水力舂米机

A. 引言

在越南，大米是大部分人口的主要粮食。把稻谷变成大米需要经过去皮和碾碎的舂米过程。越南北部的丘陵地带有众多的溪流，那里的居民采用水力舂米机来舂米。图 1 显示的是一个这样的舂米机，图 2 显示水力舂米机是如何工作的。

B. 设计和运行

1. 设计

图 1 显示的舂米机包含以下部分：

米臼 —— 一个木制的稻米容器；

杠杆 —— 一个一端大一端小的树干。杠杆可以绕一个水平轴转动。一个木杵垂直地安装在杠杆的较小的一端。杠杆处于水平位置时木杵正好可以触及米臼中的稻米。杠杆的较大的一端上凿有水槽。水槽的形状在舂米机的运行中起着关键作用。

2. 运行模式

舂米机有两个模式。

工作模式 在这个模式下舂米机按照图 2 所显示的循环运行。

舂米机舂米的功能是通过木杵传递给稻米的机械功来实现的。这一机械功的传递在图 2 中所显示的（f）段完成。如果由于某种原因木杵不能触及米臼中的稻米，则我们说舂米机不工作。

杠杆抬起的静止模式 在循环的（c）段（见图 2），随着倾角 α 的增加，木槽中的水量将减少。在某一特定的时刻，木槽中水的重量刚好可以使杠杆平衡。将此时的倾角记为 β 。如果将杠杆放置在倾角为 β 的位置，并使其初角速度为零，则杠杆将永远保持在此平衡位置。这就是杠杆抬起的静止模式。在平衡位置上的杠杆的稳定性取决于流入水槽的水的流量，Φ。如果 Φ 超过某一值 Φ_2，则静止模式是稳定的，此时舂米机不能进入工作模式。换言之，Φ_2 是使舂米机不工作的最小水流量。



图 1
水力舂米机

水力舂米机的工作循环

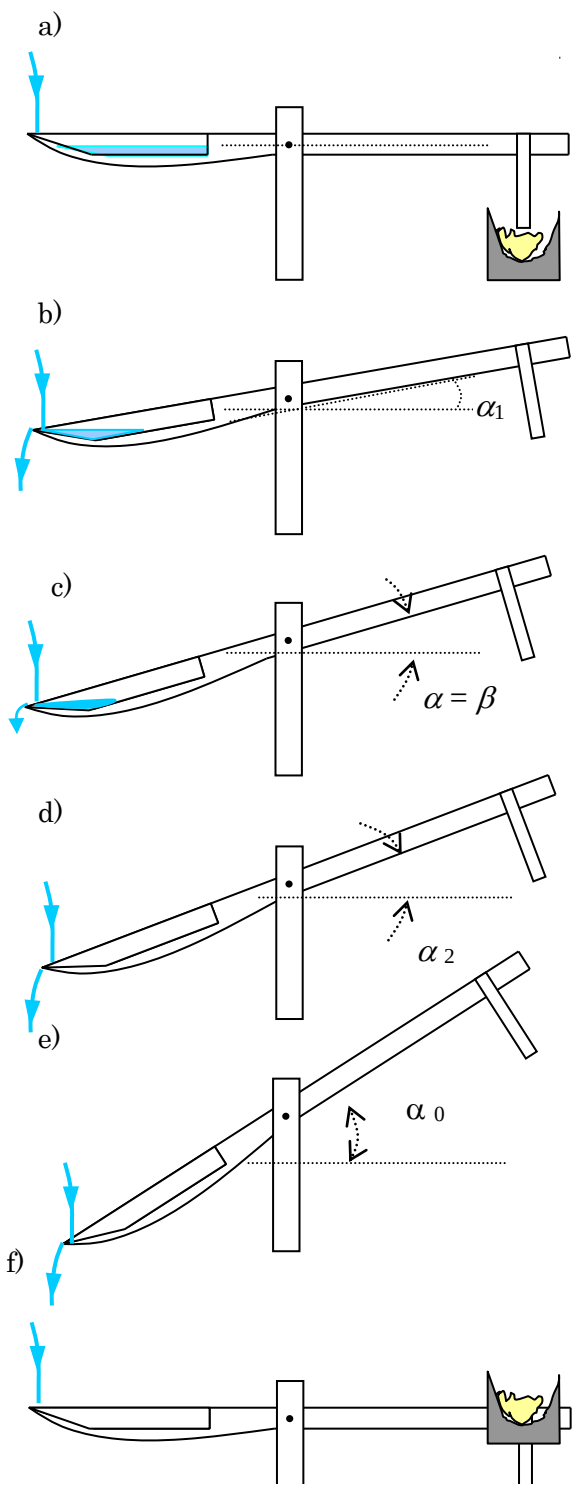


图 2.

a) 在初始状态，水槽是空的，木杵停在米臼中。之后水以较小的流量流入水槽，在一段时间内杠杆保持在水平位置上。

b) 到了某一时刻，水槽中有了足够多的水而使杠杆抬起。由于杠杆的倾斜，水槽中的水会流向水槽的远端，而使杠杆倾斜得更快。倾角达到 $\alpha = \alpha_1$ 时水开始从水槽中溢出。

c) 随着倾角 α 的增加，水开始从水槽中溢出。在某一特定的倾角 $\alpha = \beta$ 下，对转轴的总力矩变为零。

d) α 继续增加，水继续从水槽中流出，直至水槽完全流空。

e) α 因杠杆的惯性而继续增加。由于水槽的形状，流入水槽的水会立刻流出。杠杆的惯性运动持续至倾角 α 达到最大值 α_0。

f) 水槽清空后杠杆的自重使其回到初始的水平状态。木杵舂一次米，并开始一个新的循环。

C. 问题

考虑一个具有以下参数的水力舂米机（见图 3），

杠杆的质量（包括木杵，但不包括水槽中的水）为 $M = 30\ \text{kg}$，

杠杆的质心为 G。杠杆的转轴为 T（图 3 中 T 为转轴在纸面的投影）。

杠杆绕 T 转动的转动惯量为 $I = 12\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$。

水槽中水的质量记为 m，水槽中水体的质心记为 N.。

杠杆相对水平面的倾角为 α。

舂米机的主要尺寸已标在图 3 中。

忽略转轴的摩擦和水流对水槽的冲击力。在这道题中假设水槽中的水面总是水平的。

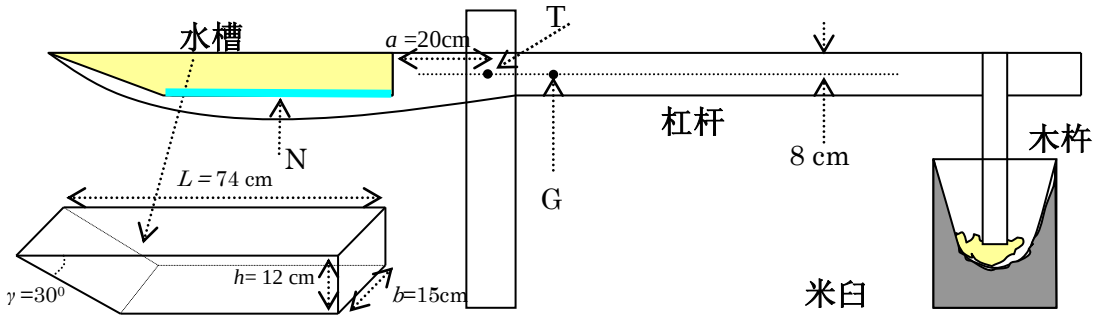


图 3. 水力舂米机的设计与尺寸

1. 舂米机的结构

在初始状态，水槽是空的，杠杆处于水平状态。然后水流入水槽直到杠杆开始转动为止。杠杆开始转动时水槽中的水量为 $m = 1.0\ \text{kg}$。

1.1. 求杠杆的质心 G 到转轴 T 的距离。已知水槽空时，线段 GT 是水平的。

1.2. 水开始从水槽中流出时，杠杆相对水平面的倾角为 α_1。水槽中的水全部从水槽流出时，杠杆相对水平面的倾角为 α_2。求 α_1 和 α_2。

1.3. 令 $\mu(\alpha)$ 为杠杆的重力和水槽中水的重力（相对 T 轴）的总力矩。当 $\alpha = \beta$ 时 $\mu(\alpha)$ 为 0。求 β 和 $\alpha = \beta$ 时水槽中水的质量 m_1。

2. 工作模式的参数

让水以小且恒定的流量 Φ 流入水槽中。在杠杆运动过程中流入水槽中的水量可以忽略。在这一部分问题中，我们忽略舂米机的转动惯量在运行过程中的变化。

2. 1. 画出在一个循环过程中，力矩 μ 随倾角 α 变化关系，即 $\mu(\alpha)$，的

草图。明确标出倾角为 α_1、α_2 和 $\alpha=0$ 时 $\mu(\alpha)$ 的值。

2. 2. 根据 2. 1. 节中得到的关系图，讨论并给出力矩 $\mu(\alpha)$ 所做的总功 W_{total} 以及由木杵传递给稻米的机械功 W_{pounding} 的几何表述。

2.3. 根据 μ 随倾角 α 变化的草图，估算最大倾角 α_0 和机械功 W_{pounding}（假设流入和流出水槽的水的动能可以被忽略）。可以用折线代替曲线以简化计算。

3. 静止模式

让水以恒定的流量 Φ 流入水槽中，但在杠杆运动过程中流入水槽中的水量不能被忽略。

3.1. 假设总有水从水槽中溢出。

3.1.1 在 $\alpha=\beta$ 附近画出力矩 μ 随倾角 α 变化的草图。杠杆在 $\alpha=\beta$ 处的平衡属于哪一种平衡？

3.1.2 当 $\alpha=\beta+\Delta\alpha$（$\Delta\alpha$ 为小量）时，导出 $\mu(\alpha)$ 随的 $\Delta\alpha$ 变化的解析表达式。

3.1.3 设杠杆以为零初速度从位置 $\alpha=\beta+\Delta\alpha$（$\Delta\alpha$ 为小量）开始运动，写出杠杆的运动方程。试证明，在很好的精度内，杠杆的运动是简谐振动，并计算振动周期 τ。

3.2. 在一个给定的流量 Φ 下，只有当杠杆运动得足够缓慢时才会总有水从水槽中溢出。杠杆简谐振动的振幅有一个与 Φ 有关的上限。求杠杆能以 1° 的振幅做简谐振动时水流量 Φ 的最小值 Φ_1（单位取 kg/s）。

3.3. 假设流量 Φ 足够大，使得杠杆在倾角由 α_2 减小到 α_1 的自由运动过程中，水槽中总有水溢出。但是如果流量 Φ 过大，则舂米机不能工作。假设杠杆的运动是简谐振动，估算使舂米机不能工作的最小水流量 Φ_2。

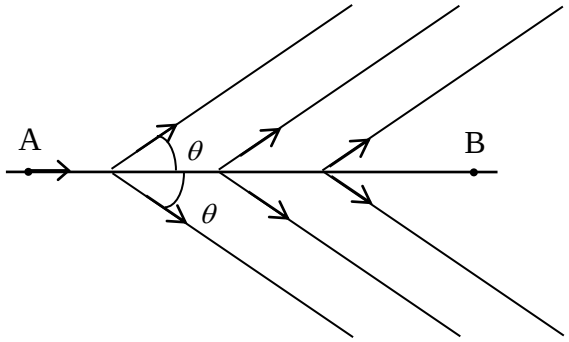
北京大学物理学院　　王若鹏　荀坤　陈晓林　　译

切仑可夫光和环行图像计数器

光在真空中以光速c传播。不存以大于真空光速c的速度运动的粒子。但在透明的介质中，粒子可以以大于介质中的光速$\frac{c}{n}$的速度v运动。这里n是介质的折射率。契仑可夫的实验（1934年）和塔姆和弗兰克的实验（1937年）都显示：如果一个带电的粒子在折射率为n的透明介质中的运动速度$v>\frac{c}{n}$，那么这个带电粒子将辐射出光。这种光称为切仑可夫光。这种光的传播方向与粒子的运动方向之间的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{1}{\beta n} \qquad (1)$$

这里$\beta=\frac{v}{c}$.



1、为了得到上述结论，我们考虑一个以速度$v>\frac{c}{n}$沿一条直线运动的粒子。该粒子在0时刻经过A点，在t_1时刻经过B点。由于该问题具有关于AB连线的旋转对称性，因此只需要考虑AB所在的某一平面内的光线就可以了。

在A、B之间的任一点C，粒子发出以速度$\frac{c}{n}$传播的球面光波。我们把t时刻粒子在各点发出的球面波的包络面定义为该时刻的波前。

1.1、求t_1时刻的波前，并画出该波前与包含粒子轨迹的平面的交线。

1.2、用n和β表达上述交线与粒子运动轨迹之间的夹角φ。

2、考虑一束以速度$v>\frac{c}{n}$沿直线 IS运动的粒子，并使θ的值较小。该粒子束与一个焦距为f，球心为C的球面凹面镜相交于S点。SC与SI 相交成一个小角度α（见答题纸上的图）。粒子束在凹面镜的焦平面上产生一个环形的像。通过画草图解释产生这一现象的原因。求该环形像的中心O的位置和半径r。

这种原理被用于切仑可夫环形图像计数器（简称RICH）中，这里粒子通过的介质称为“辐射器”。

注意：到目前为止的所有问题中，α和θ的高阶项可以被忽略。

3、一粒子束由动量为 $p = 10.0\ \mathrm{GeV}/c$ 的3种粒子组成：质子、K介子、π介子，这 3 种粒子的静质量分别为：$M_{\mathrm{p}} = 0.94\ \mathrm{GeV}/c^2$、$M_{\kappa} = 0.50\ \mathrm{GeV}/c^2$ 和 $M_{\pi} = 0.14\ \mathrm{GeV}/c^2$。记住 pc 和 Mc^2 都具有能量的量纲，并且1eV是一个电子在被1V（伏特）电压加速的过程中所获得的能量，1GeV＝10^9 eV，1 MeV = 10^6 eV.

一束粒子穿过压强为 P 的空气（即“辐射器”）。空气的折射率 n 与空气的压强之间 P 有以下关系：

$n = 1 + aP$，这里 $a = 2.7\times10^{-4}\ \mathrm{atm}^{-1}$

3.1、对上述3种粒子，分别计算使它们能够产生切仑可夫光时所对应的最小空气压强 $P_{\min}$。

3.2、计算：K介子产生的环形图像的半径等于π介子产生的图像的半径的一半时的压强 $P_{\frac{1}{2}}$。计算这时相应的角度 θ_{κ} 和 θ_{π}。

在上述压强下是否可能观测到质子产生的环形像？

4、现在假设粒子束不是完全“单色”的，即粒子的动量分布在以 $10\,\mathrm{GeV}/c$ 为中心，以 Δp 为半高半宽的一个区间内。非“单色”性将使环形像展宽，相对应的 θ 分布的半高半宽为 $\Delta\theta$。这里“辐射器”的压强为3.2中确定的压强 $P_{\frac{1}{2}}$。

4.1、计算 $\dfrac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p}$ 和 $\dfrac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p}$，即分别对应 K介子和π介子的 $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta p}$ 值。

4.2、当两个环形图像的角间隔 $\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}$ 大于半高半宽之和 $\Delta\theta = \Delta\theta_{\kappa} + \Delta\theta_{\pi}$ 的10倍时，即 $\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10\,\Delta\theta$ 时，这两个环形图像能够被分辨开来。求能够保证分辨这两个环形图像的 Δp 的最大值。

5、当切仑可夫第一次发现以他的名字命名的现象时，他是在观察一瓶放在辐射源附近的水。他观察到了瓶中水的发光。

5.1、一个静质量为 M 的粒子在水中运动，并发出切仑可夫光。已知水的折射率为 $n = 1.33$。求该粒子的最小动能 $T_{\min}$。

5.2、切仑可夫所使用的辐射源能放射出α 粒子（即氦原子核）和β 粒子（即电子），它们的静质量分别为 $M_{\alpha} = 3.8\ \mathrm{GeV}/c^2$ 和 $M_{\mathrm{e}} = 0.51\ \mathrm{MeV}/c^2$。计算α 粒子

和β 粒子所对应的$T_{\min}$的值。

已知辐射源放射出的粒子的动能不超过若干个MeV，确定切仑可夫观察到是哪种粒子的辐射。

6、在本题的前几个部分中，我们忽略了切仑可夫现象与波长λ的关系。而事实上，一个粒子的切仑可夫辐射有一个很宽的、包含可见光波段（波长从0.4μm到0.8μm）的连续光谱。我们也知道上述光谱范围内，随波长λ的增加，“辐射器”的折射率n线性减少$n-1$的2%.

