”形固定夹和电源（标记为“A”）。

安装在调节座上的反射镜，该装置有两个调节旋钮和一个支杆（标记为“B” ）。

# 第四十届国际物理奥林匹克竞赛实验试题简介

荀 坤　王若鹏　陈晓林

北京大学物理学院 100871

摘要： 第四十届国际物理奥林匹克竞赛实验部分为利用刀片锐边的衍射测量激光波长和测量云母片的双折射量两个光学实验组成。本文较全面地介绍了试题内容和解答，并在必要时作了简短评论。

关键词：国际物理奥林匹克；激光波长；衍射；双折射；偏振

## 一．引言：

第四十届国际物理奥林匹克竞赛于2009年7月12日至7月19日在墨西哥的梅里达市(Merida)举行。代表中国参赛的 5 名中学生全部都获得了金牌，其中，史寒朵同学还成为了国际物理奥林匹克竞赛史上第一个获得总分第一的女生，此外，她还获得了本届比赛的实验第一名奖和女生第一名奖。

本届竞赛的实验部分由两个光学题组成，分别是利用刀片锐边的衍射测量激光波长和测量云母片的双折射量。两个实验使用了相同的激光光源和光学平台，学生可以自己选择做题的顺序。赛会统一提供计算器、透明胶带、粘贴纸、剪刀，三角尺、笔、纸和绘图纸等。试题共有二十多页，本文不得不对其中的知识介绍部分作较多删节，但会尽量完整地保留考试内容。由于篇幅限制，试题解答尽量采用赛会提供的标准答案。最后，针对中国考生的答题情况作了简单分析。

## 二．试题概要：

### 2．1 实验装置

除木制光学平台外，两个实验试题还要共用一个二极管激光器（包括激光器支架和电源）及一个可调节反射镜，它们的安装方式见图 1。实验中用到的其它实验器材见图 2。其中，实验 A 需用到的器材有：

A1）一个固定在方柱上的短焦会聚透镜（标记符为 C）；

A2）一个安放在硬纸框内的刀片（标记符为 D1），一个带滑槽的有机玻璃支架（标记符为 D1 已装在 D2 上），一个滑动导轨（标记符为 D2）；

A3）一个带有游标尺（1/20mm）的观察屏（标记符为 E）；

A4）一个放大镜（标记符为 F）；

A5）一把 30cm 的直尺（标记符为 G）；

A6）一把游标卡尺（标记符为 H）；

A7）一个钢卷尺（标记符为 I）。

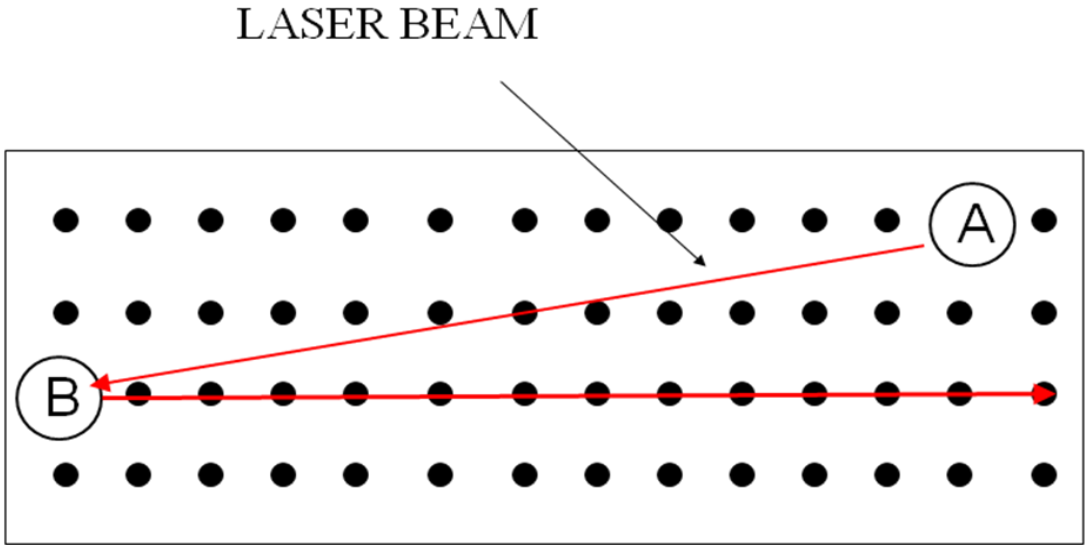
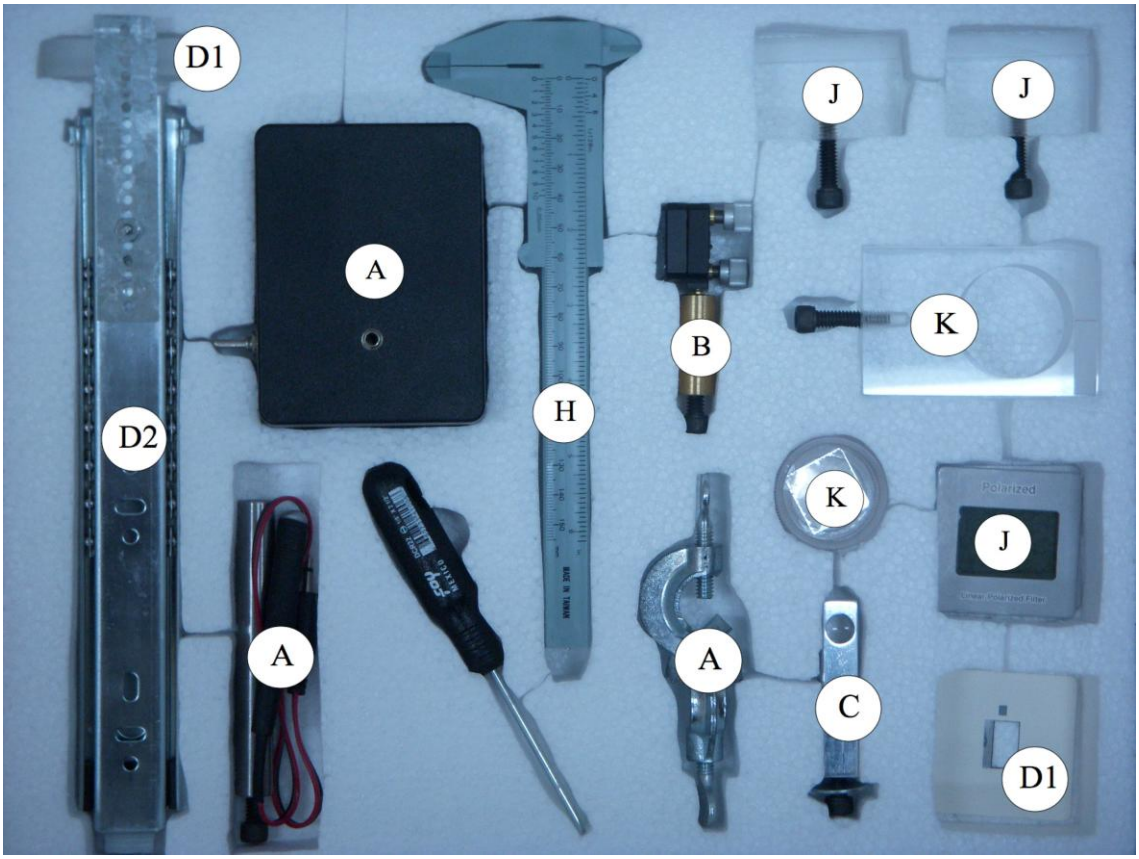



图 1 激光器 A 和反射镜 B 的放置方式。矩形框表示木制光学平台，黑色圆斑表示定位孔。



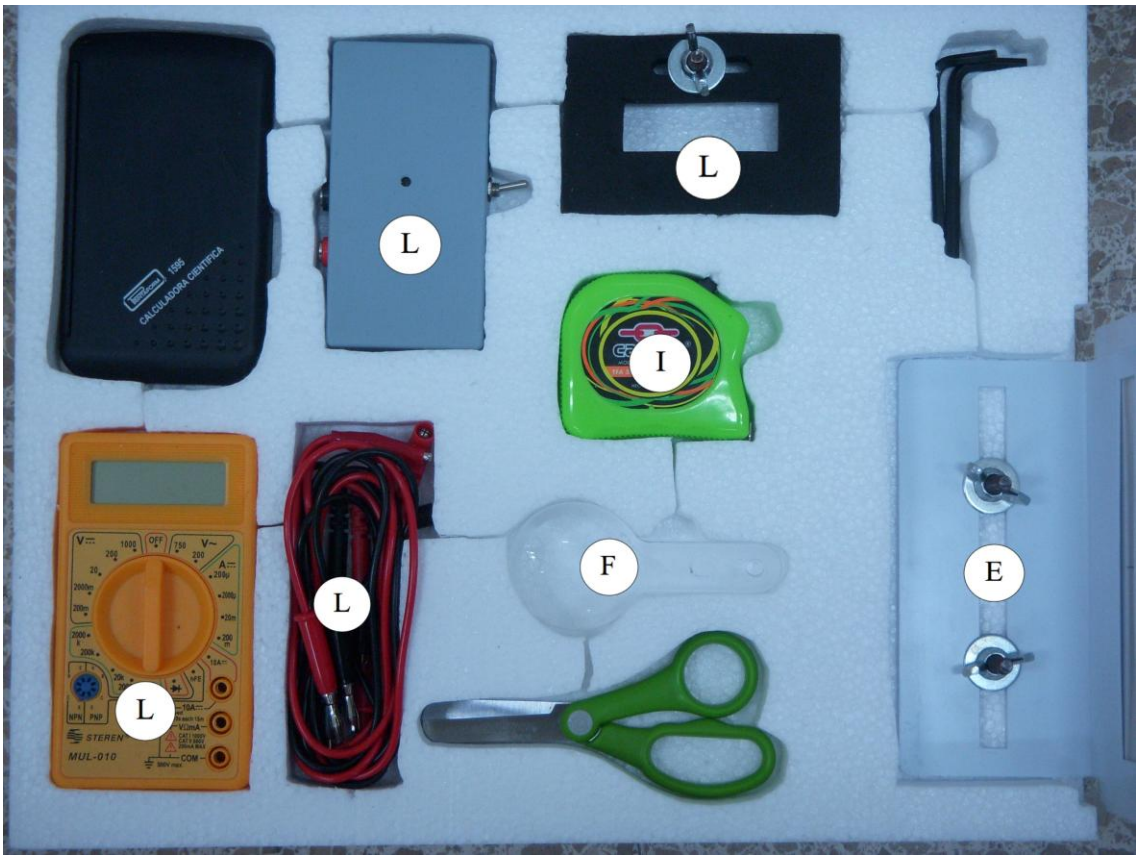



图 2 实验器材。同一功能模块的组件采用了同样的标识符。

实验 B 用到的器材有：

B1）两片装在幻灯片框内的偏振片，每个偏振片还配有一个有机玻璃座（标记符为 J）；

B2）一个装在塑料圆筒内的云母薄片（标记符为 K）；

B3）光探测装置，包括装在塑料盒中的光探测器、连接用导线、用于固定光探测器的泡沫套及一个用于测量光探测器输出电压的万用表（标记符为 L）。

**2．2 实验内容**

**2．2A 实验 A 内容**

按图 1 的指示，让激光束（A）经反射镜（B）反射后，再通过一个焦距约为几个厘米的透镜（C）。可将该透镜的后焦点看成一个点光源，从该点光源发出直接到达的球面波与经刀片锐边散射后再到达的柱面波会相互干涉，在屏上形成如图 3 那样的衍射图像。