6.1. 考虑一束在6 atm（大气压）的空气中以确定的动量10.0 GeV/c运动的π介子，求与上述可见光波段的两端的波长对应的角度之差$\delta\theta$。

6.2. 在此基础上，研究π介子的环形图像的色散效应。已知π介子的动量分布在以$p=10$ GeV/c为中心，以$\Delta p=0.3$ GeV/c为半高半宽的范围内。

6.2.1. 分别计算由于色散现象（折射率的变化）和由于粒子束的非“单色”（即粒子的动量变化）引起的像展宽。

6.2.2. 描述环形像由内向外的颜色变化。在答题纸上选择适当的空格画勾。

空气温度随海拔高度的变化，
大气的稳定性与空气污染

空气的垂直运动主导着许多大气过程，如云的形成、降水和空气污染物的扩散。如果大气是**稳定的**，垂直运动会受到限制，空气污染物就倾向于聚集在污染源附近而不会扩散和被稀释。反过来，在**不稳定的**大气中，空气的垂直运动会加快空气污染物在竖直方向的扩散。因此，污染物的浓度不仅依赖于污染源释放污染物的强度，而且还依赖于大气的**稳定性**。

我们将借助气象学中**空气团**的概念来决定大气的稳定性，并且比较在大气中绝热上升或下降的空气团温度和它周围的空气温度。我们将看到，从地面升起的含有污染物的空气团会在某个海拔高度停下来，此海拔高度被称为**混合高度**。混合高度越高，空气污染物的浓度就越低。我们将估计在交通早高峰期河内市区摩托车所发出的一氧化碳浓度和混合高度，这里，由于在海拔 119 米以上存在逆温（空气温度随海拔高度增加而增加），空气在垂直方向的混合将受到限制。

空气可以被看成分子量为 μ = 29 g/mol 的理想双原子气体。

准静态绝热过程遵从方程 $pV^{\gamma}=\text{const}$（const 是常量之意），这里 $\gamma=\dfrac{c_p}{c_V}$ 是气体的等压热容量和等容热容量之比。

如有必要，学生可以使用如下数据：

普适气体常数： $R=8.31$ J/(mol.K).

地面处的大气压： $p_0=$ 101.3 kPa

重力加速度为常数： $g=9.81$ m/s^2

空气的克分子等压热容量： $c_p=\dfrac{7}{2}R$

空气的克分子等容热容量： $c_V=\dfrac{5}{2}R$

数学提示：

a.

$$\int\frac{dx}{A+Bx}=\frac{1}{B}\int\frac{d(A+Bx)}{A+Bx}=\frac{1}{B}\ln(A+Bx)$$

b. 微分方程 $\frac{dx}{dt}+Ax=B$ (其中 A 与 B 是常数)的解为 $x(t)=x_1(t)+\frac{B}{A}$，这里 $x_1(t)$ 是微分方程 $\frac{dx}{dt}+Ax=0$ 的解。

c. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

1. 压强随海拔高度的变化

1.1. 假定大气的温度均匀为 T_0。写出大气压强 p 作为海拔高度 z 的函数的表达式。

1.2. 假定大气温度随海拔高度的变化遵从关系：

$$T(z)=T(0)-\Lambda z$$

这里Λ是一个常数，被称为大气的**温度下降率**（温度的垂直梯度是-Λ）。

1.2.1. 写出大气压强 p 作为海拔高度 z 函数的表达式。

1.2.2. 当空气密度随海拔高度增加而增加时，会发生所谓自由对流。问：当Λ取何值时会发生自由对流？

2. 垂直运动的空气团的温度变化

考虑一个在大气中上下运动的空气团。空气团是一团空气，它的尺度既要大到（约几米）可以被当作一个独立的热力学体系对待，又要小到整个空气团的温度可以被认为是均匀的。空气团的垂直运动可以看成是一个准绝热过程，即空气团与周围空气的热交换可以忽略。如果空气团在大气中上升，它会膨胀并冷却。反过来，如果它向下运动，逐步增加的外部的压强会使空气团内的空气被压缩，从而使其温度增加。

因为空气团的尺寸并不大，空气团边界上不同点的大气压可以被认为具有同样的值 $p(z)$，这里 z 为空气团中心的海拔高度。空气团的温度是均匀的为 $T_{\text{parcel}}(z)$，一般说来并不等于周围空气的温度 $T(z)$。在 2.1 和 2.2 部分，我们并未对 $T(z)$的形式作任何假定。

2.1. 空气团温度 T_{parcel} 随海拔高度的变化率被定义为：$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}=-G$。请推导 $G(T, T_{\text{parcel}})$的表达式。

2.2. 考虑一种特殊的大气条件，此时任何海拔高度 z 的大气温度 T 都等于空气

团的温度T_{parcel}，即$T(z)=T_{\text{parcel}}(z)$。我们用Γ 来标记$T=T_{\text{parcel}}$时的$G$值，即：

$\Gamma=-\dfrac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$（其中$T=T_{\text{parcel}}$）。Γ 被称为温度的*干燥绝热下降率*。

2.2.1. 导出Γ 的表达式。

2.2.2. 计算Γ 的数值。

2.2.3. 导出大气温度作为海拔高度函数的表达式$T(z)$。

2.3. 假定大气温度对海拔高度的依赖关系为$T(z)=T(0)-\Lambda z$，这里Λ 是常数。请给出空气团温度对海拔高度的依赖关系$T_{\text{parcel}}(z)$。

2.4. 当$|\Lambda z| << T(0)$，且 $T(0)\approx T_{\text{parcel}}(0)$时，写出$T_{\text{parcel}}(z)$的近似表达式。

3．大气的稳定性

在此部分，我们假定 T 随海拔高度线性变化。

3.1. 考虑一个开始时与其周围空气（海拔高度为 z_0）达到热平衡的空气团，也即，空气团与周围空气有同样的温度$T(z_0)$。如果此空气团被轻微地向上或向下移动（如由于大气湍流等原因），将会发生下列三种情况之一：

－此空气团会回到原来的海拔高度 z_0，空气团的平衡是稳定的。此时，我们说大气是稳定的。

－空气团将会继续沿原来的方向运动，空气团的平衡是不稳定的。大气是不稳定的。

－空气团会停在它的新位置，空气团是随遇平衡。大气稳定性被称为是中性的。

当Λ取值分别满足什么条件时，大气是稳定的、不稳定的和中性的？

3.2. 如果一个空气团在地面处的温度$T_{\text{parcel}}(0)$高于它的周围空气的温度$T(0)$，浮力将会使空气团上升。当大气是稳定的时，导出此空气团所能达到的最大海拔高度的表达式，用Λ 和 Γ 表示。

4．混合高度

4.1. 表 1 给出了探空气球测到的 11 月的某一天上午 7:00 时河内上空不同海拔高度的温度。温度随海拔高度的变化可以近似地由公式$T(z)=T(0)-\Lambda z$来描述，对于海拔高度的 3 段不同的值，即 0 < z < 96 m, 96 m < z < 119 m, 和 119 m< z < 215 m.，下降率 Λ 是不同的。

考虑一个温度$T_{\text{parcel}}(0)$= 22ºC 的空气团从地面上升。基于表 1 给出的数据，采用上述线性近似，计算空气团海拔高度在 96 米时和在 119 米时的温度。

4.2. 确定此空气团所能达到的最大海拔高度 H 和其在最大海拔高度处的温度

$T_{\text{parcel}}(H)$。

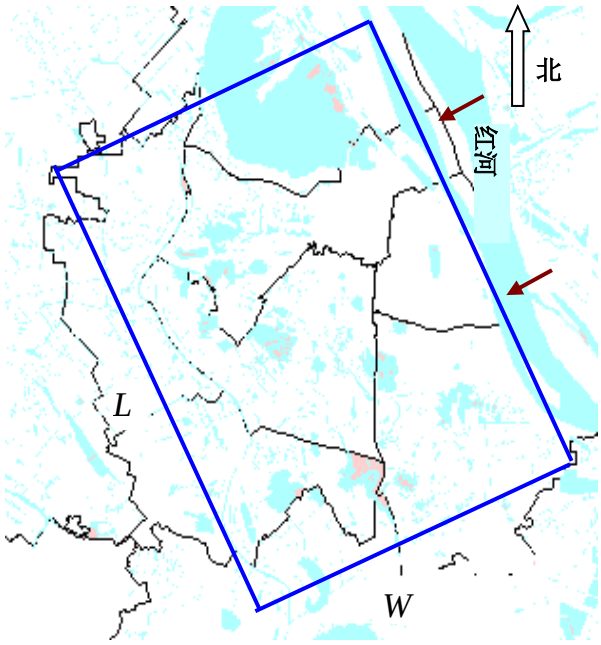
H 被称为混合高度。地面附近放出的污染物会和大气中的空气混合（如借助风、湍流和扩散等）并在低于此高度的空气层内被稀释。

表 1 探空气球记录到的 11 月的某一天上午 7:00 河内上空温度随海拔高度的变化

海拔高度，m	温度，°C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5．估计河内交通早高峰时段摩托车产生的一氧化碳（CO）污染

如下图所示，河内市区可以近似看成一个长为 L 宽为 W 的矩形，其中一边沿红河的西南岸。



据估计，从早 7:00 到 8:00 的交通高峰时段，会有 8×10^5 辆摩托车在路上，每辆车平均跑 5 Km，每公里放出 12 克 CO。CO 污染物在所考虑的交通高峰时段被近似认为是以常速率 M 均匀放出。同时，垂直于红河岸的（即垂直于长方形的 L 边）清洁的东北风以同样的速度 u 通过整个城市，并将部分被 CO 一氧化碳污染的空气带出城市的大气范围。我们还要用到如下的粗略近似：

- CO 会迅速布满河内市区上空直到混合高度的整个区域，使得 t 时刻河内市区上空长、宽、高分别为 L, W 和 H 的箱体内的 CO 浓度都可以看成是一样的，为 $C(t)$。
- 进入长方体的风是清洁的，而且没有污染物会从平行于风的侧面流失。
- 7:00 以前，大气中的 CO 浓度可以忽略。

5.1. 导出决定 CO 污染物浓度 $C(t)$ 随时间变化的微分方程。

5.2. 写出此方程的解 $C(t)$。

5.3. 计算早上 8:00 时 $C(t)$ 的数值。已知 $L=15$ km，$W=8$ km，$u=1$ m/s。

差示温度计测量法

在本实验中，我们采用差示温度计测量法来完成以下两项任务：

1. 测定一个固态晶体物质的凝固点；
2. 测定一个太阳能电池的效率。

A. 差示温度计测量法

在这个实验里我们采用正向偏置的硅二极管作为温度传感器。如果流过二极管的电流强度保持不变，则二极管两端的电压降与温度之间存在以下关系

$$V(T)=V(T_0)-\alpha(T-T_0) \qquad (1)$$

其中$V(T)$和$V(T_0)$分别为在温度 T 和室温 T_0 (单位为 ºC) 下二极管两端的电压降，系数

$$\alpha=(2.00\pm0.03)\ \text{mV/ºC}, \qquad (2)$$

对于不同的二极管，电压降 $V(T_0)$ 的值可略有不同。

如果两个二极管被放置在不同的温度下，那么可通过测量两个二极管上的电压降之差来测量温度差。电压降之差被称为**差电压。**差电压可以被高精度地测量，这样温度差也可以被高精度地测量。这种方法被称为**差示温度计测量法**。图1是本实验所用的二极管传感器的电路图。二极管 D_1 和 D_2 由一个 9V 电池通过 10 kΩ 的电阻 R_1 和 R_2 正向偏置。在此电路中可以认为通过二极管的电流强度保持不变。

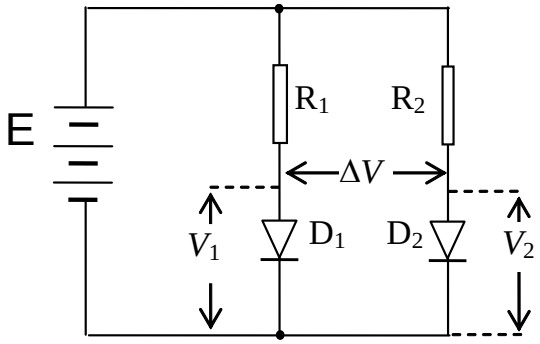


图. 1. 二极管传感器电路

记二极管 D_1 的温度为 T_1，二极管 D_2 的温度为 T_2，根据式（1）我们有：

$$V_1(T_1)=V_1(T_0)-\alpha(T_1-T_0)$$

及

$$V_2(T_2)=V_2(T_0)-\alpha(T_2-T_0)$$

于是差电压为：

$$\Delta V=V_2(T_2)-V_1(T_1)=V_2(T_0)-V_1(T_0)-\alpha(T_2-T_1)=\Delta V(T_0)-\alpha(T_2-T_1)$$

$$\Delta V=\Delta V(T_0)-\alpha\Delta T \qquad (3)$$

其中 $\Delta T=T_2-T_1$。通过测量差电压 ΔV，我们可以确定温度之差。

在本实验中用一个电路盒来为二极管加偏置。图2是电路盒的电路图。

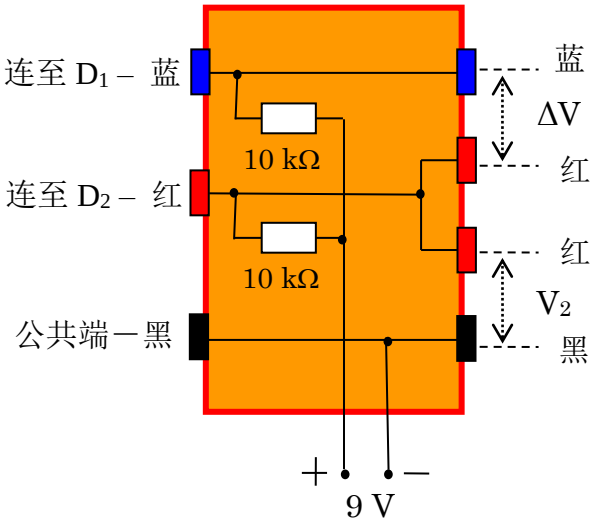


图 2. 电路盒的电路图
(顶视图)

电路盒中包括 2 个 10 kΩ 的二极管偏置电阻，用于连接 9 V 电池的接头，用于连接二极管 D_1 和 D_2 的插孔，以及供万用表测量二极管 D_2 上的电压降 V_2 和二极管 D_1 和 D_2 的差电压 ΔV 的插孔。

B. 任务1：测定一个固态晶体物质的凝固点

1. 实验目的

将一个固态晶体物质加热熔化后使其降温，此物质将在一个确定的温度 T_s 下凝固，这一温度被称为此物质的**凝固点**或**熔点**。测量凝固点 T_s 的**传统方法**是观察

冷却过程中温度随时间的变化。由于凝固过程中会放出相变潜热，凝固中的物质的温度将保持不变。如果物质的量很多，物质的温度会在较长时间内保持不变，物质的凝固点可以方便地测得。但如果物质的量很少，则物质温度保持不变的时间会很短，这使得 T_s 的测量变得很困难。

为在少量物质的情况下测量 T_s，我们可以采用**差示温度计测量法**。以下是差示温度计测量法原理的简介。我们采用两个小盘，其中一个盘盛有少量待测量的物质（**样品盘**），另一个盘不盛任何物质（**参照盘**）。将两个盘子放到温度随时间缓慢变化的热源上。传递到两个盘子的热流大小基本一致。每个盘子都带有一个温度传感器（正向偏置的硅二极管）。在没有发生相变的情况下，样品盘的温度 T_{samp} 和参照盘的温度 T_{ref} 以基本相同的速率随时间变化，因此 $\Delta T = T_{\text{ref}} - T_{\text{samp}}$ 随 T_{samp} 缓慢变化。在待测物质发生相变的情况下，T_{samp} 将保持不变，并等于 T_s，而 T_{ref} 仍保持变化，因此 ΔT 将快速变化。在 ΔT 随 T_{samp} 变化的关系图中会有一个突变。ΔT 突变对应的 T_{samp} 即为 T_s。

本实验的目的是采用传统方法和差示温度计测量法测量一个固态晶体物质的凝固点 T_s。已知 T_s 在 50°C 到 70°C 之间。实验中用的物质量约为20 mg。

2. 实验器材

1. 用作热源的功率为 20 W 的卤素灯。
2. 树脂薄板制成的底座。树脂板上开有方孔，孔上固定有一小块薄钢板。
3. 两个焊接有硅二极管的小钢盘。一个做为参照盘，另一个做为样品盘。

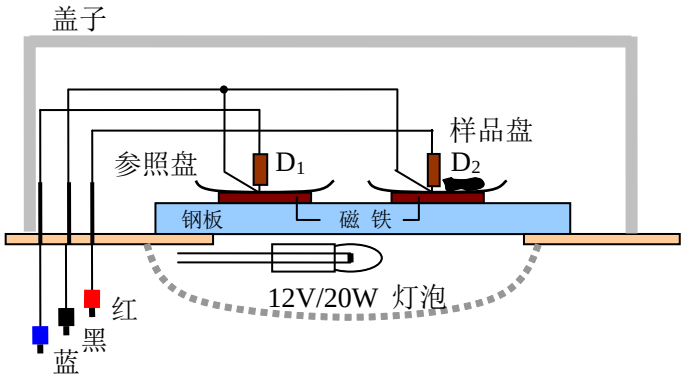


图 3. 测量凝固点的装置

每个盘子都放在一块磁铁上。磁铁的吸力使小盘子、磁铁、钢板连在一起。磁铁同时保证钢板与小盘子之间适当的热接触。

一个灰色的塑料盒子制成的罩子可以用来防止小盘子受到外部的影响。

加热用灯、底座、磁铁、小盘子的放置如图3所示。

4. 两个作电压表用的数字万用表。当功能选择旋钮放在 “ºC/ºF”档上时，万用表也可以用来测量室温。

注意：为防止万用表（图9）进入“自动断电”状态，在把功能选择旋钮从关（OFF）转到所需的位置时，必须按住“选择”（SELECT）键。

5. 一个如图2所示的电路盒。
6. 一个9V（伏）电池。
7. 带接头的导线。
8. 装有约 20 mg 待测物质的小试管。
9. 一块秒表。
10. 一个计算器。
11. 多张绘图专用纸。

3. 实验

1 磁铁放在钢板上对等的位置。参照盘和空的样品盘放在磁铁上（如图4 所示）。将左边的盘子作为参照盘，其上的二极管为 D_1 （D_1被称为**参照用二极管**）。将右边的盘子作为样品盘，其上的二极管为 D_2 （D_2被称为**测量用二极管**）。

按图5所示的方式将卤素灯灯罩顶朝下反放在台面上。先不要把灯打开。把底座放到灯上。将装置连接好，使得你

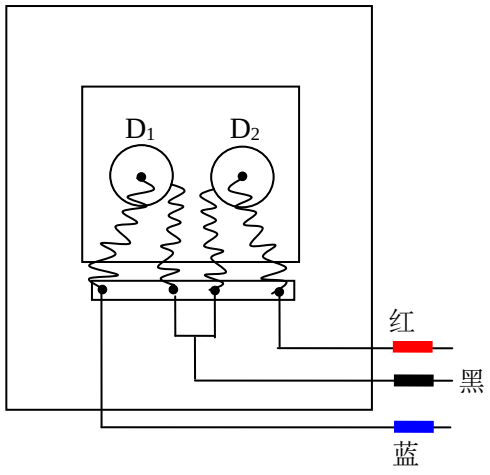


图 4. 放在底座上的盘子 (顶视图)

可以测量二极管 D_2 上的电压降（即 $V_{\text{samp}} = V_2$）和差电压 ΔV。

为避免因最初的温升过程引起的误差，强烈建议在正式测量之前将装置打开预热5分钟。

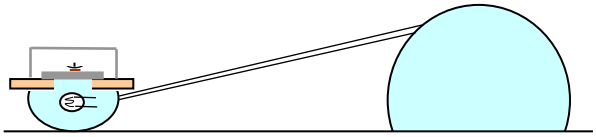


图 5
用卤素灯作加热源

1.1 测量室温 T_0 和室温 T_0 下固定在样品盘上的二极管 D_2 上的电压降 $V_{\text{samp}}(T_0)$。（0.50分）

1.2 分别计算温度为50°C、70°C 和 80°C时测量用二极管上电压降的理论值 $V_{\text{samp}}(50^{\circ}\text{C})$、$V_{\text{samp}}(70^{\circ}\text{C})$ 和 $V_{\text{samp}}(80^{\circ}\text{C})$ 。（0.75分）

2 在两个盘子都是空着的情况下打开灯。观察 V_{samp} 的值。当样品盘温度达到 $T_{\text{samp}}\sim$ 80°C时，将灯关闭。

2.1 先等待样品盘温度降到 $T_{\text{samp}}\sim 70^{\circ}\text{C}$，然后在钢板降温过程中观测 V_{samp} 和 ΔV 随时间的变化。每隔 10 到 20 秒读出一次 V_{samp} 和 ΔV 的值，并将读数记录后填在答题纸所给定的表中。如果 ΔV 变化过快，则应减小测量间隔时间。样品盘温度降到 $T_{\text{samp}}\sim 50^{\circ}\text{C}$ 后测量停止。（1.00分）

2.2 在提供的绘图专用纸上做 V_{samp} 随时间 t 变化的图，称之为 Graph 1。（0.50分）

2.3 在提供的绘图专用纸上做 ΔV 随 V_{samp} 变化的图，称之为 Graph 2。（0.50分）

注意：在 2.2 和 2.3 中一定不要忘记在绘图纸上写下正确的图名。

3 将小试管中的待测物质倒入样品盘中。按与第 2 节完全一致的步骤进行实验测量。

3.1 将测量的 V_{samp} 和 ΔV 和测量时刻 t 记录后填在答题纸所给定的表中。

（1.00分）

3.2 在提供的绘图专用纸上做 V_{samp} 随时间 t 变化的图，称之为 Graph 3。（0.75分）

3.3 在提供的绘图专用纸上做 ΔV 随 V_{samp} 变化的图，称之为 Graph 4。（1.50分）

注意：在 3.2 和 3.3 中一定不要忘记在绘图纸上写下正确的图名。

4 通过比较第 2 节和第 3 节得到的变化曲线，确定被测量物质的凝固点。

4.1 采用传统方法测定 T_s：比较第 3 节和第 2 节得到的 V_{samp} 随时间 t 变化的曲线，即 Graph 3 和 Graph 1，在 Graph 3上标出凝固点对应的点，并确定与凝固点对应的 V_{samp} 的值 V_s。

求出被测量物质的凝固点 T_s，并估算其误差。（1.00分）

4.2 采用差示温度计测量法测定 T_s：比较第 3 节和第 2 节得到的 ΔV 随 V_{samp} 变化的曲线，即 Graph 4 和 Graph 2，在 Graph 4上标出凝固点对应的点，并确定凝固点对应的 V_{samp} 的值 V_s。

求出被测量物质的凝固点 T_s，并估算其误差。（1.00分）

4.3 根据测量数据和装置的误差，计算用差示温度计测量法测定的 T_s 的误差。写出误差计算过程，最后将 T_s 的测量值和误差一起写在答题纸上。（1.00分）

C. 任务2：测定白炽灯照射下的太阳能电池的效率

1. 实验目的

本实验的目的是测定一个在白炽灯的照射下的太阳能电池的**效率**。效率被定义为：太阳能电池能够向外电路提供的电功率与电池所接收到的总辐射功率之比。太阳能电池的效率依赖于辐照源的

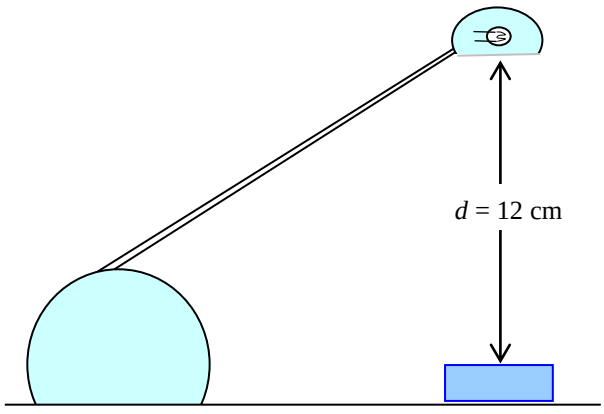


图 6
用卤素灯做光源

光谱。在本实验中，用一个卤素白炽灯作辐射光源。为了测定太阳能电池的效率，我们需要测量灯正下方与灯相距 d 的位置灯的辐照度 E，和太阳能电池在这一位置上的最大功率 $P_{\max}$。在本实验中，$d = 12$ cm（图6），辐照度 E 定义为：

$$E = \Phi / S$$

其中 Φ 是辐照通量（即被照射表面接收的总功率），S 是被照射表面的面积。

2. 实验器材

1. 光源是一个20W（瓦）的卤素灯。
2. 辐射探测器是一个铜制空锥，其内表面被用烟尘涂成黑色（图7）。空锥与外界环境不完全绝热。在本实验中，上述探测器可被看作是一个理想黑体。我们用硅二极管测量温度。测温二极管被固定在辐射探测器上（图7中的D_2），因此二极管的温度与空锥相等。一个参照二极管放在装有探测器的盒子的内壁旁边；该二极管的温度与环境相等。探测器（即空锥和测量二极管）的总热容量为 $C = (0.69 \pm 0.02)$ J/K。探测器被一层聚乙烯塑料薄膜所覆盖；该薄膜对辐射的吸收可以被忽略。

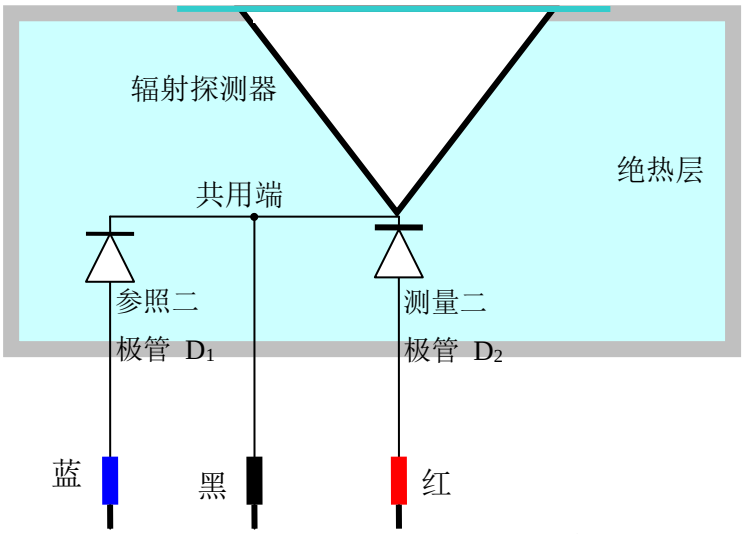


图7. 辐射探测器的示意图

3. 一个如图2所示的电路盒。
4. 一片被固定在一个塑料盒中的太阳能电池

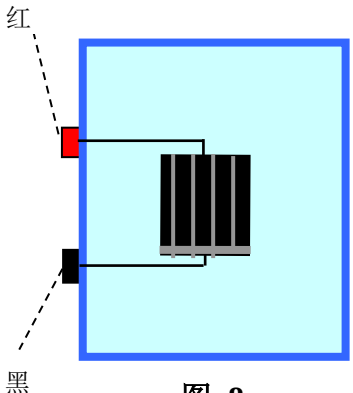


图 8
太阳能电池

（图8）。电池本身包括一些金属连接条。在计算效率时，这些连接条可被看作是电池的一部分。

5. 两个数字万用表。作电压表使用时，万用表的内阻很大，可以当作无穷大。作电流表使用时，万用表的内阻不能忽略。作电压表使用时，万用表的误差为最末一位上的±2。万用表也能用来测量室温。

注意:为防止万用表（图9）进入"自动断电"状态,在把功能选择旋钮从关(OFF)转到所需的位置时，必须按住"选择"（SELECT）键。

6. 一个9V（伏）电池。
7. 一个可调电阻。
8. 一个秒表。
9. 一个刻度为1mm的直尺。
10. 带接头的导线。
11. 多张绘图专用纸。

3. 实验

探测器会因吸收辐射能量而被加热。与此同时，探测器又会通过几种方式散发热量，这些方式包括热传导、对流、辐射等。因此，在时间间隔 dt 内探测器吸收的辐射能量等于使探测器温度升高的热量与探测器传递给外界的热量之和：

$$\Phi dt = CdT + dQ$$

这里 C 是探测器和二极管的热容量、dT 是温度的增加量，dQ 是散发的热量。

当探测器与环境的温度差 $\Delta T = T - T_0$ 较小时，我们可以认为在时间间隔 dt 内探测器传给环境的热量 dQ 正比于 ΔT 和 dt，即 $dQ = k\Delta T dt$，其中 k 是一个具有W/K（瓦/开尔文）量纲的因子。因此，假定 k 为常量，ΔT 为小量，我们有

$$\Phi dt = CdT + k\Delta T dt = Cd(\Delta T) + k\Delta T dt$$

或

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} + \frac{k}{C}\Delta T = \frac{\Phi}{C} \qquad (4)$$

上述微分方程的解确定，从探测器开始接收具有恒定辐照度的辐射时（设此时 t=0, ΔT =0）起，温度差 ΔT 随时间 t 的变化：

$$\Delta T(t)=\frac{\Phi}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{C}t}\right) \tag{5}$$

如果去掉辐射，上述微分方程变成

$$\frac{d(\Delta T)}{dt}+\frac{k}{C}\Delta T=0 \tag{6}$$

而温度差 ΔT 按以下规律随时间变化：

$$\Delta T(t)=\Delta T(0)e^{-\frac{k}{C}t} \tag{7}$$

其中 $\Delta T(0)$ 是 $t=0$ 时刻（即开始测量的时刻）的温度差。

1 测定室温 T_0。（0.25分）

2 搭建测量辐射探测器温度的电路，电路包括两个二极管传感器（在探测器内）、电路盒和万用表。

为避免因装置预热过程中的误差，强烈建议在正式测量之前将装置打开预热5分钟。

2.1 把探测器置于光源下距灯泡 $d = 12$ cm 处。灯处于关闭状态。观测 ΔV 的变化约2分钟。以10秒的间隔读数，测定方程(3)中 $\Delta V(T_0)$ 的值。（0.50分）

2.2 打开灯照射探测器。观测 ΔV 的变化，每隔10至15秒记录一个 ΔV 的值，并填到答题纸上给定的表中（**注意：表中x 和y栏会在后面第4节被用到**）。2分钟后将灯关闭。（0.50分）

2.3 从灯下移开探测器。观测 ΔV 的变化约2分钟。其间，每隔10至15秒记录一个 ΔV 的值，并填到答题纸上给定的表中（**注意：表中x 和y 栏会在后面第4节被用到**）。（0.50分）