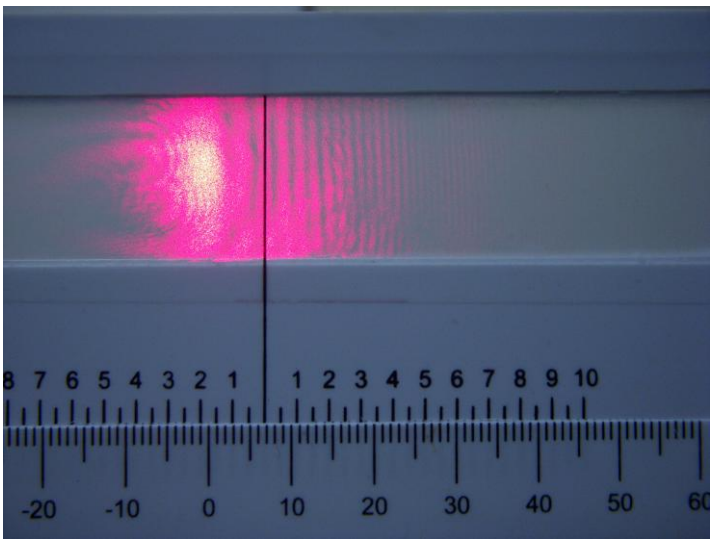



图 3 观察屏上看到的典型衍射图

按透镜后焦点与刀片的位置关系，可以有两种光路配置，分别见图 4 和图 5。

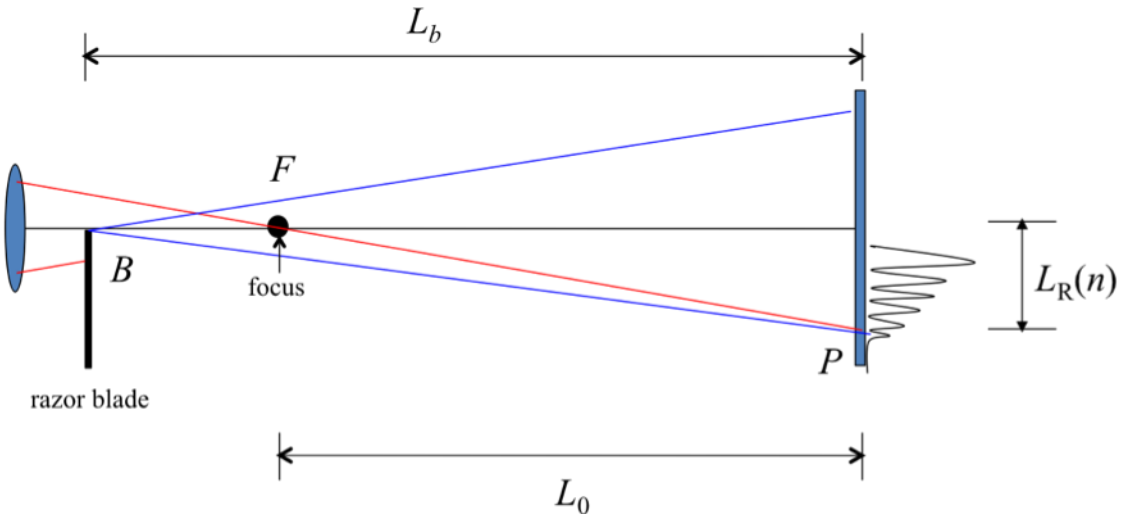



图 4. 配置 I， 刀片在透镜的焦点之前。

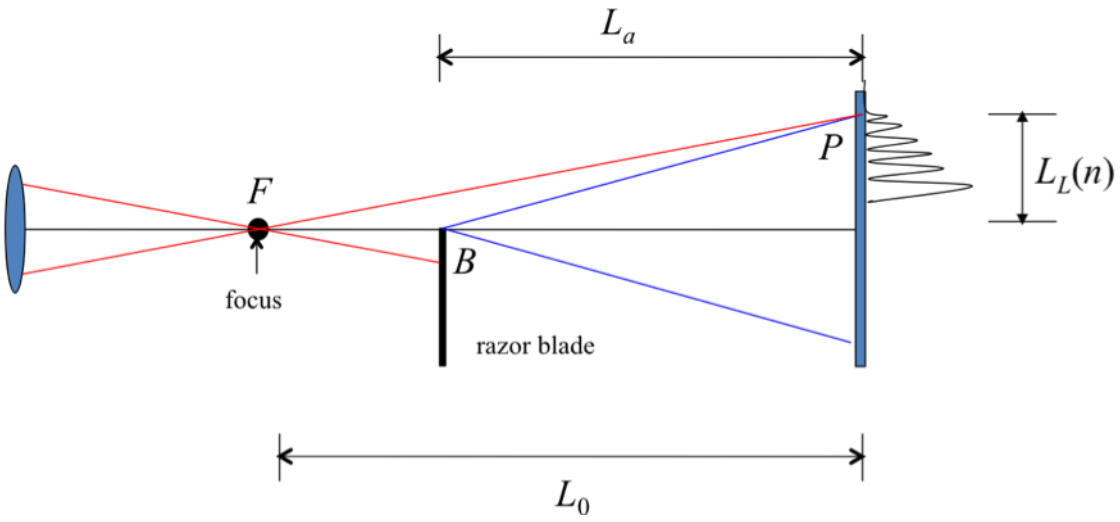



图 5. 配置 II，刀片在透镜的焦点之后。

**任务 A1 光路设计（1.0 分）** 设计一套光路，以获得图 3 那样的干涉图像。要保证从焦点到屏的距离 $L_0$ 要远大于焦距。

1）在所给的光学平台图版上绘出你的实验装置的草图，即在光学平台图版上标出不同设备的“标记符”，还可以在此基础上加画一些简单内容以使你的设计更清楚。

2）可以用一张白卡片来跟踪光束的路线，以帮助调节激光束的方向。

3）在实验装置草图上示意绘出激光束的传播路线，给出测得的激光束相对于光学平台的高度 $h$。

用一些时间来熟悉上述实验装置。你应该能在屏上看到 10 来条竖直的线状条纹。你要读的是暗纹的位置。你可以用放大镜更清楚地看到条纹的位置。观察条纹最好的位置是在被照射的屏（E）的背面。所以，屏上的标尺应该面向光学平台外侧。如果光路正确，只需简单滑动导轨（D2）使刀片（D1）前后移动，你就能分别看到配置 I 和配置 II 对应的两种衍射条纹花样。

由前述图 4 和图 5 知，有 5 个基本长度。

$L_0$ ：从焦点到屏的距离。

$L_b$ ：从刀片到屏的距离，配置 I。

$L_a$ ：从刀片到屏的距离，配置 II。

$L_R(n)$：n 级暗纹的位置，配置 I。

$L_L(n)$：n 级暗纹的位置，配置 II。

无论是配置 I 还是配置 II，第一个暗纹都是最宽的一个，对应 $n = 0$.

你的实验装置必须满足：对配置 I，$L_R(n) << L_0, L_b$；对配置 II，$L_L(n) << L_0, L_a$。光波的干涉现象是由于同一点发出的光波的光程差造成的。根据相位差的不同，波可以相消（相消干涉）形成暗纹；波也可以相长（相长干涉）形成亮纹。

详细分析这些波的干涉，可给出如下产生暗纹的条件。对配置 I：

$$\Delta_I(n) = \left(n + \frac{5}{8}\right)\lambda \qquad \text{当} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (A.1)$$

对配置 II:

$$\Delta_{\mathrm{II}}(n)=\left(n+\frac{7}{8}\right)\lambda \qquad \text{当} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(A.2)}$$

这里$\lambda$是激光束的波长，对配置 I 和配置 II，光程差$\Delta_{\mathrm{I}}$ 和$\Delta_{\mathrm{II}}$分别为：

$$\Delta_{\mathrm{I}}(n)=(BF+FP)-BP \qquad \text{当} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(A.3)}$$

和

$$\Delta_{\mathrm{II}}(n)=(FB+BP)-FP \qquad \text{当} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(A.4)}$$

**任务 A2　光程差的表达式（0.5 分）**。假设式(A.3) 和 式(A.4) 分别满足：$L_R(n)<<L_0,L_b$和$L_L(n)<<L_0,L_a$（需要确认你的装置确实满足这些条件），求出 $\Delta_{\mathrm{I}}(n)$ 和 $\Delta_{\mathrm{II}}(n)$ 近似表达式，用$L_0$, $L_b$, $L_a$, $L_R(n)$ 和$L_L(n)$表示。可以用当$x<<1$时，$(1+x)^r\approx 1+rx$这一近似公式。

使用上述公式的实验困难是$L_0$，$L_R(n)$ 和 $L_L(n)$不能精确测量。$L_0$测不准的原因是不容易找到透镜焦点的位置；后两个量测不准的原因是它们的零点位置非常难以确定。

为解决$L_R(n)$ 和 $L_L(n)$的测量困难，可以选择观察屏（标记符为“E”）标尺的零点（0）作为测量所有条纹位置的参考零点。令 $l_{0R}$ 和 $l_{0L}$ 分别为定义$L_R(n)$ 和 $L_L(n)$时所用的零点位置，此时，它们实际上是未知的。再令 $l_R(n)$ 和 $l_L(n)$ 为条纹到你选取的原点的距离。因此，应有：

$$L_R(n)=l_R(n)-l_{0R} \qquad \text{和} \qquad L_L(n)=l_L(n)-l_{0L} \qquad \text{(A.5)}$$

**任务 A3 测量暗条纹的位置和刀片的位置（3.25 分）**

- 对配置 I 和配置 II，分别测量不同条纹编号 *n* 下暗条纹的位置$l_R(n)$和$l_L(n)$。将测量结果记入表 I 中。对每种配置，测量的条纹位置数要尽可能达到或超过 8。
- 还要报告测得的刀片位置$L_b$和$L_a$，并注明所用测量仪器。
- 为分析简单和结果精确起见，不要由$L_b$和$L_a$计算得到$d=L_b-L_a$，而是要直接测量，并要标明所用的测量仪器。

**任务 A4 数据分析处理（3.25 分）** 完成前面测量后应该就已经可以得出$l_{0R}$和$l_{0L}$，当然也包括波长$\lambda$的值。

- 设计一个方案来得到这些值，并写出所需的表达式或方程。
- 结果要包括误差分析。你可以用表 A1，也可以用自己的表来给出你的结果，但要确保你的表中各栏名称能清楚反映其内容。
- 用所给的图纸选用适当变量画图得到所需量。
- 分别写出带不确定度的$l_{0R}$和$l_{0L}$的值。

**任务 A5 计算$\lambda$（2 分）**写出$\lambda$值的计算结果，包括不确定度和得到它的过程。在计算$\lambda$时，凡出现$(L_b-L_a)$之处，均可以用 *d* 代替，并使用 *d* 的测量值来作计算。

**2．2B 实验 B 内容**

如云母一类的双折射晶体，其折射率与电场的方向也即光的偏振方向有关。对于传播方向与云母片表面垂直的光，云母薄片有两个相互垂直的特殊轴向，我们称之为轴 1 和轴 2，见图 6。

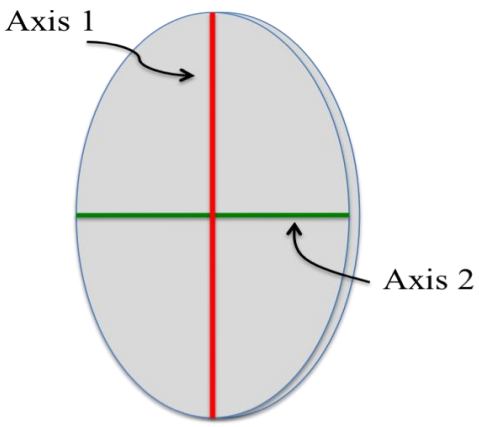



**图 6** 云母薄片的两个特殊轴向，轴 1 (红) 和轴 2 (绿)。

当入射光偏振方向与轴 1 或轴 2 平行时，云母分别相当于折射率为$n_1$或$n_2$的介质，经过云母片后前，光偏振方向均不会发生改变。当入射光偏振方向与轴 1 夹角为 θ时，可以将入射光视为沿轴 1 和轴 2 两个方向偏振的光的叠加。经过云母后的透射光可看作是两个分别沿轴 1 和轴 2 方向偏振但两相位不同的偏振光的叠加。一般说来，透射光的偏振状态和入射光的不再一样，还存在垂直于入射光偏振方向的偏振成分，见图 7。

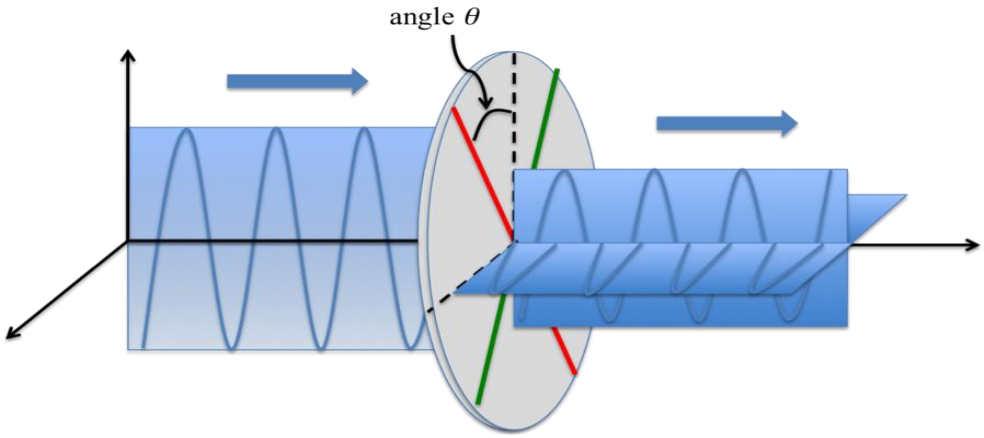



**图 7 轴 1 与入射光偏振方向有夹角$\theta$ 。**

将偏振方向与入射光偏振方向平行和垂直的光强分别记作$I_P$和$I_O$。这两个光强的大小与夹角$\theta$、波长$\lambda$ 、云母片厚度$L$以及折射率差$|n_1-n_2|$有关。折射率差$|n_1-n_2|$被称为介质的双折射量，是本实验要测量的内容。

需要指出的是，光探测器测量的是照射到探测器上的光强，与光的偏振态无关。由于还与其它因素（如云母对光波的吸收）有关，$I_P(\theta)$ 和 $I_O(\theta)$ 与夹角$\theta$的关系是十分复杂的。可以定义归一化光强：

$$\bar{I}_P(\theta)=\frac{I_P(\theta)}{I_P(\theta)+I_O(\theta)} \tag{B.1}$$

及

$$\bar{I}_O(\theta)=\frac{I_O(\theta)}{I_P(\theta)+I_O(\theta)} \tag{B.2}$$

$\bar{I}_P(\theta)$ 和 $\bar{I}_O(\theta)$与夹角$\theta$有简单的近似关系,

$$\bar{I}_P(\theta)=1-\frac{1}{2}(1-\cos\Delta\phi)\sin^2(2\theta) \tag{B.3}$$

及

$$\bar{I}_O(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos\Delta\phi)\sin^2(2\theta) \tag{B.4}$$

这里相位差$\Delta\phi$由下式给出，

$$\Delta\phi=\frac{2\pi L}{\lambda}|n_1-n_2| \tag{B.5}$$

其中，$L$是云母片的厚度、$\lambda$是入射光的波长、$|n_1-n_2|$为双折射量。

**任务 B1 设计一个测量$I_P$和$I_O$与夹角$\theta$（见图 2.6）关系的装置**。$\theta$可以是与轴 1 和轴 2 中任意一个的夹角。用(+)标记起偏器的透振方向，分别用(+)和(−)来标记检偏器透振方向与起偏器平行和垂直。 测量$I_P$和$I_O$的装置各占 **0.5 分。**

调整激光束，使其与光学平台平行，并通过装有云母片的圆筒的中心。可用白色厚纸片来确定激光束的径迹。还可以通过调节反射镜来改变光束的走向。

当有光照射到其上时，光探测器会有电压输出，此电压与光强成正比，用万用表测量。虽然在没有激光入射到光探测器上的情况下，会有输出电压小于 1 mV 的背景光强，但在进行光强测量时不要作背景光强修正。