第3部分和第4部分的提示

由于探测器具有热惯性，因此建议：不要采用探测器刚开始被照射或刚停止被照射时测到的某些数据。

3 适当选取 x 和 y 变量，在 x-y 坐标系中做图，以证明在灯关闭后，方程(7)成立。

3.1 写出 x 变量和 y 变量的表达式。（0.50分）

3.2 作 y 随 x 变化的曲线图，称之为 Graph 5。（1.50分）

3.3 由上述曲线图确定 k 的值。（0.50分）

4 适当选取 x 和 y 变量，在 x-y 坐标系中做图，以证明在探测器被光照时，方程(5)成立。

4.1 写出 x 变量和 y 变量的表达式。（0.50分）

4.2 作 y 随 x 变化的曲线图，称之为 Graph 6。（1.50分）

4.3 确定探测器探测窗口处辐照度 E 的值。（0.50分）

5 把太阳能电池放在原来辐射探测器所在的位置，并将其接到一个由两个万用表和一个可调电阻器组成的电路中。电路中的可调电阻器可被用来改变太阳能电池上的负载。在不同的电阻值下，测量电路中的电流和太阳能电池上的电压。

5.1 画出本节所用的电路图。（0.50分）

5.2 调节可调电阻器的旋钮，以改变负载的阻值。记录旋钮在每一位置时的电流 I 和电压 V 的值，并填到答题纸上给定的表中。（0.50分）

5.3 作功率随电流变化曲线图，称之为 Graph 7。这里，功率指电池供给负载的功率，电流指通过电池的电流。（0.75分）

5.4 由上图求出电池的最大功率 P_{max}，并估算其误差。（0.50分）

5.5 写出与上述最大功率相对应的电池的效率的表达式，并计算该效率的值和误差。（1.50分）

实验设备 (亦见图 10)

1	卤素灯 220 V/ 20 W	9	秒表
2	底座	10	计算器
3	小钢盘	11	辐射探测器
4	万用表	12	太阳能电池
5	电路盒	13	可调电阻器
6	9 伏电池	14	直尺
7	带接头的导线	15	作护罩用的盒子

8	小试管，内装待测物质		



图 9. 数字万用表

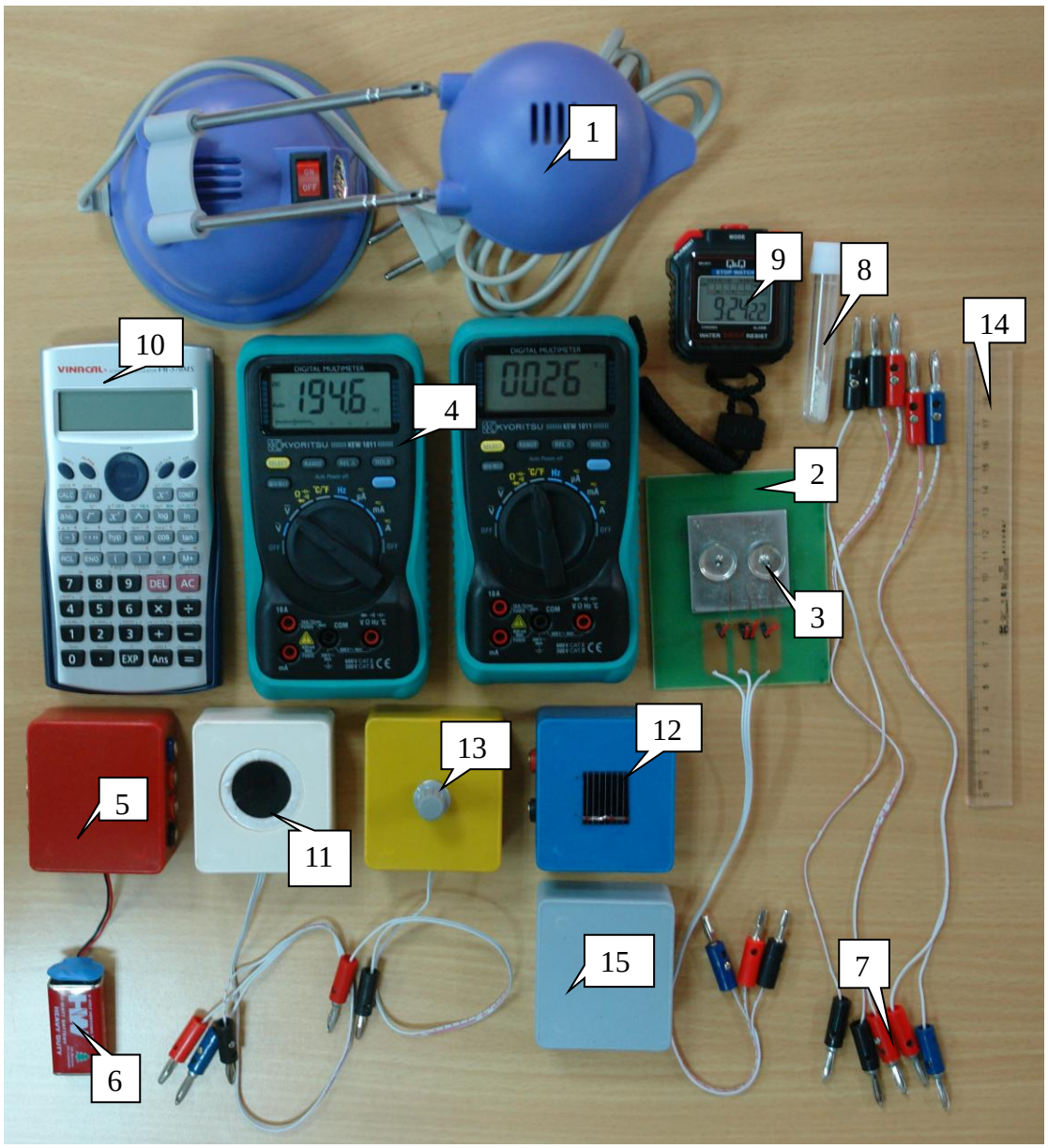


图 10. 完整的实验套装

北京大学物理学院　　荀坤　王若鹏　陈晓林　　译

Solution

1. The structure of the mortar

1.1. Calculating the distance TG

The volume of water in the bucket is $V = 1000\,\text{cm}^3 = 10^{-3}\,\text{m}^3$. The length of the bottom of the bucket is $d = L - h\tan 60^0 = (0.74 - 0.12\tan 60^0)\,\text{m} = 0.5322\,\text{m}$.

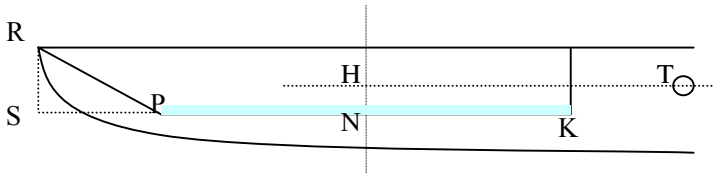
(as the initial data are given with two significant digits, we shall keep only two significant digits in the final answer, but we keep more digits in the intermediate steps).

The height c of the water layer in the bucket is calculated from the formula:

$$V = bcd + b\frac{c}{2}c\tan 60^0 \Rightarrow c = \frac{(d^2 + 2\sqrt{3}V/b)^{1/2} - d}{\sqrt{3}}$$

Inserting numerical values for V, b and d, we find $c = 0.01228\,\text{m}$.

When the lever lies horizontally, the distance, on the horizontal axis, between the rotation axis and the center of mass of water N, is $\text{TH} \approx a + \frac{d}{2} + \frac{c}{4}\tan 60^o = 0.4714\,\text{m}$, and $\text{TG} = (m/M)\,\text{TH} = 0.01571\,\text{m}$ (see the figure below).



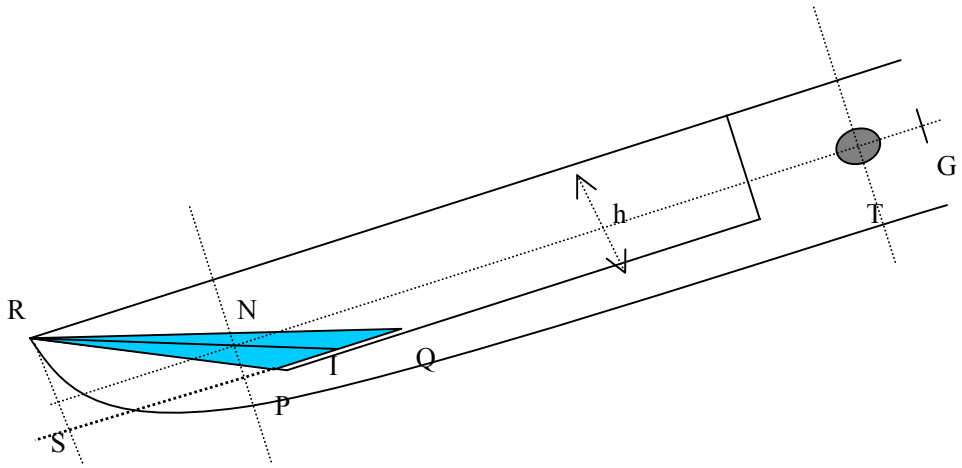
Answer: $\text{TG} = 0.016\,\text{m}$.

1.2. Calculating the values of α_1 and α_2.

When the lever tilts with angle α_1, water level is at the edge of the bucket. At that point the water volume is $10^{-3}\,\text{m}^3$. Assume $\text{PQ} < d$. From geometry $V = hb \times \text{PQ}/2$, from which $\text{PQ} = 0.1111\,\text{m}$. The assumption $\text{PQ} < d$ is obviously satisfied ($d = 0.5322\,\text{m}$).

To compute the angle α_1, we note that $\tan\alpha_1 = h/\text{QS} = h/(\text{PQ} + \sqrt{3}h)$. From this we find $\alpha_1 = 20.6^o$.

When the tilt angle is 30^o, the bucket is empty: $\alpha_2 = 30^o$.



1.3. Determining the tilt angle β of the lever and the amount of water in the bucket m when the total torque μ on the lever is equal to zero

Denote $\mathrm{PQ} = x(\mathrm{m})$. The amount of water in the bucket is $m = \rho_{\text{water}} \dfrac{xhb}{2} = 9x\ (\mathrm{kg})$.

$\mu = 0$ when the torque coming from the water in the bucket cancels out the torque coming from the weight of the lever. The cross section of the water in the bucket is the triangle PQR in the figure. The center of mass N of water is located at 2/3 of the meridian RI, therefore NTG lies on a straight line. Then: $mg \times \mathrm{TN} = Mg \times \mathrm{TG}$ or

$$m \times \mathrm{TN} = M \times \mathrm{TG} = 30 \times 0.1571 = 0.4714 \qquad (1)$$

Calculating TN from x then substitute (1) :

$$\mathrm{TN} = L + a - \frac{2}{3}(h\sqrt{3} + \frac{x}{2}) = 0.94 - 0.08\sqrt{3} - \frac{x}{3} = 0.8014 - \frac{x}{3}$$

which implies $m \times \mathrm{TN} = 9x(0.8014 - x/3) = -3x^2 + 7.213x \qquad (2)$

So we find an equation for x:

$$-3x^2 + 7.213x = 0.4714 \qquad (3)$$

The solutions to (3) are $x = 2.337$ and $x = 0.06723$. Since x has to be smaller than 0.5322, we have to take $x = x_0 = 0.06723$ and $m = 9x_0 = 0.6051\mathrm{kg}$.

$$\tan\beta = \frac{h}{x + h\sqrt{3}} = 0.4362, \text{ or } \quad \beta = 23.57^o.$$

Answer: $m = 0.61\mathrm{kg}$ and $\beta = 23.6^o$.

2. Parameters of the working mode

2.1.Graphs of $\mu(\alpha)$, $\alpha(t)$, and $\mu(t)$ during one operation cycle**.**

Initially when there is no water in the bucket, $\alpha = 0$, μ has the largest magnitude equal to $gM \times \mathrm{TG} = 30 \times 9.81 \times 0.01571 = 4.624\,\mathrm{N \cdot m}$. Our convention will be that the sign of this torque is negative as it tends to decrease α.

As water flows into the bucket, the torque coming from the water (which carries positive sign) makes μ increase until μ is slightly positive, when the lever starts to lift up. From that moment, by assumption, the amount of water in the bucket is constant.

The lever tilts so the center of mass of water moves away from the rotation axis, leading to an increase of μ, which reaches maximum when water is just about to overflow the edge of the bucket. At this moment $\alpha = \alpha_1 = 20.6^{\mathrm{o}}$.

A simple calculation shows that

$$\mathrm{SI} = \mathrm{SP} + \mathrm{PQ}/2 = 0.12 \times 1.732 + 0.1111/2 = 0.2634\,\mathrm{m}.$$

$$\mathrm{TN} = 0.20 + 0.74 - \frac{2}{3}\mathrm{SI} = 0.7644\,\mathrm{m}.$$

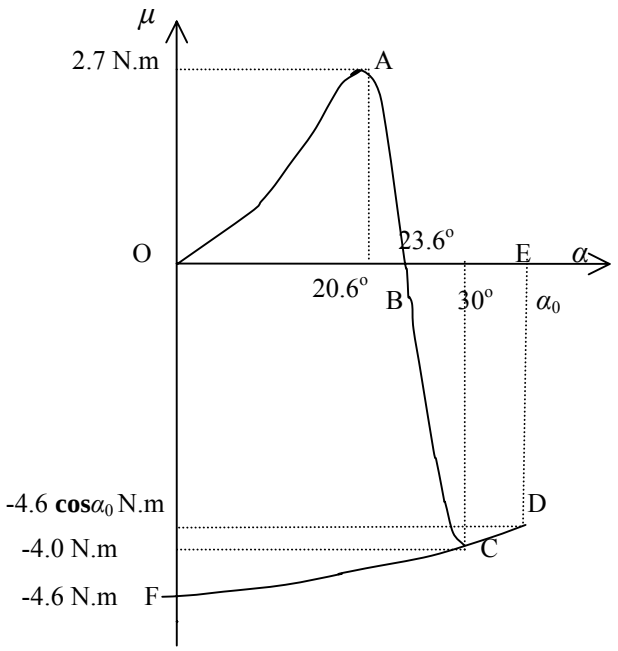
$$\mu_{\max} = (1.0 \times \mathrm{TN} - 30 \times \mathrm{TG})\, g \cos 20.6^{\mathrm{o}}$$

$$= (1.0 \times 0.7644 - 30 \times 0.01571) \times 9.81 \times \cos 20.6^{\mathrm{o}} = 2.690\ \mathrm{N \cdot m}.$$

Therefore $\mu_{\max} = 2.7\ \mathrm{N \cdot m}$.

As the bucket tilts further, the amount of water in the bucket decreases, and when $\alpha = \beta$, $\mu = 0$. Due to inertia, α keeps increasing and μ keeps decreasing. The bucket is empty when $\alpha = 30^{\mathrm{o}}$, when μ equals $-30 \times g \times \mathrm{TG} \times \cos 30^{\mathrm{o}} = -4.0\,\mathrm{N \cdot m}$. After that α keeps increasing due to inertia to α_0 ($\mu = -gM\,\mathrm{TG} \cos\alpha_0 = -4.62 \cos\alpha_0\ \mathrm{N \cdot m}$), then quickly decreases to 0 ($\mu = -4.62\,\mathrm{N \cdot m}$).

On this basis we can sketch the graphs of $\alpha(t)$, $\mu(t)$, and $\mu(\alpha)$ as in the figure below



2.2. The infinitesimal work produced by the torque $\mu(\alpha)$ is $dW = \mu(\alpha)d\alpha$. The energy obtained by the lever during one cycle due to the action of $\mu(\alpha)$ is $W = \oint \mu(\alpha)d\alpha$, which is the area limited by the line $\mu(\alpha)$. Therefore W_{total} is equal to the area enclosed by the curve (OABCDFO) on the graph $\mu(\alpha)$.

The work that the lever transfers to the mortar is the energy the lever receives as it moves from the position $\alpha = \alpha_o$ to the horizontal position $\alpha = 0$. We have W_{pounding} equals to the area of (OEDFO) on the graph $\mu(\alpha)$. It is equal to $gM \times \text{TG} \times \mathbf{sin}\,\alpha_0 = 4.6\,\mathbf{sin}\,\alpha_0$ (J).

2.3. The magnitudes of α_0 can be estimated from the fact that at point D the energy of the lever is zero. We have

area (OABO) = area (BEDCB)

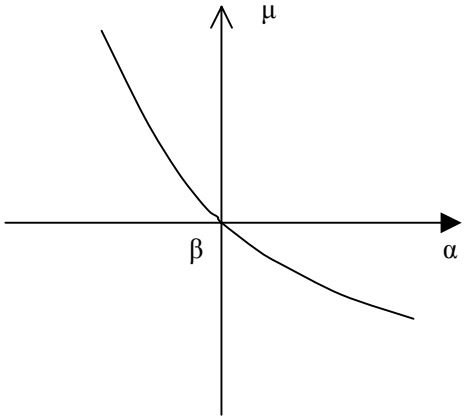
Approximating OABO by a triangle, and BEDCB by a trapezoid, we obtain:

$$23.6 \times 2.7 \times (1/2) = 4.0 \times [(\alpha_0 - 23.6) + (\alpha_0 - 30)] \times (1/2),$$

which implies $\alpha_0 = 34.7^o$. From this we find

$$W_{\text{pounding}} = \text{area (OEDFO)} = \int_{34.76}^{0} -Mg \times \text{TG} \times \mathbf{cos}\,\alpha\, d\alpha = 4.62 \times \mathbf{sin}\,34.7^o = 2.63$$

Thus we find $W_{\text{pounding}} \approx 2.6$ J.



3. The rest mode

3.1.

3.1.1. The bucket is always overflown with water. The two branches of $\mu(\alpha)$ in the vicinity of $\alpha = \beta$ corresponding to increasing and decreasing α coincide with each other.

The graph implies that $\alpha = \beta$ is a stable equilibrium of the mortar.

3.1.2. Find the expression for the torque μ when the tilt angle is $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ is small **).**

The mass of water in bucket when the lever tilts with angle α is $m = (1/2)\rho bh\,\text{PQ}$, where $\text{PQ} = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} - \dfrac{1}{\tan 30^0}\right)$**.** A simple calculation shows that when α increases from β to $\beta + \Delta\alpha$, the mass of water increases by $\Delta m = -\dfrac{bh^2\rho}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha \approx -\dfrac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta}\Delta\alpha$. The torque μ acting on the lever when the tilt is $\beta + \Delta\alpha$ equals the torque due to Δm.

We have $\mu = \Delta m \times g \times \text{TN} \times \cos(\beta + \Delta\alpha)$. TN is found from the equilibrium condition of the lever at tilting angle β:

$\text{TN} = M \times \text{TG}/m = 30 \times 0.01571/0.605 = 0.779\,\text{m}$.

We find at the end $\mu = -47.2 \times \Delta\alpha$ N·m $\approx -47 \times \Delta\alpha$ N·m**.**

3.1.3. Equation of motion of the lever

$\mu = I\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ where $\mu = -47 \times \Delta\alpha$, $\alpha = \beta + \Delta\alpha$, and I is the sum of moments of inertia of the lever and of the water in bucket relative to the axis T. Here I is not constant the amount of water in the bucket depends on α. When $\Delta\alpha$ is small, one can consider the amount and the shape of water in the bucket to be constant, so I is approximatey a constant. Consider water in bucket as a material point with mass 0.6 kg, a simple calculation gives $I = 12 + 0.6 \times 0.78^2 = 12.36 \approx 12.4\ \text{kg m}^2$. We have $-47 \times \Delta\alpha = 12.4 \times \dfrac{d^2\Delta\alpha}{dt^2}$. That is the equation for a harmonic oscillator with period

$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{12.4}{47}} = 3.227$. The answer is therefore $\tau = 3.2\,\mathrm{s}$.

3.2. Harmonic oscillation of lever (around $\alpha = \beta$) when bucket is always overflown. Assume the lever oscillate harmonically with amplitude $\Delta\alpha_0$ around $\alpha = \beta$. At time $t = 0$, $\Delta\alpha = 0$, the bucket is overflown. At time dt the tilt changes by $d\alpha$. We are interested in the case $d\alpha < 0$, i.e., the motion of lever is in the direction of decreasing α, and one needs to add more water to overflow the bucket. The equation of motion is:

$\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0 \sin(2\pi t/\tau)$, therefore $d(\Delta\alpha) = d\alpha = -\Delta\alpha_0 (2\pi/\tau)\cos(2\pi t/\tau)dt$.

For the bucket to be overflown, during this time the amount of water falling to the bucket should be at least $dm = -\frac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta}d\alpha = \frac{2\Delta\alpha_0\pi bh^2\rho dt}{2\tau\sin^2\beta}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$; dm is maximum at $t = 0$, $dm_0 = \frac{\pi bh^2\rho\Delta\alpha_0}{\tau\sin^2\beta}dt$.

The amount of water falling to the bucket is related to flow rate Φ; $dm_0 = \Phi dt$, therefore $\Phi = \frac{\pi bh^2\rho\Delta\alpha_0}{\tau\sin^2\beta}$.

An overflown bucket is the necessary condition for harmonic oscillations of the lever, therefore the condition for the lever to have harmonic oscillations with ampltude 1^o or $2\pi/360\,\mathrm{rad}$ is $\Phi \geq \Phi_1$ with

$$\Phi_1 = \frac{\pi bh^2\rho 2\pi}{360\tau\sin^2\beta} = 0.2309\,\mathrm{kg/s}$$

So $\Phi_1 = 0.23\,\mathrm{kg/s}$.

3.3 Determination of Φ_2

If the bucket remains overflown when the tilt decreases to 20.6^o, then the amount of water in bucket should reach 1 kg at this time, and the lever oscillate harmonically with amplitude equal $23.6^o - 20.6^o = 3^o$. The flow should exceed $3\Phi_1$, therefore

$\Phi_2 = 3\times 0.23 \approx 0.7\,\mathrm{kg/s}$.

This is the minimal flow rate for the rice-pounding mortar not to work.

Solution

1.

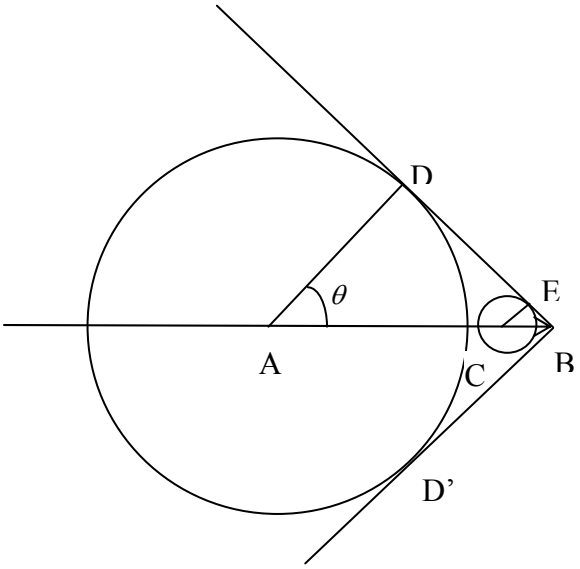


Figure 1

Let us consider a plane containing the particle trajectory. At $t = 0$, the particle position is at point A. It reaches point B at $t = t_1$. According to the Huygens principle, at moment $0 < t < t_1$, the radiation emitted at A reaches the circle with a radius equal to AD and the one emitted at C reaches the circle of radius CE. The radii of the spheres are proportional to the distance of their centre to B:

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB}} = \frac{c\left(t_1 - t\right)/n}{v\left(t_1 - t\right)} = \frac{1}{\beta n} = \text{const}$$

The spheres are therefore transformed into each other by homothety of vertex B and their envelope is the cone of summit B and half aperture $\varphi = \mathbf{Arcsin}\dfrac{1}{\beta n} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, where θ is the angle made by the light ray CE with the particle trajectory.

1.1. The intersection of the wave front with the plane is two straight lines, BD and BD'.

1.2. They make an angle $\varphi = \mathbf{Arcsin}\dfrac{1}{\beta n}$ with the particle trajectory.

2. The construction for finding the ring image of the particles beam is taken in the plane containing the trajectory of the particle and the optical axis of the mirror.

We adopt the notations:

S – the point where the beam crosses the spherical mirror

F – the focus of the spherical mirror

C – the center of the spherical mirror

IS – the straight-line trajectory of the charged particle making a small angle α with the optical axis of the mirror.

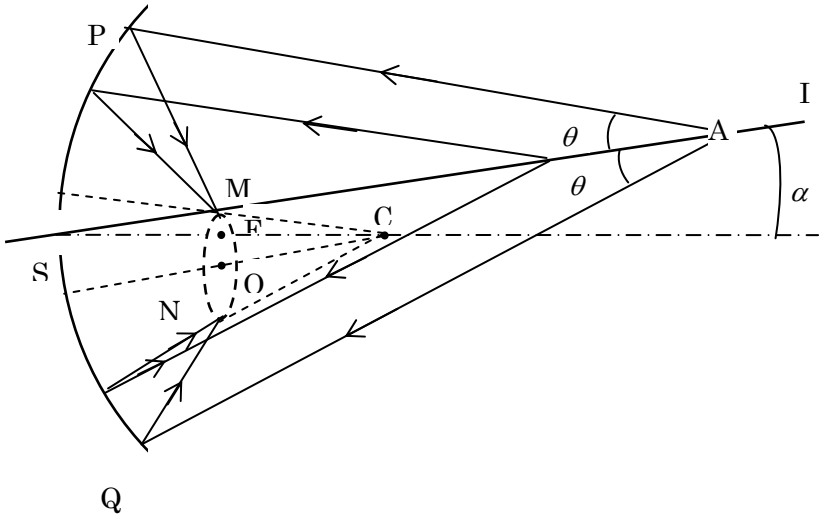


Figure 2

CF = FS = f

CO//IS

CM//AP

CN//AQ

$$\widehat{\mathrm{FCO}} = \alpha \Rightarrow \mathrm{FO} = f \times \alpha$$

$$\widehat{\mathrm{MCO}} = \widehat{\mathrm{OCN}} = \theta \Rightarrow \mathrm{MO} = f \times \theta$$

We draw a straight line parallel to IS passing through the center C. The line intersects the focal plane at O. We have $\mathrm{FO} \approx f \times \alpha$.

Starting from C, we draw two lines in both sides of the line CO making with it an angle θ. These two lines intersect the focal plane at M and N, respectively. All the rays of Cherenkov radiation in the plane of the sketch, striking the mirror and being reflected,

intersect at M or N.

In three-dimension case, the Cherenkov radiation gives a ring in the focal plane with the center at O (FO $\approx f \times \alpha$) and with the radius MO $\approx f \times \theta$.

In the construction, all the lines are in the plane of the sketch. Exceptionally, the ring is illustrated spatially by a dash line.

3.

3.1. For the Cherenkov effect to occur it is necessary that $n > \frac{c}{v}$, that is $n_{\min} = \frac{c}{v}$.

Putting $\zeta = n - 1 = 2.7 \times 10^{-4} P$, we get

$$\zeta_{\min} = 2.7 \times 10^{-4} P_{\min} = \frac{c}{v} - 1 = \frac{1}{\beta} - 1 \qquad (1)$$

Because

$$\frac{Mc^2}{pc} = \frac{Mc}{p} = \frac{Mc}{\frac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = K \qquad (2)$$

then K = 0.094 ; 0.05 ; 0.014 for proton, kaon and pion, respectively.

From (2) we can express β through K as

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \qquad (3)$$

Since $K^2 << 1$ for all three kinds of particles we can neglect the terms of order higher than 2 in K . We get

$$1 - \beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \approx \frac{1}{2} K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \qquad (3a)$$

$$\frac{1}{\beta} - 1 = \sqrt{1+K^2} - 1 \approx \frac{1}{2} K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \qquad (3b)$$

Putting (3b) into (1), we obtain

$$P_{\min} = \frac{1}{2.7\times10^{-4}} \times \frac{1}{2} K^2 \qquad (4)$$

We get the following numerical values of the minimal pressure:

$P_{\min} = 16$ atm for protons,

$P_{\min} = 4.6$ atm for kaons,

$P_{\min} = 0.36$ atm for pions.

3.2. For $\theta_\pi = 2\theta_\kappa$ we have

$$\cos\theta_\pi = \cos 2\theta_\kappa = 2\cos^2\theta_\kappa - 1 \qquad (5)$$

We denote

$$\varepsilon = 1-\beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \approx \frac{1}{2}K^2 \qquad (6)$$

From (5) we obtain

$$\frac{1}{\beta_\pi n} = \frac{2}{\beta_\kappa^2 n^2} - 1 \qquad (7)$$

Substituting $\beta = 1-\varepsilon$ and $n = 1+\zeta$ into (7), we get approximately:

$$\zeta_{\frac{1}{2}} = \frac{4\varepsilon_\kappa - \varepsilon_\pi}{3} = \frac{1}{6}\left(4K_\kappa^2 - K_\pi^2\right) = \frac{1}{6}\left[4.(0.05)^2 - (0.014)^2\right],$$

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2.7\times10^{-4}}\zeta_{\frac{1}{2}} = 6 \text{ atm}.$$

The corresponding value of refraction index is $n = 1.00162$. We get:

$$\theta_\kappa = 1.6^o; \qquad \theta_\pi = 2\theta_\kappa = 3.2^o.$$

We do not observe the ring image of protons since

$$P_{\frac{1}{2}} = 6\,\text{atm} < 16\,\text{atm} = P_{\min} \text{ for protons.}$$

4.

4.1. Taking logarithmic differentiation of both sides of the equation $\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$, we obtain

$$\frac{\sin\theta \times \Delta\theta}{\cos\theta} = \frac{\Delta\beta}{\beta} \qquad (8)$$

Logarithmically differentiating equation (3a) gives

$$\frac{\Delta\beta}{1-\beta} = 2\frac{\Delta p}{p} \qquad (9)$$

Combining (8) and (9), taking into account (3b) and putting approximately $\tan\theta = \theta$, we derive

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta p} = \frac{2}{\theta} \times \frac{1-\beta}{p\beta} = \frac{K^2}{\theta p} \qquad (10)$$

We obtain

-for kaons $K_{\text{к}} = 0.05$, $\theta_{\text{к}} = 1.6^{\text{o}} = 1.6\frac{\pi}{180}\text{rad}$, and so, $\frac{\Delta\theta_{\text{к}}}{\Delta p} = 0.51\frac{1^{\text{o}}}{\text{GeV}/c}$,

-for pions $K_{\pi} = 0.014$, $\theta_{\pi} = 3.2^{\text{o}}$, and $\frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} = 0.02\frac{1^{\text{o}}}{\text{GeV}/c}$.

4.2. $\frac{\Delta\theta_{\text{к}} + \Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta p} = (0.51 + 0.02)\frac{1^{\text{o}}}{\text{GeV}/c} = 0.53\frac{1^{\text{o}}}{\text{GeV}/c}$.

The condition for two ring images to be distinguishable is $\Delta\theta < 0.1(\theta_{\pi} - \theta_{\text{к}}) = 0.16^{\text{o}}$.

It follows $\Delta p < \frac{1}{10} \times \frac{1.6}{0.53} = 0.3\ \text{GeV}/c$.

5.

5.1. The lower limit of β giving rise to Cherenkov effect is

$$\beta = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.33}. \qquad (11)$$

The kinetic energy of a particle having rest mass M and energy E is given by the expression

$$T = E - Mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - Mc^2 = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]. \qquad (12)$$

Substituting the limiting value (11) of β into (12), we get the minimal kinetic energy of the particle for Cherenkov effect to occur:

$$T_{\min} = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1.33}\right)^2}} - 1\right] = 0.517\ Mc^2 \qquad (13)$$

5.2.