**任务 B2 角度刻度的标定** 装载云母片的圆筒外壁标有等角度的分刻线。写出两条相邻刻线之间的角度间隔（用度表示）。 **(0.25 分)。**

找到夹角$\theta$等于 0 时的刻度位置对数据分析是十分重要的。最好先确定云母的一个光轴（轴 1）与入射光偏振方向平行时的刻度位置（这一般不与任何刻线重合）。选择最接近此位置的刻线作为夹角测量的临时原点，将相对于临时原点测得的角度记为$\bar{\theta}$，稍后，再用$\bar{\theta}_{零点}$值来修正。

**任务 B3 测量$I_P$和$I_O$** 对于你认为必要的若干$\bar{\theta}$取值，测量光强$I_P$和$I_O$。将测量结果填入表 B1 中。应在同一云母片位置（即相同的$\bar{\theta}$取值）分别测量光强$I_P$ 和 $I_O$。 **(3.0 分).**

**任务 B4 确定$\bar{\theta}_{零点}$的正确位置** $\theta$角的零点由轴 1 的位置定义。可以选择采用作图的方法或数值计算的方法来确定$\bar{\theta}_{零点}$。在极大值或极小值附近，光强曲线可用抛物线来近似:

$$I(\bar{\theta})\approx a\bar{\theta}^2+b\bar{\theta}+c \tag{B.6}$$

抛物线的极大值或极小值点由下式给出:

$$\bar{\theta}_m=-\frac{b}{2a} \tag{B.7}$$

由此可以确定$\bar{\theta}_{零点}$。表 B1 中的$\bar{\theta}$值需加上一个偏移量$\delta\bar{\theta}$得到正确的$\theta$ 值：$\theta=\bar{\theta}+\delta\bar{\theta}$。写出偏移量$\delta\bar{\theta}$的值，结果用度表达。**(1.0 分)。**

**任务B5 选择适当的变量** 选择$\bar{I}_P(\theta)$ 或 $\bar{I}_O(\theta)$进行分析，以求得相位差$\Delta\phi$的值，要求说明你所选择的变量。 **(0.5 分)。**

**任务B6 数据分析与相位差** 将数据分析所用变量的值填入表B2中，要采用修正后的角度$\theta$值并包含不确定量。在坐标纸上画出数据点。**(1.0 分)。**

- 以获得相位差$\Delta\phi$为目的，对上面的数据作统计分析，给出你的结果及结果的不确定量，并写出分析中所用到的方程或公式。将此处统计分析得到的结果，以直线的形式画在（已标有数据点的）坐标纸上。**(1.75 分)。**
- 计算相位差$\Delta\phi$及其不确定度的值，结果用弧度表示。在区间$[0,\pi]$确定相位差的值。 **(0.5 分).**

**任务B7 计算双折射量**$|n_1-n_2|$ 注意到在相位差$\Delta\phi$上增加$2\pi$的整数倍或改变$\Delta\phi$的符号，都不会改变光强的大小，但双折射量$|n_1-n_2|$却会改变。所以在采用**任务B6**中得到的$\Delta\phi$来计算双折射量$|n_1-n_2|$时须作如下处理:

$$\Delta\phi=\frac{2\pi L}{\lambda}|n_1-n_2| \qquad \text{如} \qquad L<82\times10^{-6}\ \text{m} \qquad (B.8)$$

或

$$2\pi-\Delta\phi=\frac{2\pi L}{\lambda}|n_1-n_2| \qquad \text{如} \qquad L>82\times10^{-6}\ \text{m} \qquad (B.9)$$

这里$L$是云母片的厚度，其值可在装云母片的小圆筒上找到，单位为微米。$L$的不确定量可取为$1\times10^{-6}$m。这里的波长可采用你在试题A中测得的值，也可以用红光区间$620\times10^{-9}$ m 至$750\times10^{-9}$ m 的平均值。写出$L$ 、$\lambda$ 和 $|n_1-n_2|$ 的值及不确定量，并写出用于不确定量计算的公式。 **(1.0 分)。**

## 三、试题解答：

**3A** 试题 A 解答：

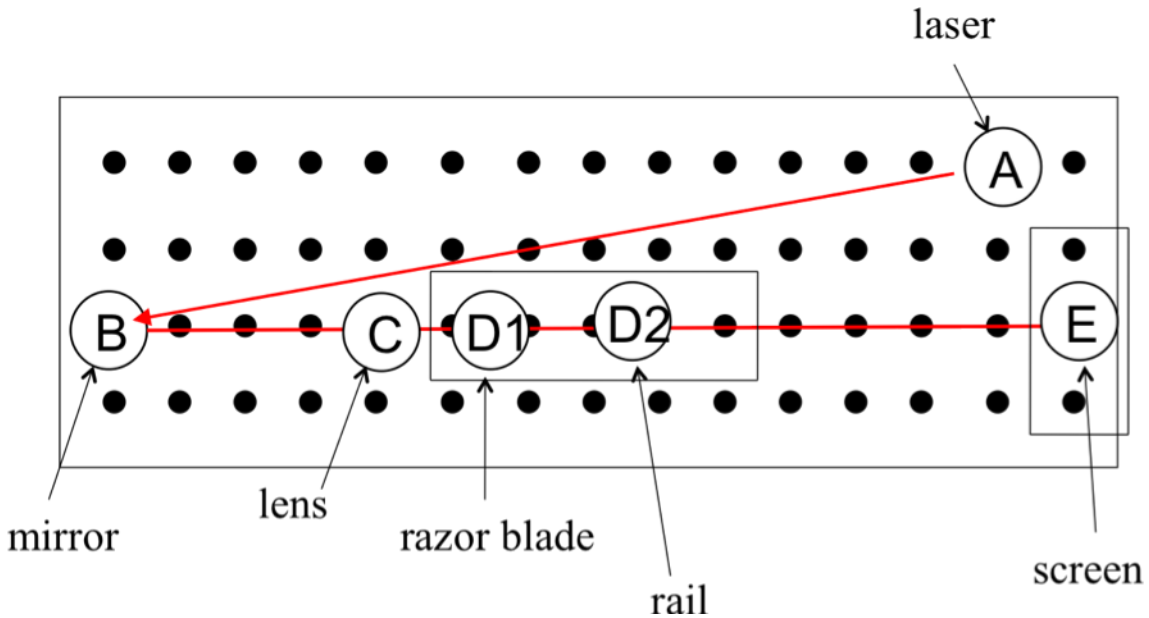



图 8 实验 A 的光路示意图。A 是激光器，B 是反射镜，C 是短焦距透镜，D1 是刀片，D2 是导轨，E 是接收屏。

**3A.1** 按图 8 配置光路。调节反射镜倾角，和透镜高度，保证激光光束始终与光学平台平行。短焦透镜 C 与观察屏间距离尽可能远，并能通过滑动导轨分别得到配置 I 和配置 II 对应的两种衍

射条纹花样。测量激光束距光学平台的高度，其值为 $h \pm \Delta h = (5.0 \pm 0.05) \times 10^{-2}$ m。

**3A.2** 对配置 I，有：

$$\Delta_{\mathrm{I}}(n) = (BF + FP) - BP = (L_b - L_0) + \sqrt{L_0^2 + L_R^2(n)} - \sqrt{L_b^2 + L_R^2(n)}$$

$$= (L_b - L_0) + L_0\sqrt{1 + \frac{L_R^2(n)}{L_0^2}} - L_b\sqrt{1 + \frac{L_R^2(n)}{L_b^2}}$$

由 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$，有

$$\Delta_{\mathrm{I}}(n) \approx \frac{1}{2}L_R^2(n)\left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_b}\right) \qquad \text{A.6}$$

类似地，对配置 II，有：

$$\Delta_{\mathrm{II}}(n) = (FB + BP) - FP = (L_0 - L_a) + \sqrt{L_a^2 + L_L^2(n)} - \sqrt{L_0^2 + L_L^2(n)}$$

$$\approx (L_0 - L_a) + L_a\sqrt{1 + \frac{L_L^2(n)}{L_a^2}} - L_0\sqrt{1 + \frac{L_L^2(n)}{L_0^2}} \approx \frac{1}{2}L_L^2(n)\left(\frac{1}{L_a} - \frac{1}{L_0}\right) \qquad \text{A.7}$$

**3A.3** 适当调节刀片位置，以使能在配置 I 和配置 II 情况下在屏上分别观察到相应的衍射图。测量暗纹的位置并记录于表 A1 中。

**表 A1 衍射图样暗条纹的位置**

| $n$ | $\left(l_{\mathrm{R}}(n)/10^{-3}m \pm 0.1\right)$ | $\left(l_{\mathrm{L}}(n)/10^{-3}m \pm 0.1\right)$ | $x_R = \sqrt{n + \frac{5}{8}}$ | $x_L = \sqrt{n + \frac{7}{8}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -7.5 | 1.1 | 0.791 | 0.935 |
| 1 | -10.1 | 3.7 | 1.275 | 1.369 |
| 2 | -12.4 | 6.4 | 1.620 | 1.696 |
| 3 | -14.0 | 8.2 | 1.903 | 1.968 |
| 4 | -15.6 | 10.0 | 2.151 | 2.208 |
| 5 | -17.2 | 11.4 | 2.372 | 2.424 |
| 6 | -18.4 | 12.2 | 2.574 | 2.622 |
| 7 | -19.7 | | 2.761 | |
| 8 | -20.7 | | 2.937 | |
| 9 | -22.0 | | 3.102 | |
| 10 | -23.0 | | 3.260 | |

测量得到刀片位置：$L_b \pm \Delta L_b = (653 \pm 1) \times 10^{-3}$ m　（用卷尺测）

$L_a \pm \Delta L_a = (628 \pm 1) \times 10^{-3}$ m　（用卷尺测）

$d = L_b - L_a = (24.6 \pm 0.1) \times 10^{-3}$ m　（用游标卡尺测）

**3A.4** 用表 A1 数据分别画出 $l_R$~$x_{\mathrm{R}}$ 和 $l_L$~$x_L$ 关系图，并作线性拟合，见图 9。

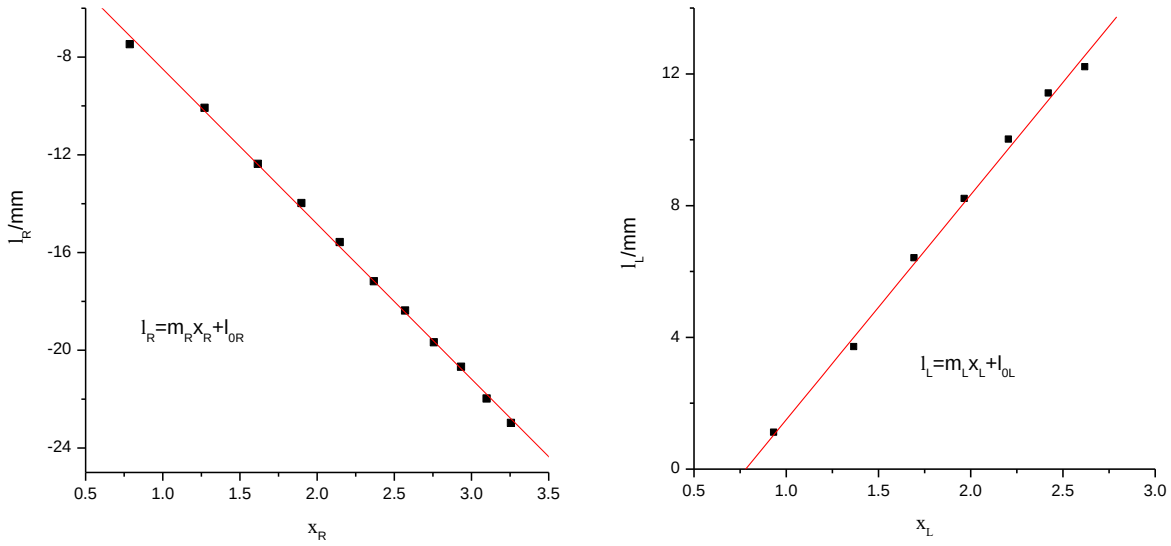



图 9　$l_R$~$x_R$ 和 $l_L$~$x_L$ 关系图及线性拟合。

赛会提供的计算器并不具有线性拟合功能，试题还要求选手写出线性拟合及各拟合量的误差分析公式，因篇幅所限，这里不再列出，读者可以从任何一本大学实验教材上查到。线性拟合得到的结果为：$m_R$=(−6.35±0.07) mm，$l_{0R}$=(−2.1±0.2) mm；$m_L$=(6.8±0.2) mm，$l_{0L}$=(−5.3±0.4) mm。

3A.5 对比式（A.1）和式（A.6）及式（A.2）和式（A.7）有：

$$2\lambda = m_R^2(\frac{1}{L_0}-\frac{1}{L_b}) \qquad (A.8)$$

和 $$2\lambda = m_L^2(\frac{1}{L_a}-\frac{1}{L_0}) \qquad (A.9)$$

注意到 $L_0$ 实际上是未知的，需要消去，可以得到：

$$\lambda = \frac{L_b-L_a}{2L_aL_b}\frac{m_R^2m_L^2}{m_R^2+m_L^2} = \frac{d}{2L_aL_b}\frac{m_R^2m_L^2}{m_R^2+m_L^2} \qquad (A.10)$$

将各测量值带入式(A.10)得：

$$\lambda = 646\ \ nm \qquad (A.11)$$

$\lambda$ 的不确定度可由下式确定：

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial d}\right)^2\Delta d^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial L_a}\right)^2\Delta L_a^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial L_b}\right)^2\Delta L_b^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial m_R}\right)^2\Delta m_R^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial m_L}\right)^2\Delta m_L^2} \qquad (A.12)$$