For α particles, $T_{\min} = 0.517 \times 3.8 \text{ GeV} = 1.96 \text{ GeV}$.

For electrons, $T_{\min} = 0.517 \times 0.51 \text{ MeV} = 0.264 \text{ MeV}$.

Since the kinetic energy of the particles emitted by radioactive source does not exceed a few MeV, these are electrons which give rise to Cherenkov radiation in the considered experiment.

6. For a beam of particles having a definite momentum the dependence of the angle θ on the refraction index n of the medium is given by the expression

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} \qquad (14)$$

6.1. Let $\delta\theta$ be the difference of θ between two rings corresponding to two wavelengths limiting the visible range, i.e. to wavelengths of 0.4 μm (violet) and 0.8 μm (red), respectively. The difference in the refraction indexes at these wavelengths is $n_v - n_r = \delta n = 0.02(n-1)$.

Logarithmically differentiating both sides of equation (14) gives

$$\frac{\sin\theta \times \delta\theta}{\cos\theta} = \frac{\delta n}{n} \qquad (15)$$

Corresponding to the pressure of the radiator $P = 6$ atm we have from 4.2. the values $\theta_\pi = 3.2^o$, $n = 1.00162$.

Putting approximately $\tan\theta = \theta$ and $n = 1$, we get $\delta\theta = \frac{\delta n}{\theta} = 0.033^o$.

6.2.

6.2.1. The broadening due to dispersion in terms of half width at half height is, according to (6.1), $\frac{1}{2}\delta\theta = 0.017^o$.

6.2.2. The broadening due to achromaticity is, from 4.1., $0.02\frac{1^o}{\text{GeV/c}} \times 0.3 \text{ GeV/c} = 0.006^o$, that is three times smaller than above.

6.2.3. The color of the ring changes from red to white then blue from the inner edge to the outer one.

Solution

1. For an altitude change dz , the atmospheric pressure change is :

$$dp = -\rho g dz \qquad (1)$$

where g is the acceleration of gravity, considered constant, ρ is the specific mass of air, which is considered as an ideal gas:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$$

Put this expression in (1) :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

1.1. If the air temperature is uniform and equals T_0, then

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz$$

After integration, we have :

$$p(z) = p(0)\mathbf{e}^{-\frac{\mu g}{RT_0}z} \qquad (2)$$

1.2. If

$$T(z) = T(0) - \Lambda z \qquad (3)$$

then

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R\left[T(0) - \Lambda z\right]} dz \qquad (4)$$

1.2.1. Knowing that :

$$\int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} = -\frac{1}{\Lambda}\int \frac{d\left[T(0) - \Lambda z\right]}{T(0) - \Lambda z} = -\frac{1}{\Lambda}\mathbf{ln}\left(T(0) - \Lambda z\right)$$

by integrating both members of (4), we obtain :

$$\mathbf{ln}\frac{p(z)}{p(0)} = \frac{\mu g}{R\Lambda}\mathbf{ln}\frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} = \frac{\mu g}{R\Lambda}\mathbf{ln}\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)$$

$$p(z) = p(0)\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}} \qquad (5)$$

1.2.2. The free convection occurs if:

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} > 1$$

The ratio of specific masses can be expressed as follows:

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \frac{p(z)}{p(0)}\frac{T(0)}{T(z)} = \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}-1}$$

The last term is larger than unity if its exponent is negative:

$$\frac{\mu g}{R\Lambda} - 1 < 0$$

Then :

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = \frac{0.029 \times 9.81}{8.31} = 0.034\ \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

2. In vertical motion, the pressure of the parcel always equals that of the surrounding air, the latter depends on the altitude. The parcel temperature T_{parcel} depends on the pressure.

2.1. We can write:

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = \frac{dT_{\text{parcel}}}{dp}\frac{dp}{dz}$$

p is simultaneously the pressure of air in the parcel and that of the surrounding air.

Expression for $\frac{dT_{\text{parcel}}}{dp}$

By using the equation for adiabatic processes $pV^{\gamma} = \text{const}$ and equation of state, we can deduce the equation giving the change of pressure and temperature in a quasi-equilibrium adiabatic process of an air parcel:

$$T_{\text{parcel}}\, p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const} \qquad (6)$$

where $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ is the ratio of isobaric and isochoric thermal capacities of air. By logarithmic differentiation of the two members of (6), we have:

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} + \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{dp}{p} = 0$$

Or

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dp} = \frac{T_{\text{parcel}}}{p}\frac{\gamma - 1}{\gamma} \qquad (7)$$

Note: we can use the first law of thermodynamic to calculate the heat received by the parcel in an elementary process: $dQ = \frac{m}{\mu}c_V dT_{\text{parcel}} + pdV$, this heat equals zero in an adiabatic process. Furthermore, using the equation of state for air in the parcel $pV = \frac{m}{\mu}RT_{\text{parcel}}$ we can derive (6)

Expression for $\frac{dp}{dz}$

From (1) we can deduce:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pg\mu}{RT}$$

where T is the temperature of the surrounding air.

On the basis of these two expressions, we derive the expression for dT_{parcel} / dz :

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\frac{T_{\text{parcel}}}{T} = -G \qquad (8)$$

In general, G is not a constant.

2.2.

2.2.1. If at any altitude, $T = T_{\text{parcel}}$, then instead of G in (8), we have :

$$\Gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R} = \text{const} \qquad (9)$$

or

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p} \qquad (9')$$

2.2.2. Numerical value:

$$\Gamma = \frac{1.4-1}{1.4}\frac{0.029\times 9.81}{8.31} = 0.00978\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \approx 10^{-2}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$$

2.2.3. Thus, the expression for the temperature at the altitude z in this special atmosphere (called adiabatic atmosphere) is :

$$T(z) = T(0) - \Gamma z \qquad (10)$$

2.3. Search for the expression of $T_{\text{parcel}}(z)$

Substitute T in (7) by its expression given in (3), we have:

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\frac{dz}{T(0)-\Lambda z}$$

Integration gives:

$$\ln\frac{T_{\text{parcel}}(z)}{T_{\text{parcel}}(0)} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\left(-\frac{1}{\Lambda}\right)\ln\frac{T(0)-\Lambda z}{T(0)}$$

Finally, we obtain:

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\left(\frac{T(0)-\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \qquad (11)$$

2.4.

From (11) we obtain

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\left(1-\frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

If $\Lambda z << T(0)$, then by putting $x = \dfrac{-T(0)}{\Lambda z}$, we obtain

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-\frac{\Gamma z}{T(0)}}$$

$$\approx T_{\text{parcel}}(0)\,\mathbf{e}^{-\frac{\Gamma z}{T(0)}} \approx T_{\text{parcel}}(0)\left(1-\frac{\Gamma z}{T(0)}\right) \approx T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z$$

hence,

$$T_{\text{parcel}}(z) \approx T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z \qquad (12)$$

3. Atmospheric stability

In order to know the stability of atmosphere, we can study the stability of the equilibrium of an air parcel in this atmosphere.

At the altitude z_0, where $T_{\text{parcel}}(z_0) = T(z_0)$, the air parcel is in equilibrium. Indeed, in this case the specific mass ρ of air in the parcel equals ρ'- that of the surrounding air in the atmosphere. Therefore, the buoyant force of the surrounding air on the parcel equals the weight of the parcel. The resultant of these two forces is zero.

Remember that the temperature of the air parcel $T_{\text{parcel}}(z)$ is given by (7), in which we can assume approximately $G = \Gamma$ at any altitude z near $z = z_0$.

Now, consider the stability of the air parcel equilibrium:

Suppose that the air parcel is lifted into a higher position, at the altitude $z_0 + d$ (with d>0), $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) = T_{\text{parcel}}(z_0) - \Gamma d$ and $T(z_0 + d) = T(z_0) - \Lambda d$.

- In the case the atmosphere has temperature lapse rate $\Lambda > \Gamma$, we have $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) > T(z_0 + d)$, then $\rho < \rho'$. The buoyant force is then larger than the air parcel weight, their resultant is oriented upward and tends to push the parcel away from the equilibrium position.

Conversely, if the air parcel is lowered to the altitude $z_0 - d$ (d>0), $T_{\text{parcel}}(z_0 - d) < T(z_0 - d)$ and then $\rho > \rho'$.

The buoyant force is then smaller than the air parcel weight; their resultant is oriented downward and tends to push the parcel away from the equilibrium position (see Figure 1)

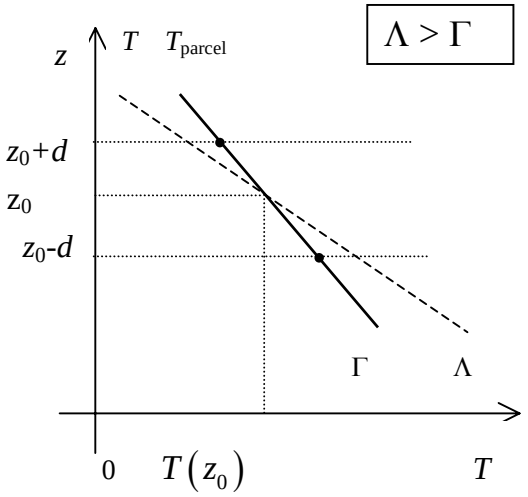
So the equilibrium of the parcel is unstable, and we found that: *An atmosphere with a temperature lapse rate* $\Lambda > \Gamma$ *is unstable.*

- In an atmosphere with temperature lapse rate $\Lambda < \Gamma$, if the air parcel is lifted to a higher position, at altitude $z_0 + d$ (with d>0), $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) < T(z_0 + d)$, then

$\rho > \rho'$. The buoyant force is then smaller than the air parcel weight, their resultant is oriented downward and tends to push the parcel back to the equilibrium position.

Conversely, if the air parcel is lowered to altitude $z_0 - d$ ($d > 0$), $T_{\text{parcel}}(z_0 - d) > T(z_0 - d)$ and then $\rho < \rho'$. The buoyant force is then larger than the air parcel weight, their resultant is oriented upward and tends to push the parcel also back to the equilibrium position (see Figure 2).

So the equilibrium of the parcel is stable, and we found that: *An atmosphere with a temperature lapse rate* $\Lambda < \Gamma$ *is stable.*

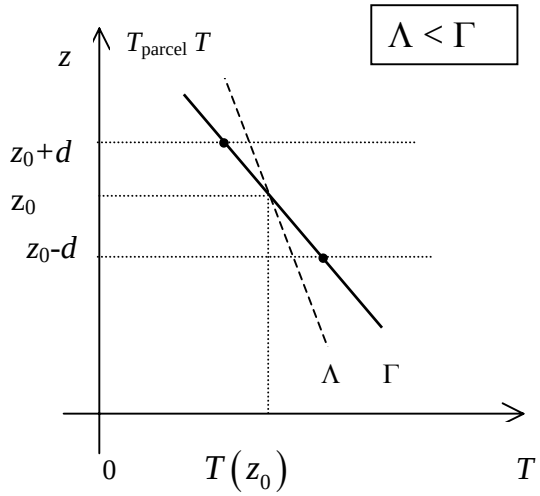


$T_{\text{parcel}} > T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} < \rho$ up↑

$T_{\text{parcel}} < T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} > \rho$ down↓

unstable

Figure 1



$T_{\text{parcel}} < T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} > \rho$ down ↓

$T_{\text{parcel}} > T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} < \rho$ up↑

stable

Figure 2

• In an atmosphere with lapse rate $\Lambda = \Gamma$, if the parcel is brought from equilibrium position and put in any other position, it will stay there, the equilibrium is indifferent. *An atmosphere with a temperature lapse rate* $\Lambda = \Gamma$ *is neutral*

3.2. In a stable atmosphere, with $\Lambda < \Gamma$, a parcel, which on ground has temperature $T_{\text{parcel}}(0) > T(0)$ and pressure $p(0)$ equal to that of the atmosphere, can rise and reach a maximal altitude h, where $T_{\text{parcel}}(h) = T(h)$.

In vertical motion from the ground to the altitude h, the air parcel realizes an adiabatic quasi-static process, in which its temperature changes from $T_{\text{parcel}}(0)$ to $T_{\text{parcel}}(h) = T(h)$. Using (11), we can write:

$$\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{-\frac{\Gamma}{\Lambda}} = \frac{T_{\text{parcel}}(0)}{T(h)} = \frac{T_{\text{parcel}}(0)}{T(0)\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)}$$

$$\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{1-\frac{\Gamma}{\Lambda}} = T_{\text{parcel}}(0)\times T^{-1}(0)$$

$$1-\frac{\Lambda h}{T(0)} = T_{\text{parcel}}^{\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)\times T^{-\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)$$

$$h = \frac{1}{\Lambda}T(0)\left[1-T_{\text{parcel}}^{\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)\times T^{-\frac{\Lambda}{\Lambda\text{-}\Gamma}}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{\Lambda}\left[T(0)-T_{\text{parcel}}^{-\frac{\Lambda}{\Lambda-\Gamma}}(0)T^{\frac{\Gamma}{\Gamma-\Lambda}}(0)\right]$$

So that the maximal altitude h has the following expression:

$$h = \frac{1}{\Lambda}\left[T(0)-\left(\frac{(T(0))^{\Gamma}}{(T_{\text{parcel}}(0))^{\Lambda}}\right)^{\frac{1}{\Gamma-\Lambda}}\right] \qquad (13)$$

4.

Using data from the Table, we obtain the plot of z versus T shown in Figure 3.

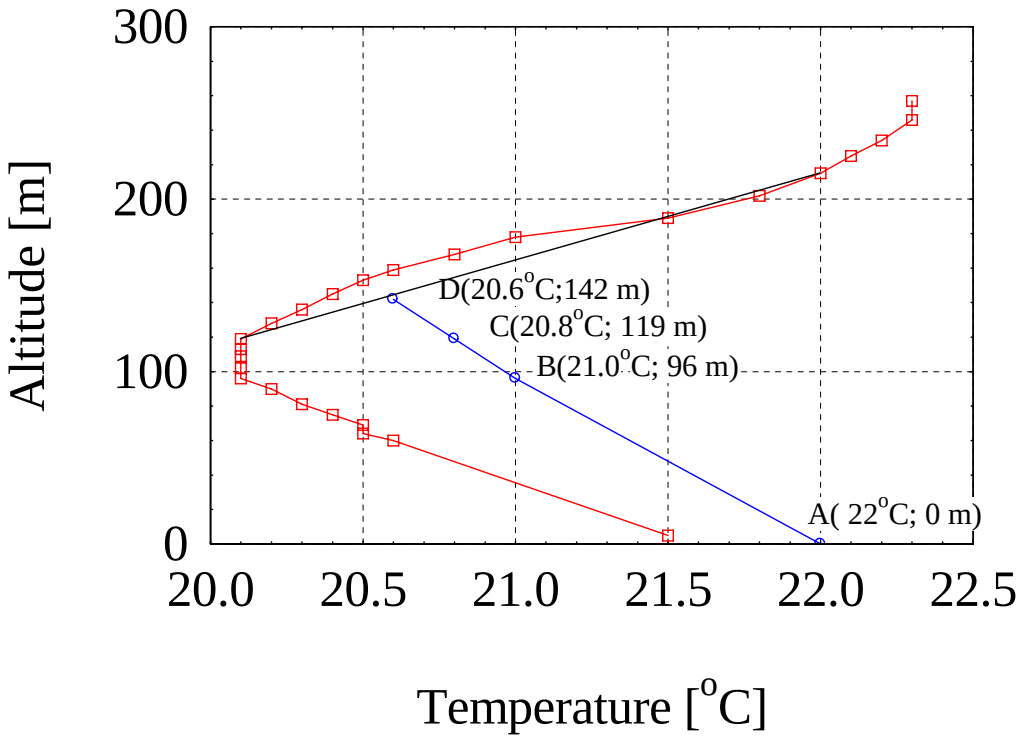


Figure 3

4.1. We can divide the atmosphere under 200m into three layers, corresponding to the following altitudes:

1) $0 < z < 96$ m, $\Lambda_1 = \dfrac{21.5 - 20.1}{91} = 15.4 \times 10^{-3} \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$.