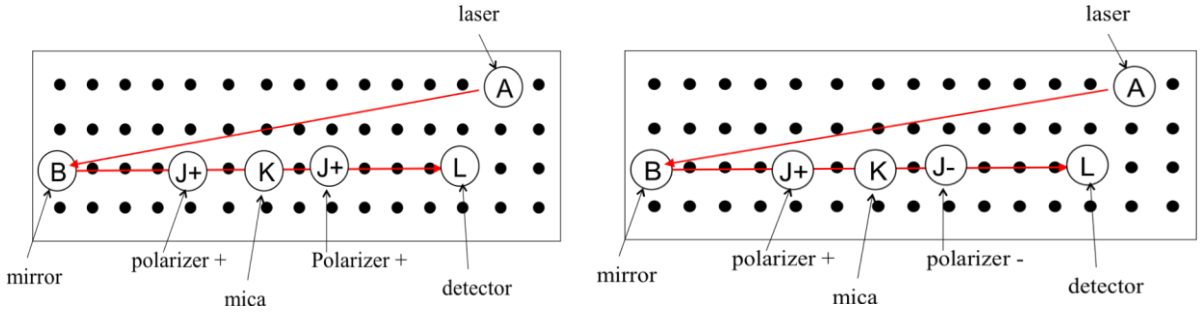
注意到，根号内前三项远小于后两项，$m_R^2 \approx m_L^2$，且 $\Delta m_L \approx 3\Delta m_R$，近似有：

$$\Delta\lambda \approx 2\frac{\lambda}{m_L}\Delta m_L \approx 39\ \ \text{nm} \qquad (A.13)$$

$$\lambda \pm \Delta\lambda = (646\pm 39)\ \ nm \qquad (A.14)$$

**3B 试题 B 解答**

3B.1 图 10 *a*，*b* 分别为测量 $I_P$ 和 $I_o$ 的光路示意图，*a* 与 *b* 的唯一差别是检偏器的透振方向分别与起偏器的平行和垂直。




（$a$）　　（$b$）

图 10 测量 $I_P$（$a$）和 $I_o$（$b$）的光路示意图。A、B、J、K 和 L 分别为激光器、反射镜、偏振片、云母片和光强探测器。

**3B.2** 安放云母片的圆筒外壁上共有 100 条分刻线，故两条相邻刻线间的角度间隔为 $\theta_{\text{int}} = 3.6^{\circ}$。安放云母片的圆筒被嵌入一个密合的外套座内，转动圆筒就可以改变云母片光轴的取向。外套座上有一刻线，用于指示圆筒的相对角位置。

按图 10*b* 安置光路，转动安有云母片的圆筒（K）使探测器（L）检测到的光强最弱。此时，云母片的一个光轴即与起偏器的透振方向一致。将此时最靠近外套座上刻线的圆筒上的刻度线作为临时角度零点，将圆筒相对此零点转过的角度记为 $\bar{\theta}$。

**3B. 3** 由式（B. 3）和（B. 4）知，只需在 $90^{\circ}$ 范围测量 $I_P$ 和 $I_O$。因此，$\bar{\theta}$ 的取值范围可以从 $-3.6^{\circ}$ 取到 $93.6^{\circ}$，可每 $3.6^{\circ}$ 取一个点。在同一 $\bar{\theta}$ 位置，改变检偏器的取向分别测量光强 $I_P$ 和 $I_O$，得到的结果记入表 B1 中。

**表 B1** $I_P$ 和 $I_O$ 测量结果

| $\bar{\theta}$ (degrees) | $(I_P \pm 1)\times 10^{-3}$ V | $(I_O \pm 1)\times 10^{-3}$ V |
|---|---|---|
| -3.6 | 46.4 | 1.1 |
| 0 | 48.1 | 0.2 |
| 3.6 | 47.0 | 0.6 |
| 7.2 | 46.0 | 2.0 |
| 10.8 | 42.3 | 4.9 |
| 14.4 | 38.2 | 9.0 |
| 18.0 | 33.9 | 12.5 |
| 21.6 | 27.7 | 17.9 |
| 25.2 | 23.4 | 22.0 |
| 28.8 | 17.8 | 27.0 |
| 32.4 | 12.5 | 31.7 |
| 36.0 | 8.8 | 34.8 |
| 39.6 | 5.2 | 38.0 |
| 43.2 | 3.6 | 39.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 46.8 | 3.2 | 39.6 |
| 50.4 | 4.5 | 38.7 |
| 54.0 | 6.9 | 36.6 |
| 57.6 | 10.3 | 33.6 |
| 61.2 | 14.7 | 29.4 |
| 64.8 | 20.1 | 24.7 |
| 68.4 | 25.4 | 19.7 |
| 72.0 | 30.5 | 14.7 |
| 75.6 | 36.6 | 10.2 |
| 79.2 | 40.7 | 6.1 |
| 82.8 | 44.3 | 3.2 |
| 86.4 | 46.9 | 1.0 |
| 90.0 | 47.8 | 0.2 |
| 93.6 | 47.0 | 0.4 |
| 97.2 | 45.7 | 2.0 |

**3B.4** $\bar{\theta}_{零点}$的位置可以由表B1中前3个数据点作数值求解的方法得到(用作图的方法也可以)。光强曲线可用抛物线$I(\bar{\theta}) \approx a\bar{\theta}^2 + b\bar{\theta} + c$来近似。将前三个数据点的值

$(x_1, y_1) = (-3.6, 1.1)$　$(x_2, y_2) = (0, 0.2)$　$(x_3, y_3) = (3.6, 0.6)$带入，可解得：$a$=0.05，$b$=-0.069。于是得到

$$\bar{\theta}_m = -\frac{b}{2a} \approx 0.7^{\circ} \qquad (B.10)$$

由$\theta = \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}$知：$\delta\bar{\theta} = -0.7^{\circ}$。

**3B.5** 可选$\bar{I}_O(\theta)$进行分析，以求得相位差$\Delta\phi$的值。当然，这样的选择并不是唯一的，选$\bar{I}_P(\theta)$也同样可以。

由式（B.4）知，如果取$y = \bar{I}_O(\theta)$，$x = \sin^2(2\theta)$，$y$与$x$间有直线关系：$y = mx + b$，且$m = \frac{1}{2}(1 - \cos\Delta\phi)$，由此可以求得$\Delta\phi$。

**3B.6** 注意到$\theta$从0到45°时，$x = \sin^2(2\theta)$即可从0到1，可以只选表B1中的12组数据来作分析，结果见**表B2**。

**表 B2** $y = \bar{I}_O$与$x = \sin^2(2\theta)$的关系

| $\theta$ (degrees) | $x=\sin^2(2\theta)$ | $y=\bar{I}_O$ |
|---|---|---|
| 2.9 | 0.010 | 0.013 |
| 6.5 | 0.051 | 0.042 |
| 10.1 | 0.119 | 0.104 |
| 13.7 | 0.212 | 0.191 |
| 17.3 | 0.322 | 0.269 |
| 20.9 | 0.444 | 0.392 |
| 24.5 | 0.569 | 0.484 |
| 28.1 | 0.690 | 0.603 |
| 31.7 | 0.799 | 0.717 |
| 35.3 | 0.890 | 0.798 |
| 38.9 | 0.955 | 0.880 |
| 42.5 | 0.992 | 0.916 |

首先，将**表** B2 中数据点画在图 11 中。然后，对 $y=\bar{I}_O$ 与 $x=\sin^2(2\theta)$ 作线性拟合，并将拟合得到的结果 $m\pm\Delta m=0.91\pm0.01$ 和 $b\pm\Delta b=-0.010\pm0.008$ 以直线形式表示在图 11 中。

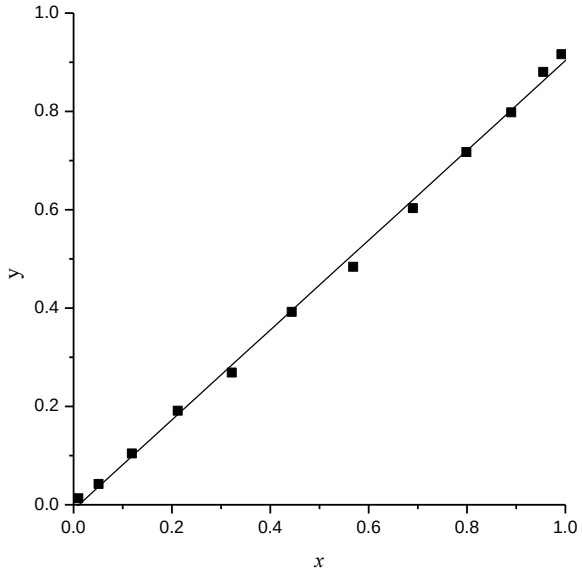



图11 $y=\bar{I}_O$ 与 $x=\sin^2(2\theta)$ 的关系

由 $m=\frac{1}{2}(1-\cos\Delta\phi)$ 可以解出：

$$\Delta\phi\pm\Delta(\Delta\phi)=2.54\pm0.04 \qquad \text{（B.11）}$$

其中，计算$\Delta(\Delta\phi)$时用到了$\Delta m=\left|\frac{\partial m}{\partial\Delta\phi}\right|\Delta(\Delta\phi)=\frac{1}{2}\sin(\Delta\phi)\Delta(\Delta\phi)$，即$\Delta(\Delta\phi)=\frac{2\Delta m}{\sin(\Delta\phi)}$。

3B. 7 从安放云母片的圆筒的标签上读得云母片的厚度为：$L\pm\Delta L=(100\pm1)\times10^{-6}$ m，由实验A测得的激光波长为$\lambda\pm\Delta\lambda=(646\pm39)\times10^{-9}$ m。据此，求得云母片的双折射量为：

$$|n_1-n_2|\pm\Delta|n_1-n_2|=(3.9\pm0.2)\times10^{-3}$$

估计$|n_1-n_2|$的误差时用到了公式：

$$\Delta|n_1-n_2|=\sqrt{\left(\frac{\partial|n_1-n_2|}{\partial\lambda}\right)^2\Delta\lambda^2+\left(\frac{\partial|n_1-n_2|}{\partial L}\right)^2\Delta L^2+\left(\frac{\partial|n_1-n_2|}{\partial\Delta\phi}\right)^2\Delta(\Delta\phi)^2}$$

和$\Delta|n_1-n_2|=\sqrt{\left(\frac{|n_1-n_2|}{\lambda}\right)^2\Delta\lambda^2+\left(\frac{|n_1-n_2|}{L}\right)^2\Delta L^2+\left(\frac{\lambda}{2\pi L}\right)^2\Delta(\Delta\phi)^2}$

显然，$\lambda$对$|n_1-n_2|$误差的贡献远大于其它量，因此，在估计误差时可以仅仅考虑此项。

## 四、分析

总起来说，本次实验考试内容比较平常，没有超出学生的知识范围，也不需要独特的构思，但对学生实验素质的要求也还是较高和全面，考察了光路设计、光路调节、公式推导、测量读数和数据处理几方面的能力。和历次实验竞赛一样，所有同学都反映时间非常紧张。只有具有清晰的物理图像、良好的实验操作素养和扎实的实验数据处理基本功的同学才可能取得令人满意的成绩。由于针对近年来国际物理奥林匹克竞赛的特点，加强了基础，特别是误差分析方面的训练，中国队取得了很好的成绩。实验A有两人得了满分，史寒朵同学更是以19.9分（满分为20分）的高分名列实验第一。

但是，同学们的答卷也暴露了一些问题。在实验A中，有一位平时实验非常好的同学，在处理数据时被卡住了丢了5.5分，还有一位同学没有考虑到$L_0$实际上是测不到的（因为不知道透镜的焦距），也丢了一些分。在实验B中，由于时间紧，有一位同学没有做完，其它同学也只是勉强完成。当然，按这类竞赛的性质，本来就不应该有人能完满完成全部考试内容。

**参考文献：**


1. 吕斯骅，段家忯主编，《新编基础物理实验》，高等教育出版社，2006年1月第1版.
2. 马秀芳，沈元华，第八届亚洲物理奥林匹克竞赛中实验考题的分析[J]. 物理实验，2007，27（12）：29-33.

# Problem and Solution of the 40th IPhO Experimental Test

**XUN Kun WANG Ruopeng and CHEN Xiaolin**
**School of Physics, Peking University**
**Beijing 100871**

Abstract

This paper introduces the 40th IPhO experiment test, which consists of two independent tasks: to measure the wavelength of a diode laser by means of the diffraction on a sharp edge of a razor blade and to measure the birefringence of mica. Based on the standard data supplied by the competition organization, the solutions for the two problems are given with brief comments.

Key words: IPhO, laser wavelength, diffraction, birefringence, polarization

**THEORETICAL PROBLEM No. 1**

**EVOLUTION OF THE EARTH-MOON SYSTEM**

**SOLUTIONS**

## 1. Conservation of Angular Momentum

| | | |
|---|---|---|
| 1a | $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1b | $L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1c | $I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = I_{M2} \omega_2 = L_1$ | 0.3 |

## 2. Final Separation and Angular Frequency of the Earth-Moon System.

| | | |
|---|---|---|
| 2a | $\omega_2^2 D_2^3 = GM_E$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2b | $D_2 = \dfrac{L_1^2}{GM_E M_M^2}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | $\omega_2 = \dfrac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2d | The moment of inertia of the Earth will be the addition of the moment of inertia of a sphere with radius $r_o$ and density $\rho_o$ and of a sphere with radius $r_i$ and density $\rho_i - \rho_o$: $I_E = \dfrac{2}{5}\dfrac{4\pi}{3}[r_o^5 \rho_o + r_i^5 (\rho_i - \rho_o)]$ . | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2e | $I_E = \dfrac{2}{5}\dfrac{4\pi}{3}[r_o^5 \rho_o + r_i^5 (\rho_i - \rho_o)] = 8.0 \times 10^{37}$ kg m$^2$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2f | $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = 3.4 \times 10^{34}$ kg m$^2$ s$^{-1}$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2g | $D_2 = 5.4\times10^8$ m, that is $D_2 = 1.4 D_1$ | 0.3 |

| | | |
|---|---|---|
| 2h | $\omega_2 = 1.6\times10^{-6}$ s$^{-1}$, that is, a period of 46 days. | 0.3 |

| | | |
|---|---|---|
| 2i | Since $I_E \omega_2 = 1.3\times10^{32}$ kg m$^2$ s$^{-1}$ and $I_{M2} \omega_2 = 3.4\times10^{34}$ kg m$^2$ s$^{-1}$, the approximation is justified since the final angular momentum of the Earth is 1/260 of that of the Moon. | 0.2 |

**3. How much is the Moon receding per year?**

| | | |
|---|---|---|
| 3a | Using the law of cosines, the magnitude of the force produced by the mass *m* closest to the Moon will be: $F_c = \frac{G\, m\, M_M}{D_1^2 + r_o^2 - 2 D_1 r_o \cos(\theta)}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | Using the law of cosines, the magnitude of the force produced by the mass *m* farthest to the Moon will be: $F_f = \frac{G\, m\, M_M}{D_1^2 + r_o^2 + 2 D_1 r_o \cos(\theta)}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3c | Using the law of sines, the torque will be $\tau_c = F_c \frac{\sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 - 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)]^{1/2}} = \frac{G\, m\, M_M \sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 - 2 D_1 r_o \cos(\theta)]^{3/2}}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3d | Using the law of sines, the torque will be $\tau_f = F_f \frac{\sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 + 2\, D_1\, r_o \cos(\theta)]^{1/2}} = \frac{G\, m\, M_M \sin(\theta)\, r_0\, D_1}{[D_1^2 + r_o^2 + 2 D_1 r_o \cos(\theta)]^{3/2}}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 3e | $\tau_c - \tau_f = G m M_M \sin(\theta) r_0\, D_1^{-2} \left(1 - \frac{3 r_o^2}{2 D_1^2} + \frac{3 r_o \cos(\theta)}{D_1} - 1 + \frac{3 r_o^2}{2 D_1^2} + \frac{3 r_o \cos(\theta)}{D_1}\right)$ $= \frac{6 G m M_M r_o^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{D_1^3}$ | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3f | $\tau = \dfrac{6 G m M_M r_o^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{D_1^3} = 4.1\times 10^{16}\,\text{N m}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 3g | Since $\omega_{M1}^2 D_1^3 = G M_E$, we have that the angular momentum of the Moon is<br>$I_{M1}\,\omega_{M1} = M_M\, D_1^2 \left[\dfrac{G\,M_E}{D_1^3}\right]^{1/2} = M_M \left[D_1\, G\, M_E\right]^{1/2}$<br>The torque will be:<br>$\tau = \dfrac{M_M \left[G M_E\right]^{1/2}\,\Delta(D_1^{1/2})}{\Delta t} = \dfrac{M_M \left[G M_E\right]^{1/2}\,\Delta D_1}{2\left[D_1\right]^{1/2}\Delta t}$<br>So, we have that<br>$\Delta D_1 = \dfrac{2\,\tau\,\Delta t}{M_M}\left[\dfrac{D_1}{G\,M_E}\right]^{1/2}$<br>That for $\Delta t = 3.1\times 10^7$ s = 1 year, gives $\Delta D_1 = 0.034$ m.<br>This is the yearly increase in the Earth-Moon distance. | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3h | We now use that<br>$\tau = -\dfrac{I_E\,\Delta\omega_{E1}}{\Delta t}$<br>from where we get<br>$\Delta\omega_{E1} = -\dfrac{\tau\,\Delta t}{I_E}$<br>that for $\Delta t = 3.1\times 10^7$ s = 1 year gives<br>$\Delta\omega_{E1} = -1.6\times 10^{-14}\,\text{s}^{-1}$.<br>If $P_E$ is the period of time considered, we have that:<br>$\dfrac{\Delta P_E}{P_E} = -\dfrac{\Delta\omega_{E1}}{\omega_E}$<br>since $P_E = 1\ day = 8.64\times 10^4$ s, we get<br>$\Delta P_E = 1.9\times 10^{-5}$ s.<br>This is the amount of time that the day lengthens in a year. | 1.0 |

## 4. Where is the energy going?

| | | |
|---|---|---|
| 4a | The present total (rotational plus gravitational) energy of the system is:<br>$E = \dfrac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 + \dfrac{1}{2} I_M \omega_{M1}^2 - \dfrac{G M_E M_M}{D_1}$.<br>Using that<br>$\omega_{M1}^2\, D_1^3 = G\, M_E$, we get | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| | $E=\frac{1}{2}I_E\omega_{E1}^2-\frac{1}{2}\frac{GM_EM_M}{D_1}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 4b | $\Delta E=I_E\omega_{E1}\Delta\omega_{E1}+\frac{1}{2}\frac{GM_EM_M}{D_1^2}\Delta D_1$, that gives<br>$\Delta E=-9.0\times10^{19}\,\mathrm{J}$ | 0.4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4c | $M_{water}=4\pi r_o^2\times h\times\rho_{water}$ kg = $2.6\times10^{17}$ kg. | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4d | $\Delta E_{water}=-g\,M_{water}\times0.5\,m\times2\,day^{-1}\times365\,days\times0.1=-9.3\times10^{19}$ J. Then, the two energy estimates are comparable. | 0.3 |

## THEORETICAL PROBLEM 2

## SOLUTION

## DOPPLER LASER COOLING AND OPTICAL MOLASSES

The key to this problem is the Doppler effect (to be precise, the longitudinal Doppler effect): The frequency of a monochromatic beam of light detected by an observer depends on its state of motion relative to the emitter, i.e. the observed frequency is

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 \pm v/c}{1 \mp v/c}} \approx \omega\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

where $v$ is the relative speed of emitter and observer and $\omega$ the frequency of the emitter. The upper-lower signs correspond, respectively, when source and observer move towards or away from each other. The second equality holds in the limit of low velocities (non-relativistic limit).

The frequency of the laser in the lab is $\omega_L$; $\omega_0$ is the transition frequency of the atom; the atom moves with speed $v$ towards the incident direction of the laser:

It is important to point out that the results must be given to first significant order in $v/c$ or $\hbar q/mv$.

### PART I: BASICS OF LASER COOLING

### 1. Absorption.

| | | |
|---|---|---|
| 1a | Write down the resonance condition for the absorption of the photon.<br>$\omega_0 \approx \omega_L\left(1 + \frac{v}{c}\right)$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1b | Write down the momentum $p_{at}$ of the atom after absorption, as seen in the laboratory<br>$p_{at} = p - \hbar q \approx mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1c | Write down the energy $\varepsilon_{at}$ of the atom after absorption, as seen in the laboratory<br>$\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L$ | 0.2 |

**2. Spontaneous emission in the $-x$ direction.**

First, one calculates the energy of the emitted photon, as seen in the lab reference frame. One must be careful to keep the correct order; this is because the velocity of the atom changes after the absorption, however, this is second order correction for the emitted frequency:

$$\omega_{ph} \approx \omega_0\left(1-\frac{v'}{c}\right) \quad \text{with} \quad v' \approx v - \frac{\hbar q}{m}$$

thus,

$$\begin{aligned}\omega_{ph} &\approx \omega_0\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right)\\ &\approx \omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right)\\ &\approx \omega_L\left(1+\frac{\hbar q}{mc}\right)\\ &\approx \omega_L\left(1+\left(\frac{\hbar q}{mv}\right)\left(\frac{v}{c}\right)\right)\\ &\approx \omega_L\end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
| 2a | Write down the energy of the emitted photon, $\varepsilon_{ph}$, after the emission process in the $-x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$\varepsilon_{ph} \approx \hbar\omega_L$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2b | Write down the momentum of the emitted photon $p_{ph}$, after the emission process in the $-x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$p_{ph} \approx -\hbar\omega_L / c$ | 0.2 |

Use conservation of momentum (see 1b):

$$p_{at} + p_{ph} \approx p - \hbar q$$

| | | |
|---|---|---|
| 2c | Write down the momentum of the atom $p_{at}$, after the emission process in the $-x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$p_{at} \approx p = mv$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2d | Write down the energy of the atom $\varepsilon_{at}$, after the emission process in the $-x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$\varepsilon_{at} \approx \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$ | 0.2 |

**3. Spontaneous emission in the $+x$ direction.**

The same as in the previous questions, keeping the right order

| | | |
|---|---|---|
| 3a | Write down the energy of the emitted photon, $\varepsilon_{ph}$, after the emission process in the $+x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$\varepsilon_{ph} \approx \hbar\omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \hbar\omega_L\left(1+2\frac{v}{c}\right)$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | Write down the momentum of the emitted photon $p_{ph}$, after the emission process in the $+x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$p_{ph} \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+2\frac{v}{c}\right)$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3c | Write down the momentum of the atom $p_{at}$, after the emission process in the $+x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$p_{at} = p - \hbar q - p_{ph} \approx p - \hbar q - \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+2\frac{v}{c}\right) \approx mv - 2\frac{\hbar\omega_L}{c}$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3d | Write down the energy of the atom $\varepsilon_{at}$, after the emission process in the $+x$ direction, as seen in the laboratory.<br>$\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-2\frac{\hbar q}{mv}\right)$ | 0.2 |

**4. Average emission after absorption.**

The spontaneous emission processes occur with equal probabilities in both directions.

| | | |
|---|---|---|
| 4a | Write down the average energy of an emitted photon, $\varepsilon_{ph}$, after the emission process.<br>$\bar{\varepsilon}_{ph} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ph}^{+} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ph}^{-} \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4b | Write down the average momentum of an emitted photon $p_{ph}$, after the emission process.<br>$\bar{p}_{ph} = \frac{1}{2}p_{ph}^{+} + \frac{1}{2}p_{ph}^{-} \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\frac{v}{c} = mv\left(\frac{\hbar q}{mv}\frac{v}{c}\right) \approx 0$ second order | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4c | Write down the average energy of the atom $\varepsilon_{at}$, after the emission process.<br>$\bar{\varepsilon}_{at} = \frac{1}{2}\varepsilon_{at}^{+} + \frac{1}{2}\varepsilon_{at}^{-} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{\hbar q}{mv}\right)$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4d | Write down the average momentum of the atom $p_{at}$, after the emission process.<br>$p_{at} = \frac{1}{2} p_{at}^{+} + \frac{1}{2} p_{at}^{-} \approx p - \frac{\hbar \omega_L}{c}$ | 0.2 |

**5. Energy and momentum transfer.**

Assuming a complete one-photon absorption-emission process only, as described above, there is a net average momentum and energy transfer between the laser and the atom.

| | | |
|---|---|---|
| 5a | Write down the average energy change $\Delta\varepsilon$ of the atom after a complete one-photon absorption-emission process.<br>$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{at}^{after} - \varepsilon_{at}^{before} \approx -\frac{1}{2}\hbar q v = -\frac{1}{2}\hbar\omega_L \frac{v}{c}$ | 0.2 |

| | | |
|---|---|---|
| 5b | Write down the average momentum change $\Delta p$ of the atom after a complete one-photon absorption-emission process.<br>$\Delta p = p_{at}^{after} - p_{at}^{before} \approx -\hbar q = -\frac{\hbar\omega_L}{c}$ | 0.2 |

**6. Energy and momentum transfer by a laser beam along the $+x$ direction.**

| | | |
|---|---|---|
| 6a | Write down the average energy change $\Delta\varepsilon$ of the atom after a complete one-photon absorption-emission process.<br>$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{at}^{after} - \varepsilon_{at}^{before} \approx +\frac{1}{2}\hbar q v = +\frac{1}{2}\hbar\omega_L' \frac{v}{c}$ | 0.3 |

| | | |
|---|---|---|
| 6b | Write down the average momentum change $\Delta p$ of the atom after a complete one-photon absorption-emission process.<br>$\Delta p = p_{at}^{after} - p_{at}^{before} \approx +\hbar q = +\frac{\hbar\omega_L'}{c}$ | 0.3 |

## PART II: DISSIPATION AND THE FUNDAMENTALS OF OPTICAL MOLASSES

Two counterpropagating laser beams with the *same* but *arbitrary* frequency $\omega_L$ are incident on a beam of $N$ atoms that move in the $+x$ direction with (average) velocity $v$.

**7. Force on the atomic beam by the lasers.**

On the average, the fraction of atoms found in the excited state is given by,

$$P_{exc} = \frac{N_{exc}}{N} = \frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

where $\omega_0$ is the resonance frequency of the atoms and $\Omega_R$ is the so-called Rabi frequency; $\Omega_R^2$ is proportional to the *intensity* of the laser beam. The lifetime of the excited energy level of the atom is $\Gamma^{-1}$.