2) $96 \text{ m} < z < 119$ m, $\Lambda_2 = 0$, isothermal layer.

3) $119 \text{ m} < z < 215$ m, $\Lambda_3 = -\dfrac{22 - 20.1}{215 - 119} = -0.02 \dfrac{\text{K}}{\text{m}}$.

In the layer 1), the parcel temperature can be calculated by using (11)

$T_{\text{parcel}}(96\,\text{m}) = 294.04 \text{ K} \approx 294.0 \text{ K}$ that is 21.0°C

In the layer 2), the parcel temperature can be calculated by using its expression in isothermal atmosphere $T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\,\mathbf{exp}\left[-\dfrac{\Gamma z}{T(0)}\right]$.

The altitude 96 m is used as origin, corresponding to 0 m. The altitude 119 m corresponds to 23 m. We obtain the following value for parcel temperature:

$$T_{\text{parcel}}(119\ \text{m}) = 293.81\ \text{K} \quad \text{that is } 20.8^{\text{o}}\text{C}$$

4.2. In the layer 3), starting from 119 m, by using (13) we find the maximal elevation h = 23 m, and the corresponding temperature 293.6 K (or 20.6 $^{\text{o}}$C).

Finally, the mixing height is

$$H = 119 + 23 = 142\ \text{m}.$$

And

$$T_{\text{parcel}}(142\ \text{m}) = 293.6\ \text{K} \quad \text{that is} \quad 20.6^{\text{o}}\text{C}$$

From this relation, we can find $T_{\text{parcel}}(119\ \text{m}) \approx 293.82\ \text{K}$ and $h = 23\ \text{m}$.

Note: By using approximate expression (12) we can easily find $T_{\text{parcel}}(z) = 294$ K and 293.8 K at elevations 96 m and 119 m, respectively. At 119 m elevation, the difference between parcel and surrounding air temperatures is 0.7 K (= 293.8 – 293.1), so that the maximal distance the parcel will travel in the third layer is $0.7/(\Gamma - \Lambda_3) = 0.7/0.03 = 23$ m.

5.

Consider a volume of atmosphere of Hanoi metropolitan area being a parallelepiped with height H, base sides L and W. The emission rate of CO gas by motorbikes from 7:00 am to 8:00 am

$$M = 800\ 000 \times 5 \times 12\ /3600 = 13\ 300\ \text{g/s}$$

The CO concentration in air is uniform at all points in the parallelepiped and denoted by $C(t)$.

5.1. After an elementary interval of time dt, due to the emission of the motorbikes, the mass of CO gas in the box increases by Mdt. The wind blows parallel to the short sides W, bringing away an amount of CO gas with mass $LHC(t)udt$. The remaining part raises the CO concentration by a quantity dC in all over the box. Therefore:

$$Mdt - LHC(t)udt = LWHdC$$

or

$$\frac{dC}{dt}+\frac{u}{W}C(t)=\frac{M}{LWH} \qquad (14)$$

5.2. The general solution of (14) is :

$$C(t)=K\,\mathbf{exp}\left(-\frac{ut}{W}\right)+\frac{M}{LHu} \qquad (15)$$

From the initial condition $C(0)=0$, we can deduce :

$$C(t)=\frac{M}{LHu}\left[1-\mathbf{exp}\left(-\frac{ut}{W}\right)\right] \qquad (16)$$

5.3. Taking as origin of time the moment 7:00 am, then 8:00 am corresponds to t =3600 s. Putting the given data in (15), we obtain :

$$C(3600\ \mathrm{s})=6.35\times(1-0.64)=2.3\ \mathrm{mg/m^3}$$

Solution

Task 1

1.

1.1. $T_0 = 25 \pm 1\ ^{o}\text{C}$

$$V_{\text{samp}}\left(T_0\right) = 573.9\ \text{mV}$$

With different experiment sets, V_{samp} may differ from the above value within ±40 mV.

Note for error estimation:
δV and δV are calculated using the specs of the multimeter: ±0.5% reading digit +2 on the last digit. Example: if V = 500mV, the error $\delta V = 500 \times 0.5\% + 0.2 = 2.7$ mV ≈ 3 mV.

Thus, $V_{samp}\left(T_0\right) = 574 \pm 3\ \text{mV}$.

All values of $V_{samp}\left(T_0\right)$ within 505÷585 mV are acceptable.

1.2. Formula for temperature calculation:

From Eq (1): $V_{\text{samp}} = V_{\text{samp}}(T_0) - \alpha(T - T_0)$

$$V_{\text{samp}}\left(50^{o}\text{C}\right) = 523.9\ \text{mV}$$

$$V_{\text{samp}}\left(70^{o}\text{C}\right) = 483.9\ \text{mV}$$

$$V_{\text{samp}}\left(80^{o}\text{C}\right) = 463.9\ \text{mV}$$

Error calculation: $\delta V_{\text{samp}} = \delta V_{\text{samp}}\left(T_0\right) + \left(T - T_0\right)\delta\alpha$

Example: $V_{\text{samp}} = 495.2$ mV, then $\delta V_{\text{samp}} = 2.7 + 0.03 \times (50 - 25) = 3.45\ \text{mV} \approx 3.5\ \text{mV}$

Thus:

$$V_{\text{samp}}\left(50^{o}\text{C}\right) = 524 \pm 4\ \text{mV}$$

$$V_{\text{samp}}\left(70^{o}\text{C}\right) = 484 \pm 4\ \text{mV}$$

$$V_{\text{samp}}\left(80^{\circ}\text{C}\right) = 464 \pm 5 \text{ mV}$$

The same rule for acceptable range of V_{samp} as in 1.1 is applied.

2.

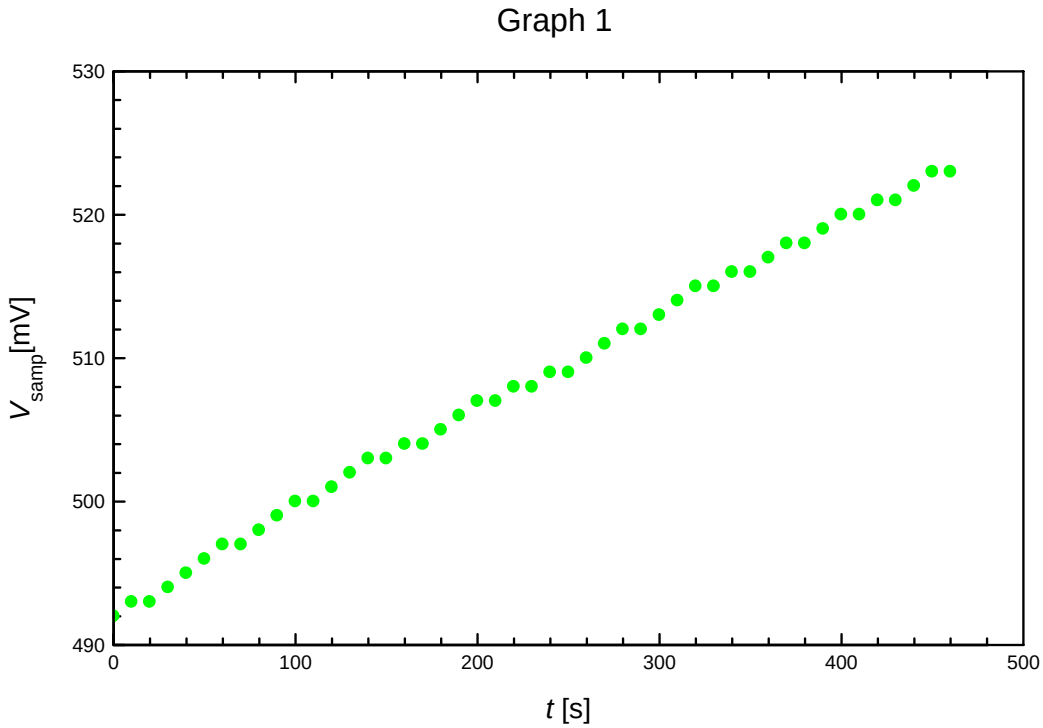
2.1. Data of cooling-down process without sample:

t (s)	V_{samp} (mV) (±3mV)	ΔV (mV) (±0.2mV)
0	492	-0.4
10	493	-0.5
20	493	-0.5
30	494	-0.6
40	495	-0.7
50	496	-0.7
60	497	-0.8
70	497	-0.8
80	498	-0.9
90	499	-1.0
100	500	-1.0
110	500	-1.1
120	501	-1.1
130	502	-1.2
140	503	-1.2
150	503	-1.3
160	504	-1.3
170	504	-1.4
180	505	-1.5
190	506	-1.6
200	507	-1.6
210	507	-1.7
220	508	-1.7
230	508	-1.8
240	509	-1.8
250	509	-1.8
260	510	-1.9
270	511	-1.9

280	512	-1.9
290	512	-2.0
300	513	-2.0
310	514	-2.1
320	515	-2.1
330	515	-2.1
340	516	-2.1
350	516	-2.2
360	517	-2.2
370	518	-2.3
380	518	-2.3
390	519	-2.3
400	520	-2.4
410	520	-2.4
420	521	-2.5
430	521	-2.5
440	522	-2.5
450	523	-2.6
460	523	-2.6

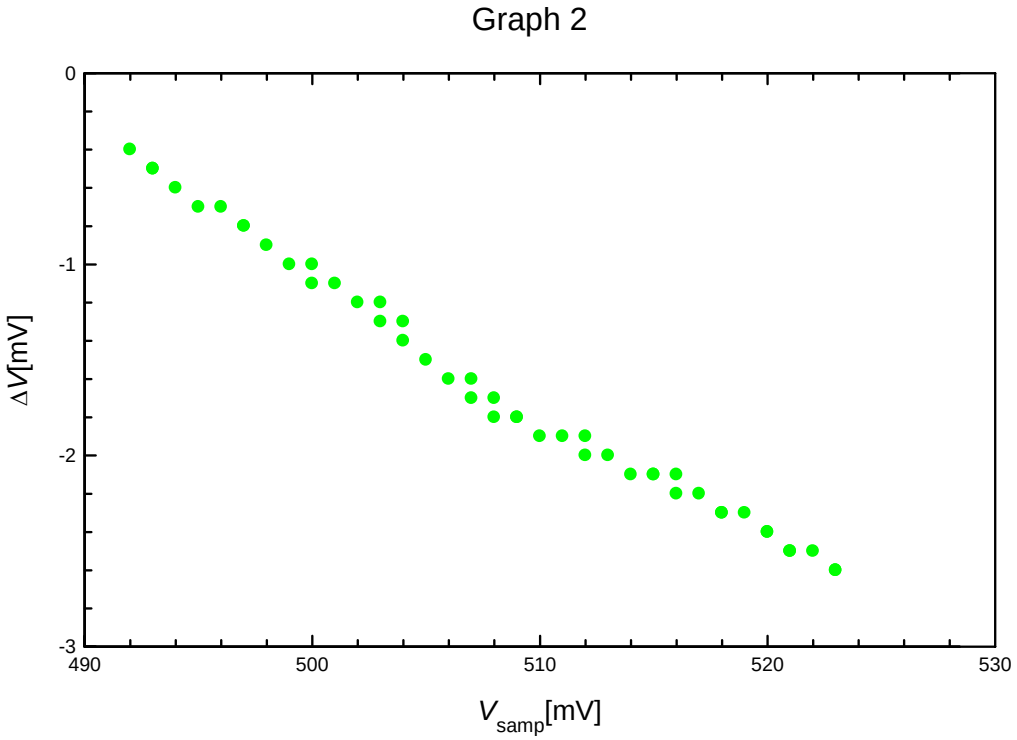
The acceptable range of ΔV is ±40 mV. There is no fixed rule for the change in ΔV with T (this depends on the positions of the dishes on the plate, etc.)

2.2.



The correct graph should not have any abrupt changes of the slope.

2.3.



The correct graph should not have any abrupt changes of the slope.

3.

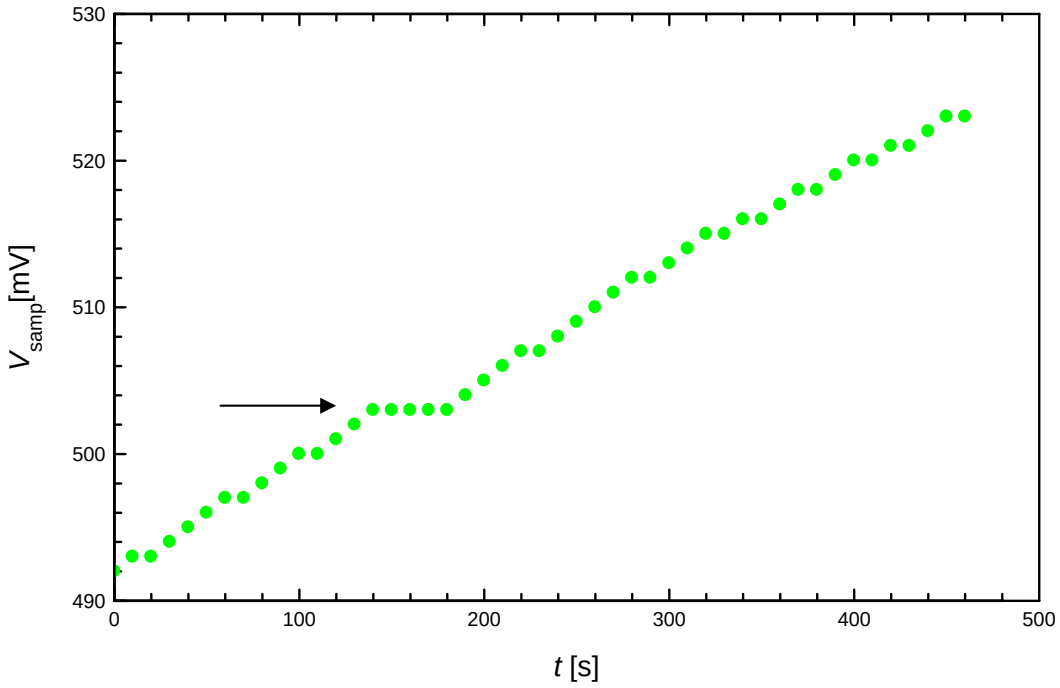
3.1. Dish with substance

t (s)	V_{samp} (mV) (±3mV)	ΔV (mV) (±0.2mV)
0	492	-4.6
10	493	-4.6
20	493	-4.6
30	494	-4.6
40	495	-4.6
50	496	-4.6
60	497	-4.6
70	497	-4.5
80	498	-4.5
90	499	-4.5
100	500	-4.5
110	500	-4.5
120	501	-4.5

130	502	-4.6
140	503	-4.6
150	503	-5.1
160	503	-5.6
170	503	-6.2
180	503	-6.5
190	504	-6.6
200	505	-6.5
210	506	-6.4
220	507	-6.3
230	507	-6.1
240	508	-5.9
250	509	-5.7
260	510	-5.5
270	511	-5.3
280	512	-5.1
290	512	-5.0
300	513	-4.9
310	514	-4.8
320	515	-4.7
330	515	-4.7
340	516	-4.6
350	516	-4.6
360	517	-4.5
370	518	-4.5
380	518	-4.4
390	519	-4.4
400	520	-4.4
410	520	-4.4
420	521	-4.4
430	521	-4.3
440	522	-4.3
450	523	-4.3
460	523	-4.3

3.2.