The force is calculated as the number of absorption-emission cycles, times the momentum exchange in each event, divided by the time of each event. CAREFUL! One must take into account the Doppler shift of each laser, as seen by the atoms:

| | | |
|---|---|---|
| 7a | With the information found so far, find the force that the lasers exert on the atomic beam. You must assume that $mv >> \hbar q$. $F = N\Delta p^- P_{exc}^- \Gamma + N\Delta p^+ P_{exc}^+ \Gamma$ $= \left( \frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L + \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L - \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} \right) N\Gamma\hbar q$ | 1.5 |

**8. Low velocity limit.**

Assume now the velocity to be small enough in order to expand the force to first order in $v$.

| | | |
|---|---|---|
| 8a | Find an expression for the force found in Question (7a), in this limit. $F \approx -\frac{4N\hbar q^2 \Omega_R^2 \Gamma}{\left(\left(\omega_0 - \omega_L\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2\right)^2} (\omega_0 - \omega_L) v$ | 1.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 8b | Write down the condition to obtain a positive force (speeding up the atom). $\omega_0 < \omega_L$ | 0.25 |

| | | |
|---|---|---|
| 8c | Write down the condition to obtain a zero force. $\omega_0 = \omega_L$ | 0.25 |

| | | |
|---|---|---|
| 8d | Write down the condition to obtain a negative force (slowing down the atom).<br>$\omega_0 > \omega_L$ … this is the famous rule "tune below resonance for cooling down" | 0.25 |

| | | |
|---|---|---|
| 8e | Consider now that the atoms are moving with a velocity $-v$ (in the $-x$ direction). Write down the condition to obtain a slowing down force on the atoms.<br>$\omega_0 > \omega_L$ … i.e. independent of the direction motion of the atom. | 0.25 |

**9. Optical molasses**

In the case of a negative force, one obtains a frictional dissipative force. Assume that initially, $t = 0$, the gas of atoms has velocity $v_0$.

| | | |
|---|---|---|
| 9a | In the limit of low velocities, find the velocity of the atoms after the laser beams have been on for a time $\tau$.<br>$F = -\beta v \Rightarrow m\frac{dv}{dt} \approx -\beta v$ $\beta$ can be read from (8a)<br>$\Rightarrow v = v_0 e^{-\beta t/m}$ | 1.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 9b | Assume now that the gas of atoms is in thermal equilibrium at a temperature $T_0$. Find the temperature $T$ after the laser beams have been on for a time $\tau$.<br><br>Recalling that $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kT$ in 1 dimension, and using $v$ as the average thermal velocity in the equation of (9a), we can write down<br>$T = T_0 e^{-2\beta t/m}$ | 0.5 |

**Answers**

**Theoretical Problem No. 3**

## Why are stars so large?

*1) A first, classic estimate of the temperature at the center of the stars.*

| | | |
|---|---|---|
| 1a | We equate the initial kinetic energy of the two protons to the electric potential energy at the distance of closest approach:<br>$2(\frac{1}{2}m_p\ v_{rms}^2) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c}$; and since<br>$\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_p\ v_{rms}^2$, we obtain<br>$T_c = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k} = 5.5\times10^9\,\mathrm{K}$ | 1.5 |

*2) Finding that the previous temperature estimate is wrong.*

| | | |
|---|---|---|
| 2a | Since we have that<br>$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r\rho_r}{r^2}$, making the assumptions given above, we obtain that:<br>$P_c = \frac{GM\rho_c}{R}$. Now, the pressure of an ideal gas is<br>$P_c = \frac{2\rho_c k T_c}{m_p}$, where $k$ is Boltzmann´s constant, $T_c$ is the central temperature of the star, and $m_p$ is the proton mass. The factor of 2 in the previous equation appears because we have two particles (one proton and one electron) per proton mass and that both contribute equally to the pressure. Equating the two previous equations, we finally obtain that:<br>$T_c = \frac{GMm_p}{2kR}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2b | From section (2a) we have that:<br>$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | From section (2b) we have that, for $T_c = 5.5\times10^9$ K:<br>$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 1.4\times10^{24}$ kg m$^{-1}$. | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2d | For the Sun we have that:<br>$\frac{M(Sun)}{R(Sun)} = 2.9\times10^{21}$ kg m$^{-1}$ , that is, three orders of magnitude smaller. | 0.5 |

*3) A quantum mechanical estimate of the temperature at the center of the stars*

| | | |
|---|---|---|
| 3a | We have that<br>$\lambda_p = \frac{h}{m_p\, v_{rms}}$ , and since<br>$\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_p\, v_{rms}^2$, and<br>$T_c = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k}$, we obtain:<br>$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2\varepsilon_0^2 k h^2}$ . | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3b | $T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2\varepsilon_0^2 k h^2} = 9.7\times10^6$ K. | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 3c | From section (2b) we have that, for $T_c = 9.7\times10^6$ K:<br>$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4\times10^{21}$ kg m$^{-1}$ ; while for the Sun we have that:<br>$\frac{M(Sun)}{R(Sun)} = 2.9\times10^{21}$ kg m$^{-1}$. | 0.5 |

*4) The mass/radius ratio of the stars.*

| | | |
|---|---|---|
| 4a | Taking into account that | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p}$, and that<br><br>$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2}$ , we obtain:<br><br>$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}$ . | |

*5) The mass and radius of the smallest star.*

| | | |
|---|---|---|
| 5a | $n_e = \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5b | $d_e = n_e^{-1/3} = \left( \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p} \right)^{-1/3}$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5c | We assume that<br><br>$d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$. Since<br><br>$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{rms}(electron)}$ ,<br><br>$\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_e v_{rms}^2(electron)$ ,<br><br>$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2}$ ,<br><br>$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}$ , and<br><br>$d_e = \left( \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p} \right)^{-1/3}$ ,<br><br>we get that<br><br>$R \geq \frac{\varepsilon_o^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}}$ | 1.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5d | $R \geq \frac{\varepsilon_o^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.10 \ R(Sun)$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5e | The mass to radius ratio is:<br>$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2} = 2.4 \times 10^{21}$ kg m$^{-1}$, from where we derive that<br>$M \geq 1.7 \times 10^{29}$ kg = 0.09 $M(Sun)$ | 0.5 |

*6) Fusing helium nuclei in older stars.*

| | | |
|---|---|---|
| 6a | For helium we have that<br>$\frac{4q^2}{4\pi \varepsilon_0 m_{He} v_{rms}^2(He)} = \frac{h}{2^{1/2} m_{He} v_{rms}(He)}$; from where we get<br>$v_{rms}(He) = \frac{2^{1/2} q^2}{\pi \varepsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6$ m s$^{-1}$.<br>We now use:<br>$T(He) = \frac{v_{rms}^2(He) m_{He}}{3k} = 6.5 \times 10^8$ K.<br>This value is of the order of magnitude of the estimates of stellar models. | 0.5 |

# 实验试题 1
# 确定激光二极管的工作波长

## 实验材料

除了实验说明列出的设备 1）、2）和 3）之外，你还需要：

4）装在一个方柱上的透镜（标记符为“C” ）。

5）一个安放在硬纸框内的刀片（标记符为“D1”），一个带滑槽的有机玻璃支架（标记符为“D1”），一个滑动导轨（标记符为“D2”）。使用时将有机玻璃支架固定到滑动导轨的滑轨上，再将滑动导轨固定在光学平台上。刀片可以在有机玻璃支架上的滑槽内滑动。如有必要，请用改锥（螺丝刀）将固定有机玻璃支架的螺丝拧紧。安装时请参考照片。

6）一个带有游标尺（1/20mm）的观察屏（标记符为“E” ）。

7）一个放大镜（标记符为“F” ）。，

8）一把 30cm 的直尺（标记符为“G” ）。

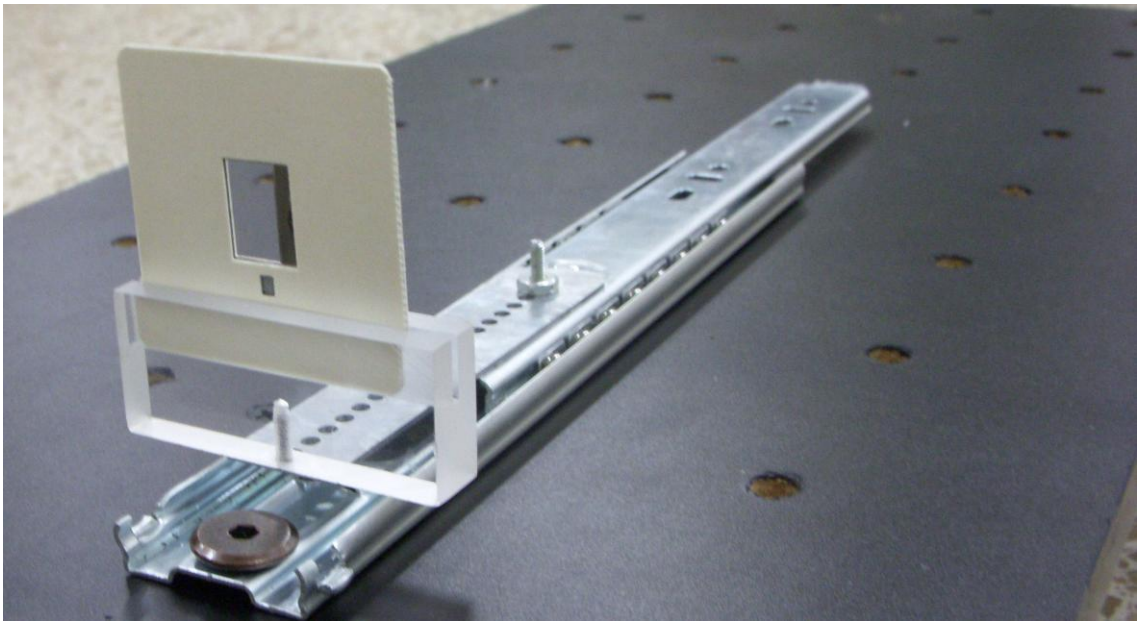
9）一把游标卡尺（标记符为“H” ）。

10）一个钢卷尺（标记符为“I” ）。

11）一个计算器。

12）若干白卡片，胶带，粘贴纸，剪刀，三角尺等。

13）铅笔、纸、绘图纸。



安放在硬纸框内的刀片被置于一个带滑槽的有机玻璃支架上（标记符为“D1”），该支架又被固定到一个滑动导轨上（标记符为“D2”）。

## 实验描述

实验要求你测量二极管激光的波长。这个测量的特点是没有任何微米标尺（例如没有事先刻好的衍射光栅）可用。最小测量长度是毫米量级。这里的波长需要用光在锋利的刀片边缘的衍射来测量。

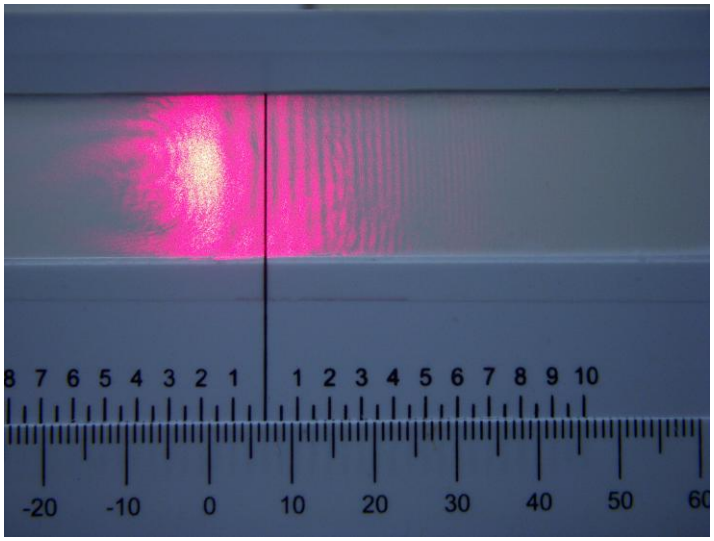



图 1.1 典型的干涉图像。

当激光束（A）经反射镜（B）反射后，须让它通过一个透镜（C），该透镜的焦距约为几个厘米。可以假设焦点是一个点光源，球面波从该点发出。激光束经过透镜后在其光路上受到锋利刀片的边缘阻碍。刀片边缘可以当作一个发出柱面波的光源。上述球面波和柱面波在前方相互干涉，形成能在屏上被观测到的衍射图像。参见图 1.1 中的典型图像的照片。

有两种重要的光路配置的情形，分别由图 1.2 和 1.3 示意。

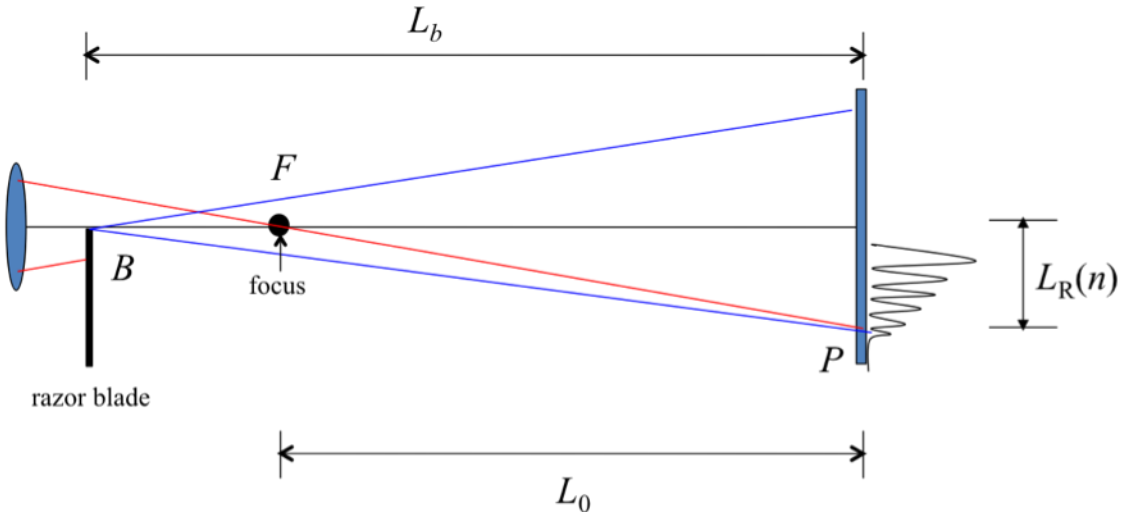



图 1.2. 情形（I）. 刀片在透镜的焦点之前。该图未按比例绘制。

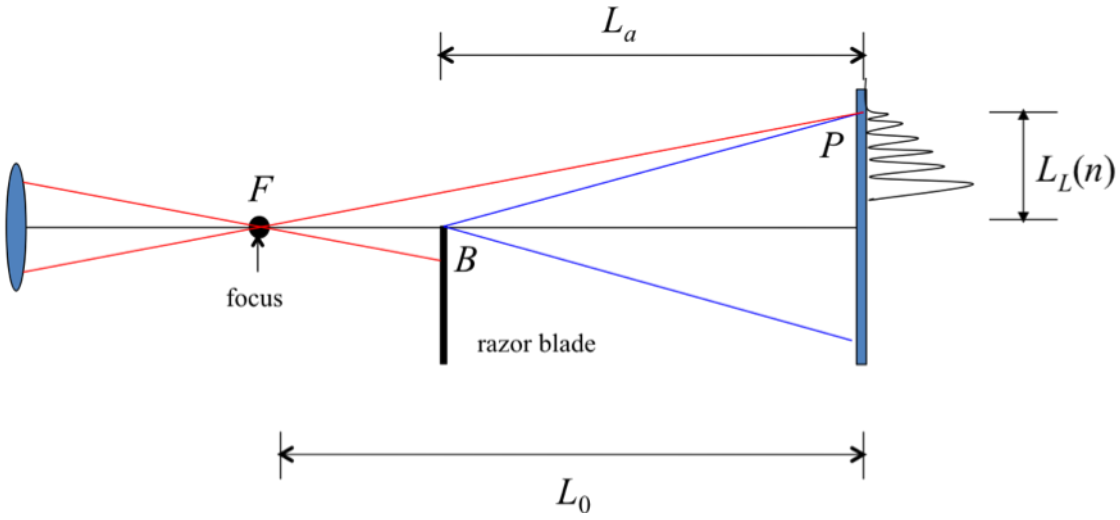



图 1.3. 情形（II）. 刀片在透镜的焦点之后。该图未按比例绘制。

**实验装置**

**任务 1.1 实验装置（1.0 分）**设计一套光路，以获得前面所述的干涉图像。要保证从焦点到屏的距离$L_0$要远大于焦距。

1）在所给的光学平台图版上绘出你的实验装置的草图，即在光学平台图版上标出不同设备的**“标记符”**，还可以在此基础上加画一些简单内容以使你的设计更清楚。

2）你可以用一张白卡片来跟踪光束的路线，以帮助调节激光束的方向。

3）在实验装置草图上示意绘出激光束的传播路线，给出测得的激光束相对于光学平台的高度 *h*.

**注意：忽略可能出现的较大的圆形图斑，这是由激光二极管本身导致的结果。**

用一些时间来熟悉你的上述实验装置。你应该能在屏上看到 10 来条竖直的线状条纹。你要读的是暗纹的位置。你可以用放大镜更清楚地看到条纹的位置。**观察条纹最好的位置是在被照射的屏（E）的背面**。所以，屏上的标尺应该面向光学平台外侧。如果光路正确，只需简单滑动导轨（D2）使刀片（D1）前后移动，你就能分别看到情形 I 和情形 II 对应的两种衍射条纹花样。

**理论考虑**

由前述图 1.2 和 1.3 知， 有 5 个基本长度。

$L_0$ : 从焦点到屏的距离。
$L_b$ : 从刀片到屏的距离，情形 I。
$L_a$ : 从刀片到屏的距离，情形 II。
$L_R(n)$: n 级暗纹的位置，情形 I。

$L_L(n)$: n 级暗纹的位置，情形 II。

无论是情形 I 还是情形 II，第一个暗纹都是最宽的一个，对应 $n = 0.$

你的实验装置必须满足：对情形 I，$L_R(n) << L_0, L_b$；对情形 II，$L_L(n) << L_0, L_a$ .
光波的干涉现象是由于同一点发出的光波的光程差造成的。根据相位差的不同，波可以相消（相消干涉）形成暗纹；波也可以相长（相长干涉）写成亮纹。

详细分析这些波的干涉，可给出如下产生暗纹的条件。对情形 I：

$$\Delta_{\mathrm{I}}(n) = \left(n + \frac{5}{8}\right)\lambda \qquad \text{当} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

对情形 II:

$$\Delta_{\mathrm{II}}(n) = \left(n + \frac{7}{8}\right)\lambda \quad \text{当} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

这里 $\lambda$ 是激光束的波长，$\Delta_{\mathrm{I}}$ 和 $\Delta_{\mathrm{II}}$ 分别是两种情形光程差。

情形 I 中的光程差是

$$\Delta_{\mathrm{I}}(n) = (BF + FP) - BP \qquad \text{当} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

而对情形 II 是：

$$\Delta_{\mathrm{II}}(n) = (FB + BP) - FP \qquad \text{当} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

**任务 1.2 光程差的表达式（0.5 分）**。 假设公式(1.3) 和 (1.4) 分别满足：情形 I，$L_R(n) << L_0, L_b$；情形 II，$L_L(n) << L_0, L_a$（需要确认你的装置的确满足这些条件），求出 $\Delta_{\mathrm{I}}(n)$ 和 $\Delta_{\mathrm{II}}(n)$ 近似表达式，结果用 $L_0$, $L_b$, $L_a$, $L_R(n)$ 和 $L_L(n)$ 表示出来。当 $x << 1$ 时，你可以用近似公式 $(1+x)^r \approx 1 + rx$ .

使用上述公式的实验困难是 $L_0$, $L_R(n)$ 和 $L_L(n)$ 不能精确测量。$L_0$ 测不准的原因是不容易找到透镜焦点的位置；后两个量测不准的原因是它们的零点位置非常难以确定。

为解决 $L_R(n)$ 和 $L_L(n)$ 的测量困难，可以选择屏（标记符为“E”）标尺的零点（0）作为你测量所有条纹位置的参考零点。令 $l_{0R}$ 和 $l_{0L}$ 分别为定义 $L_R(n)$ 和 $L_L(n)$ 时所用的零点位置，此时，它们实际上是未知的。再令 $l_R(n)$ 和 $l_L(n)$ 为条纹到你选取的原点的距离。因此，

$$L_R(n) = l_R(n) - l_{0R} \qquad \text{和} \qquad L_L(n) = l_L(n) - l_{0L} \tag{1.5}$$

## 实验操作和数据分析处理

## 任务 1.3 测量暗条纹的位置和刀片的位置（3.25 分）

- 对情形 I 和情形 II，分别测量不同条纹编号 $n$ 下暗条纹的位置 $l_R(n)$ 和 $l_L(n)$。将测量结果记入表 I 中。对每种情形，测量的条纹位置数要尽可能达到或超过 8。
- 还要报告测得的刀片位置 $L_b$ 和 $L_a$，并注明所用测量仪器（用该仪器的标记符标记）
- **重要建议：**为分析简单和结果精确起见，不要由 $L_b$ 和 $L_a$ 计算得到 $d = L_b - L_a$，而是要直接测量。仪器的标记符标明你测量 $d = L_b - L_a$ 时所用的仪器。

**你的测量结果必须要包括不确定度**

**任务 1.4 数据分析处理（3.25 分）** 由现有的信息你已经可以得出 $l_{0R}$ 和 $l_{0L}$，当然也包括波长 $\lambda$ 的值。

- 设计一个方案来得到这些值，并写出所需的表达式或方程。
- 结果要包括误差分析。你可以用表 I，也可以用自己的表来给出你的结果，但要确保你的表中各栏名称能清楚反映其内容。
- 用所给的图纸选用适当变量画图得到所需量。
- 分别写出带不确定度的 $l_{0R}$ 和 $l_{0L}$ 的值。

**任务 1.5 计算 $\lambda$** 写出 $\lambda$ 值的计算结果。其中包括不确定度和得到它的过程。**建议：**在计算 $\lambda$ 时，凡出现 $(L_b - L_a)$ 之处，均可以用 d 代替，并使用 d 的测量值来作计算。（2 分）

# 实验试题2

# 云母的双折射

本实验的目的是测定云母的双折射量。

## 实验器材

除1）、2）、3）项实验器材外，还需使用：

14）两片装在幻灯片框内的偏振片。每个偏振片还配有一个有机玻璃座（标记符为J）。参见装配说明照片。

15）一个装在小塑料圆桶内的云母薄片。小塑料圆桶外部有不 标数字的刻线（标记符为K）。
参见装配说明照片。

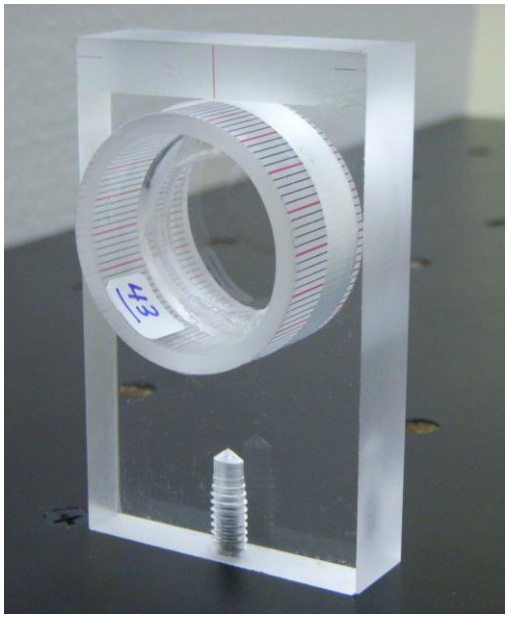
16）光探测装置，包括：一个装在塑料盒中的光探测器、连接用导线、用于光探测器的固定泡沫
套。用一个万用表来测量光探测器的输出电压（标记符为L）。参见装配和连线说明照片。

17）计算器。

18）指示激光束用白色厚纸片、胶带、剪刀、三角尺。

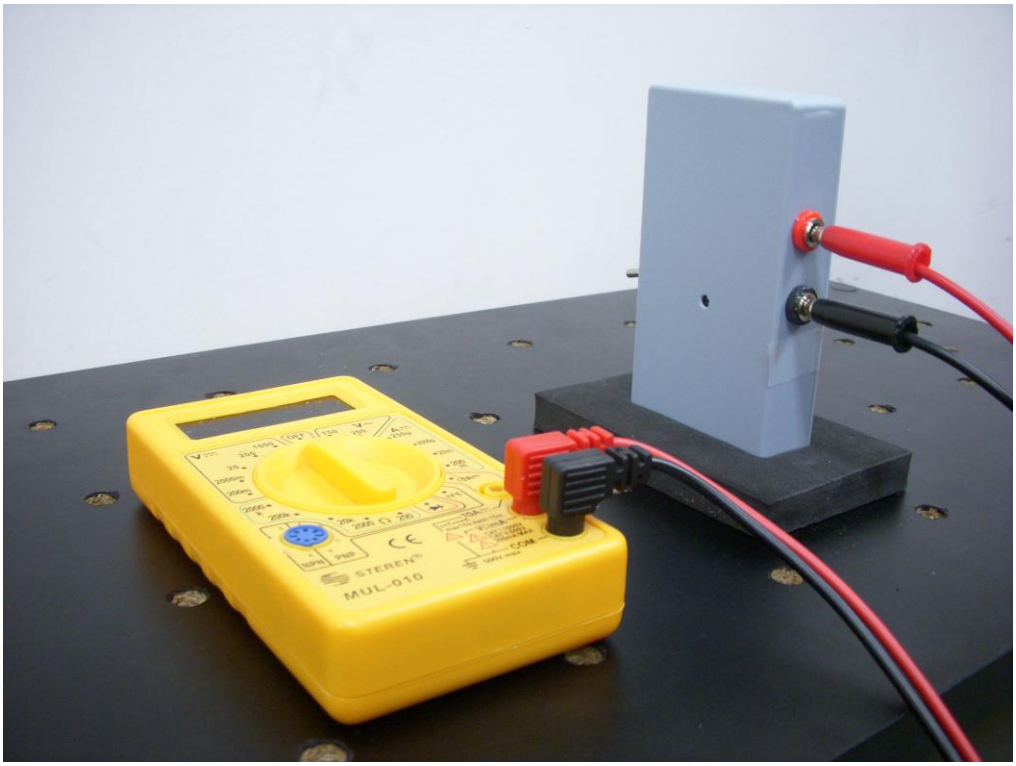
19）铅笔、纸、坐标纸。



装在幻灯片框内配有有机玻璃座的偏振片（标记符为J）。

装在外部有不代数字的刻线的小塑料圆桶内的云母薄片（标记符为K）。




一个装在塑料盒中的光探测器、连接导线、泡沫 套 。用来测量光探测器的输出电压的万用表（标记符为L）。按此照片连线。

## 现象的描述

光是电磁波，其电场方向与传播方向垂直。

如果电场方向始终保持在同一平面内，则称光波为线偏振光。见图 2.1。

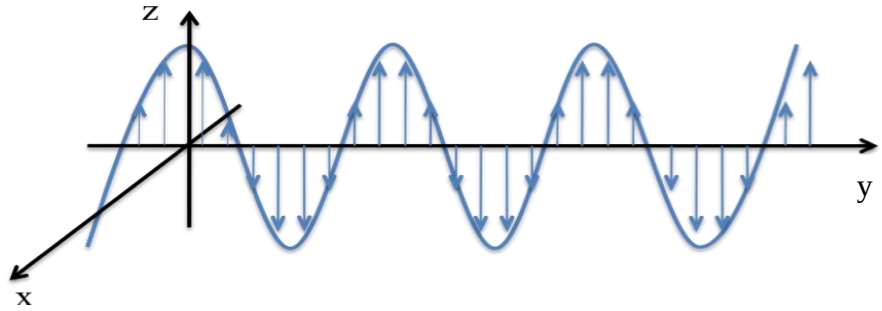



**图 2.1** 偏振方向为 z 方向，传播方向为 y 方向的光波。

偏振片只允许电场方向与透振方向一致的光波通过。（将与透振方向平行的方向记为(+)方向，与透振方向垂直的方向记为(−)方向）

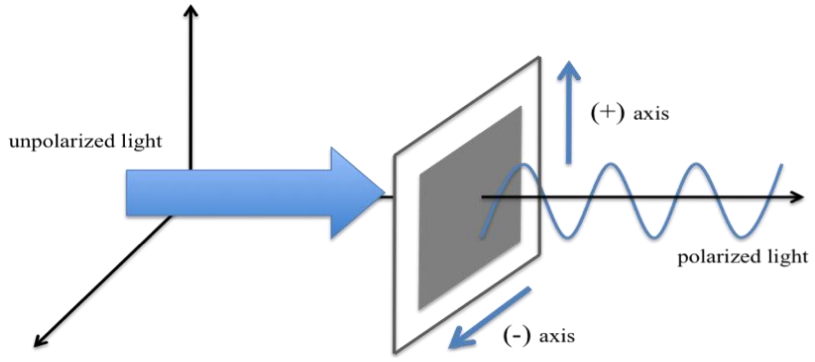



**图 2.2 非偏振光正入射到偏振片上。透射光为沿透振方向偏振的光。**

一般的透明材料不改变光波的偏振方向。但许多晶体，包括云母，它们的折射率与电场的方向有关。对于传播方向与云母片表面垂直的光，云母薄片有两个相互垂直的特殊轴向，我们称之为轴 1 和周 2 。

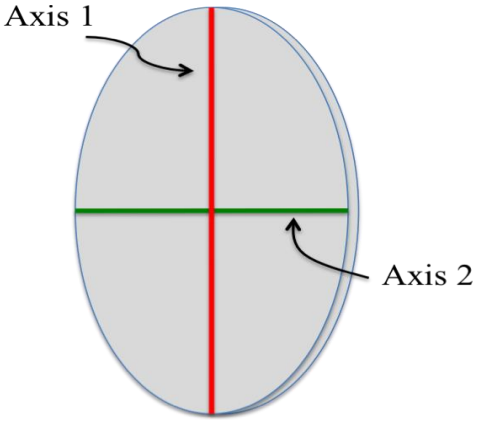



**图 2.3** 云母薄片的两个特殊轴向, 轴 1 (红) 和轴 2 (绿)。

作为双折射的例子我们分析一下两个简单的情况。假设竖直偏振的光波正入射到云母薄片的表面。

**情形 1)** 轴 1 或轴 2 与入射光波偏振方向平行。光波偏振方向不发生变化。云母相当于折射率为 $n_1$ 或 $n_2$ 的介质。见图 2.4 和图 2.5。

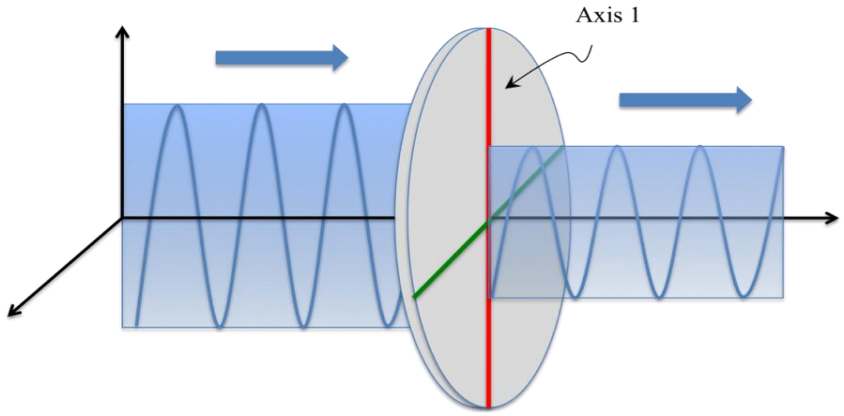



**图 2.4** 轴 1 与入射光波偏振方向平行。折射率为 $n_1$。

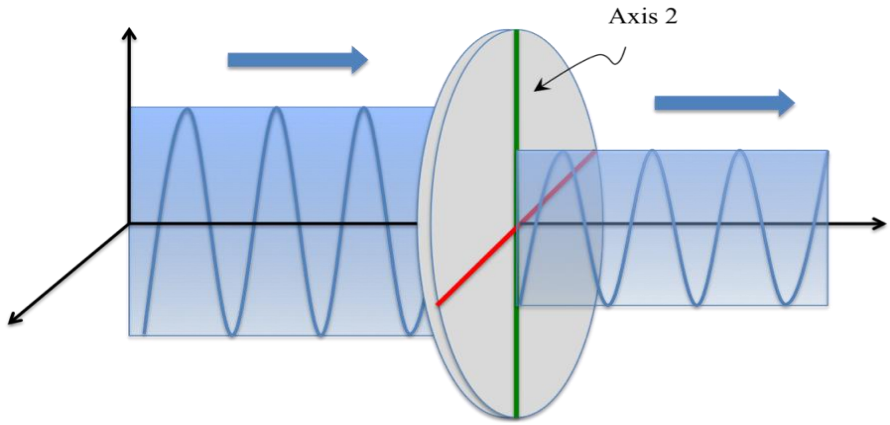



**图 2.5** 轴 2 与入射光波偏振方向平行。折射率为 $n_2$。

**情形 2) 轴 1 与入射光波偏振方向有夹角 $\theta$** 。此时透射光波可看作是相位不同的垂直偏振（与入射波偏振方向平行）光波和水平偏振（与入射波偏振方向垂直）光波的叠加。

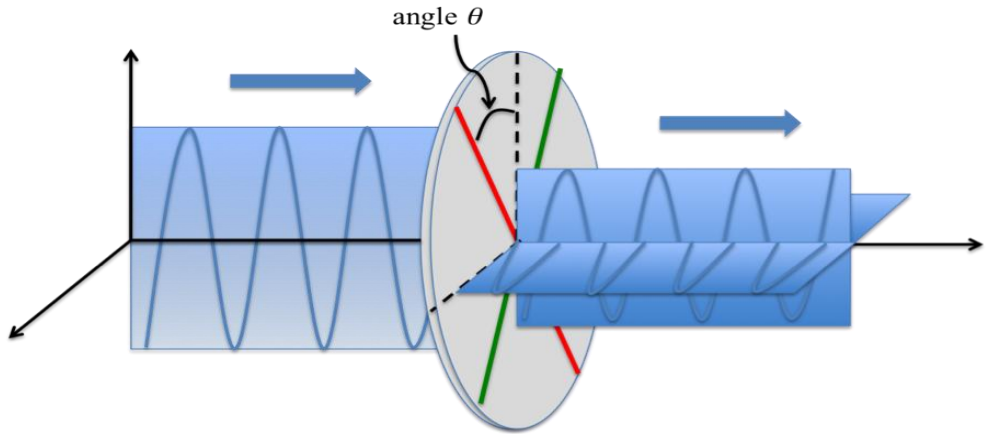


**图 2.6 轴 1 与入射光波偏振方向有夹角 $\theta$ 。**

将偏振方向与入射波偏振方向平行的光波的光强记作 $I_P$，将方向与入射波偏振方向垂直的光波的光强记作 $I_O$。这两个光强的大小与夹角 $\theta$、波长 $\lambda$ 、云母片厚度 $L$ 以及折射率差 $|n_1 - n_2|$ 有关。折射率差 $|n_1 - n_2|$ 被称为介质的双折射量。本实验的目的就是测量云母的双折射量。与偏振片配合，双折射介质可用来控制光波的偏振态。

需要指出的是，光探测器测量的是照射到探测器上的光强，与光波的偏振态无关。

由于还与其它因素（如云母对光波的吸收）有关，$I_P(\theta)$ 和 $I_O(\theta)$ 与夹角 $\theta$ 的关系是十分复杂的。我们定义归一化光强

$$\bar{I}_P(\theta) = \frac{I_P(\theta)}{I_P(\theta) + I_O(\theta)} \tag{2.1}$$

及

$$\bar{I}_O(\theta) = \frac{I_O(\theta)}{I_P(\theta) + I_O(\theta)} \tag{2.2}$$

$\bar{I}_P(\theta)$ 和 $\bar{I}_O(\theta)$ 与夹角 $\theta$ 有简单的近似关系,

$$\bar{I}_P(\theta) = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos\Delta\phi)\sin^2(2\theta) \tag{2.3}$$

及

$$\bar{I}_O(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos\Delta\phi)\sin^2(2\theta) \tag{2.4}$$

这里相位差 $\Delta\phi$ 由下式给出

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}|n_1 - n_2| \tag{2.5}$$

其中 $L$ 是云母薄片的厚度、$\lambda$ 是入射光的波长、$|n_1 - n_2|$ 为双折射量。

## 实验装置

**任务 2.1** 测量光强的实验装置。设计一个测量透射光的 $I_P$ 和 $I_O$ 光强与夹角 $\theta$ 关系的装置（见图 2.6）。$\theta$ 可以是与两个光轴中任意一个光轴的夹角。**设计结果采用在光学平台的示意图上相应位置处标出所用实验器材的标记符为的方式来表达。**要用

(+)或(−)来标记偏振片透振方向的平行和垂直。可以在示意图上画简单的线条以式你的设计表达得更清楚。

任务 2.1 a) 测量 $I_P$的装置 **(0.5 分)。**
任务 2.1 b) 测量$I_O$ 的装置**(0.5 分)。**

**激光束的调整。**调整激光束，使其与光学平台平行，并通过装有云母薄片的圆筒的中心。可用提供的白色厚纸片确定激光束的位置。可以用反射镜对光束作小的调整。

**光探测器和万用表。**当有光照射到光探测器上时，光探测器有电压输出。用所提供的万用表测量这个电压。光探测器输出的电压与光强成正比。所以用光探测器的输出电压来记录光强。在没有激光入射到光探测器上的情况下，可以测量背景光强。背景光强对应的输出电压应小于 1 mV。在进行光强测量时**不要**作背景光强修正。

**注意**: 激光束是部分偏振的且方向未知。故在仅加入起偏器时，先要转动激光器使透过的光强最大，这样才能确保在后面的实验中得到较大的光强。

## 光强测量

**任务 2.2 角度刻度的标定。**装有云母薄片的圆筒外部有等角度的刻线。写出最小间隔（即两条相邻刻线之间的间隔）所对应的角度（用度表示）。 **(0.25 分)。**

**（近似）确定$\theta$的零点位置和/或云母片光轴的位置。**找到夹角$\theta$等于 0 的位置对数据分析是十分重要的。 我们建议首先确定云母的一个光轴（轴 1）的位置。几乎可以肯定的是这个位置不与任何刻线重合。因此先选择最接近此位置的刻线作为夹角的临时原点，将从临时原点出发测量的角度记为$\bar{\theta}$。稍后你会被要求确定$\theta$零点的更精确的位置。

**任务 2.3 测量 $I_P$ 和 $I_O$.** 对于你认为必要的多个$\bar{\theta}$取值，测量光强$I_P$ 和 $I_O$。将测量结果填入表 1 中。应在同一云母片位置（即相同的$\bar{\theta}$取值）分别测量光强$I_P$ 和 $I_O$。**(3.0 分).**

**任务 2.4 确定$\theta$零点的正确位置**。$\theta$角的零点由轴 1 的位置定义。正如前面所强调的，几乎可以肯定的是轴 1 的位置不与圆筒上的任何刻线相重合。你可以选择采用作图的方法或数值计算的方法来确定$\theta$角的零点。在极大值或极小值附近，光强曲线可用抛物线来近似:

$$I(\bar{\theta}) \approx a\bar{\theta}^2 + b\bar{\theta} + c$$

抛物线的极大值或极小值点由下式给出

$$\bar{\theta}_m = -\frac{b}{2a}.$$

确定了$\theta$角的零点后就可以将任务 2.3 表 1 中的$\bar{\theta}$值加上一个偏移量$\delta\bar{\theta}$得到正确的$\theta$ 的值：$\theta = \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}$。写出偏移量$\delta\bar{\theta}$的值，结果用度表达。**(1.0 分)。**

**数据分析**

**任务 2.5 选择适当的变量。**选择$\bar{I}_P(\theta)$ 或 $\bar{I}_O(\theta)$进行分析，以求得相位差$\Delta\phi$的值。说明你所选择的变量。 **(0.5 分)。**

**任务 2.6 数据分析与相位差**

- 将数据分析所用变量的值填入表2中。确定使用的是修正了的角度$\theta$的值。包含不确定量。在坐标纸上仅画出你的数据点。**(1.0 分)。**

- 以获得得到相位差$\Delta\phi$为目的，对上面的数据作统计分析。给出你的结果及结果的不确定量。写出分析中所用到的方程或公式。将此处统计分析得到的结果，以直线的形式画在（已标有数据点的）坐标纸上。**(1.75 分)。**

- 计算相位差$\Delta\phi$及其不确定度的值，结果用弧度表示。在区间$[0,\pi]$确定相位差的值。 **(0.5 分).**

**任务 2.7 计算双折射量**$|n_1 - n_2|$。注意到在相位差$\Delta\phi$上增加$2\pi$ 的整数倍或改变$\Delta\phi$的符号，都不会改变光强的大小，但双折射量$|n_1 - n_2|$却会改变。所以在采用任务2.6中得到的$\Delta\phi$来计算双折射量$|n_1 - n_2|$时须作如下处理:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}|n_1 - n_2| \qquad \text{如} \qquad L < 82\times10^{-6}\ \text{m}$$

或

$$2\pi - \Delta\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}|n_1 - n_2| \qquad \text{如} \qquad L > 82\times10^{-6}\ \text{m}$$

这里$L$是云母片的厚度，其值可以在装云母片的小圆筒上找到，单位为微米 (1 微米 = $10^{-6}$ m)。$L$ 的不确定量可取为 $1\times10^{-6}$m。你可用实验试题1中得到的激光波长作为这里的波长，也可以用红光区间 $620\times10^{-9}$ m 至 $750\times10^{-9}$ m 的平均值作为这里的波长。写出$L$ 、$\lambda$ 和 $|n_1 - n_2|$ 的值及不确定量，并写出用于不确定量计算的公式。 **(1.0 分)。**