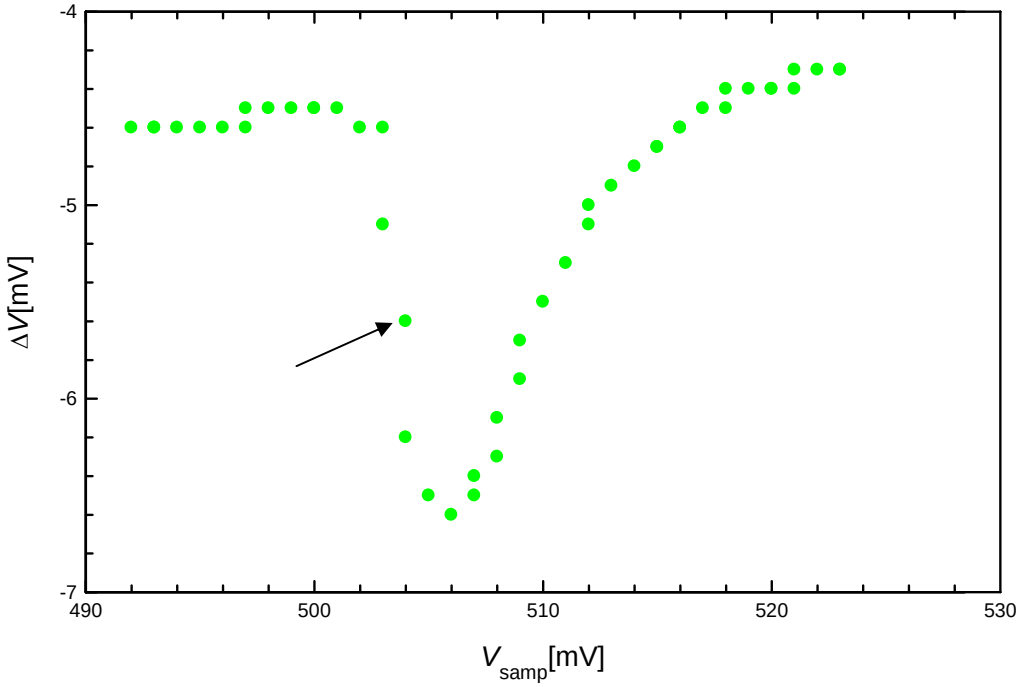
Graph 3



The correct Graph 3 should contain a short plateau as marked by the arrow in the above figure.

3.3.

Graph 4



The correct Graph 4 should have an abrupt change in ΔV, as shown by the arrow in the above figure.

Note: when the dish contains the substance, values of ΔV may change compared to those without the substance.

4.

4.1. V_s is shown in Graph 3. Value V_s = (503±3) mV. From that, T_s = 60.5 ^oC can be deduced.

4.2. V_s is shown in Graph 4. Value V_s = (503±3) mV. From that, T_s = 60.5 ^oC can be deduced.

4.3. Error calculations, using root mean square method:

Error of T_s: $T_s = T_0 + \dfrac{V(T_0) - V(T_s)}{\alpha} = T_0 + A$, in which A is an intermediate variable.

Therefore error of T_s can be written as $\delta T_s = \sqrt{(\delta T_0)^2 + (\delta A)^2}$, in which δ... is the error.

Error for A is calculated separately:

$$\delta A = \frac{V(T_0) - V(T_s)}{\alpha} \sqrt{\left\{ \frac{\delta[V(T_0) - V(T_s)]}{V(T_0) - V(T_s)} \right\}^2 + \left(\frac{\delta\alpha}{\alpha} \right)^2}$$

in which we have:

$$\delta[V(T_0) - V(T_s)] = \sqrt{[\delta V(T_0)]^2 + [\delta V(T_s)]^2}$$

Errors of other variables in this experiment:

δT_0=1^{o}C

$\delta V(T_0)$= 3 mV, read on the multimeter.

$\delta\alpha$ = 0.03 mV/^{o}C

$\delta V(T_s)$≈ 3 mV

From the above constituent errors we have:

$$\delta[V(T_0) - V(T_s)] \approx 4.24\,mV$$

$\delta A \approx 2.1°C$

Finally, the error of T_s is: $\delta T_s \approx 2.5°C$

Hence, the final result is: $T_s = 60 \pm 2.5\ ^oC$

Note: if the student uses any other reasonable error calculation method that leads to approximately the same result, it is also accepted.

Task 2

1.

1.1. $T_0 = 26 \pm 1^oC$

2.

2.1. Measured data with the lamp off

t (s)	$\Delta V(T_0)$ (mV) (±0.2mV)
0	19.0
10	19.0
20	19.0
30	19.0
40	19.0
50	18.9
60	18.9
70	18.9
80	18.9
90	18.9
100	19.0
110	19.0
120	19.0

Values of $\Delta V(T_0)$ can be different from one experiment set to another. The acceptable values lie in between -40÷+40 mV.

2.2. Measured data with the lamp on

t (s)	ΔV (mV) (±0.2mV)
0	19.5
10	21.9
20	23.8
30	25.5
40	26.9
50	28.0
60	29.0
70	29.9
80	30.7
90	31.4

100	32.0
110	32.4
120	32.9

When illuminated (by the lamp) values of ΔV may change 10 ÷ 20 mV compared to the initial situation (lamp off).

2.3. Measured data after turning the lamp off

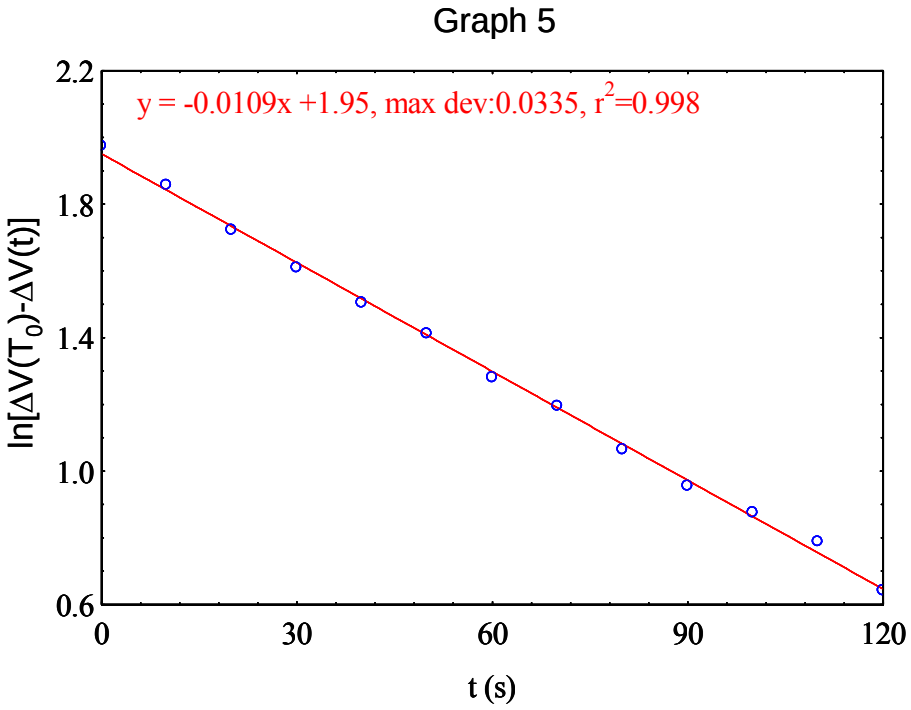
t (s)	ΔV (mV) (±0.2mV)
0	23.2
10	22.4
20	21.6
30	21.0
40	20.5
50	20.1
60	19.6
70	19.3
80	18.9
90	18.6
100	18.4
110	18.2
120	17.9

3. Plotting graph 5 and calculating k

3.1. $x = t$; $y = \mathbf{ln}\left[\Delta V\left(T_0\right) - \Delta V\left(t\right)\right]$

Note: other reasonable ways of writing expressions for x and y that also leads to a linear relationship using **ln** are also accepted.

3.2. Graph 5



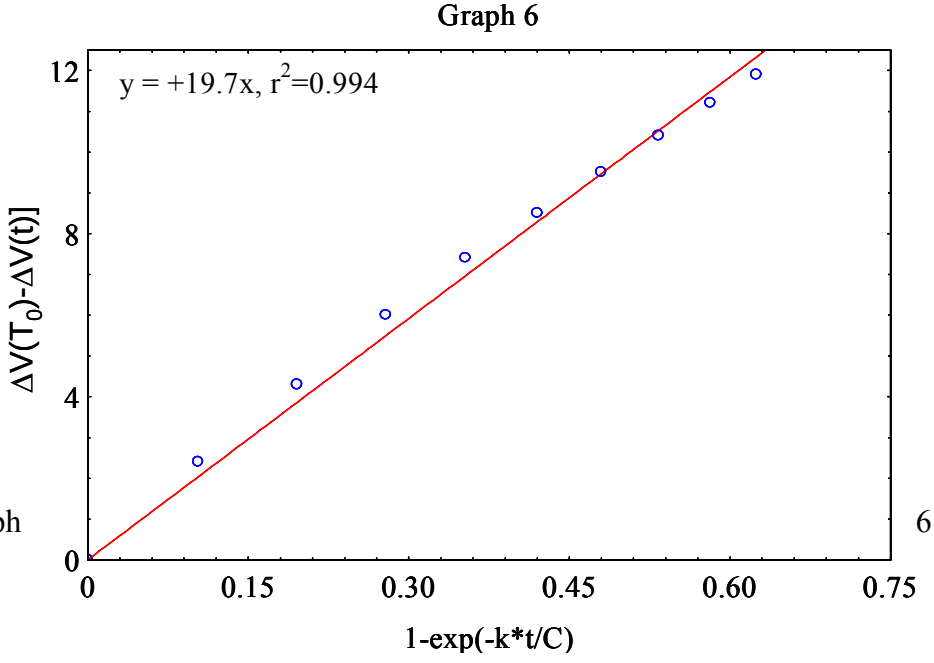
3.3. Calculating k: $\frac{k}{C} =$ 0.0109 s^{-1} and C = 0.69 J/K, thus: $k = 7.52\times10^{-3}$ W/K

Note: Error of k will be calculated in 5.5. Students are not asked to give error of k in this step. The acceptable value of k lies in between $6\times10^{-3} \div 9\times10^{-3}$ W/K depending on the experiment set.

4. Plotting Graph 6 and calculating E

4.1. $x = \left[1 - \exp\left(\frac{-kt}{C}\right)\right]$; $y = \left|\Delta V(T_0) - \Delta V(t)\right|$

4.2.



Graph 6 should

be substantially linear, with the slope in between 15÷25 mV, depending on the experiment set.

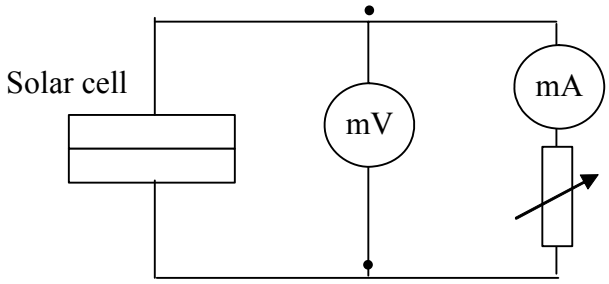
4.3. From the slope of Graph 6 and the area of the detector orifice we obtain E = 140 W/m^2. The area of the detector orifice is

$S_{\text{det}} = \pi R_{\text{det}}{}^2 = \pi \times (13\times10^{-3})^2 = 5.30\times10^{-4}$ m^2 with error: $\dfrac{\delta R_{\text{det}}}{R_{\text{det}}} = 5\%$

Error of E will be calculated in 5.5. Students are not asked to give error of E in this step. The acceptable value of E lies in between 120 ÷ 160 W/m^2, depending on the experiment set.

5.

5.1. Circuit diagram:



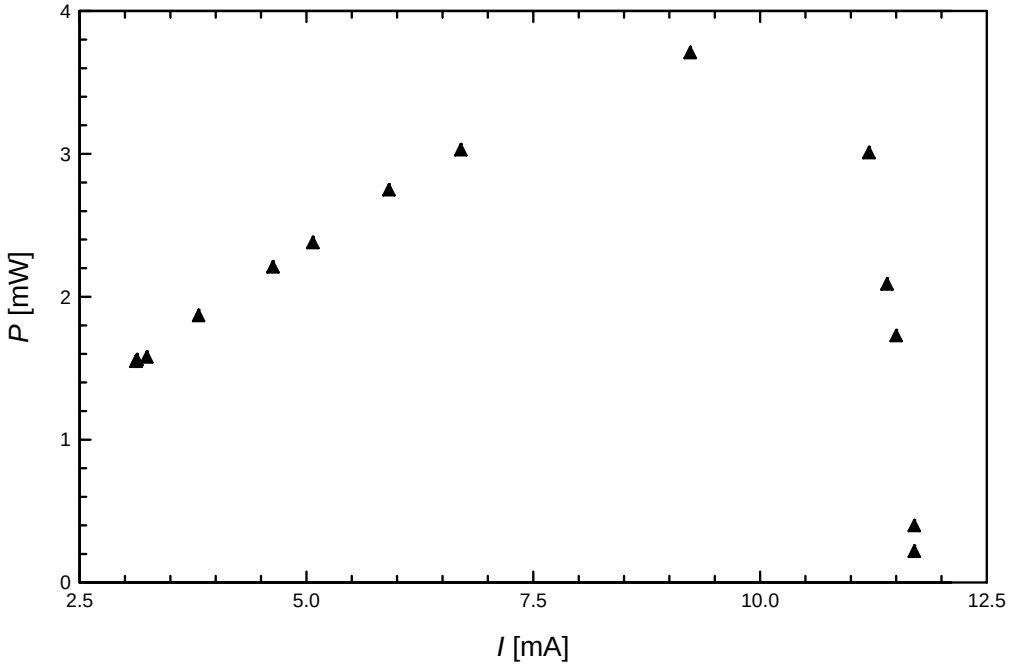
5.2. Measurements of V and I

V (mV) (±0.3÷3mV)	I (mA) (±0.05÷0.1mA)	P (mW)
18.6 ±0.3	11.7	0.21
33.5	11.7	0.39
150	11.5	1.72
157	11.6	1.82
182 ±1	11.4	2.08
267	11.2	3.00
402 ±2	9.23	3.70
448	6.70	3.02
459	5.91	2.74
468	5.07	2.37
473 ±3	4.63	2.20
480	3.81	1.86
485	3.24	1.57

487	3.12	1.54
489	3.13	1.55

5.3.

Graph 7



5.4. $P_{max} = 3.7 \pm 0.2$ mW

The acceptable value of P_{max} lies in between 3÷4.5 mW, depending on the experiment set.

5.5. Expression for the efficiency

$$S_{cell} = 19 \times 24\,\text{mm}^2 = 450 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

Then $\eta_{max} = \dfrac{P_{max}}{E \times S_{cell}} = 0.058$

Error calculation:

$\delta\eta_{max} = \eta_{max}\sqrt{\left(\dfrac{\delta P_{max}}{P_{max}}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta E}{E}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta S_{cell}}{S_{cell}}\right)^2}$, in which S_{cell} is the area of the solar cell.

$\dfrac{\delta P_{max}}{P_{max}}$ is estimated from Graph 7, typical value ≈ 6 %

$\frac{\delta S_{\text{cell}}}{S_{\text{cell}}}$: error from the millimeter measurement (with the ruler), typical value ≈ 5 %

E is calculated from averaging the ratio (using Graph 6):

$$B = \frac{\Delta V(T_0) - \Delta V(t)}{1 - \mathbf{exp}\left(-\frac{k}{C}t\right)} = \frac{E\pi {R_{\text{det}}}^2 \alpha}{k}$$

in which B is an intermediate variable, R_{det} is the radius of the detector orifice.

$$E = \frac{kB}{\pi {R_{\mathbf{det}}}^2 \alpha}$$

Calculation of error of E:

$$\overline{\left(\frac{\delta E}{E}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\delta B}{B}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta R_{\mathbf{det}}}{R_{\mathbf{det}}}\right)^2 + \left(\frac{\delta \alpha}{\alpha}\right)^2}$$

k is calculated from the regression of:

$$\Delta T = \Delta T(0)\mathbf{exp}\left(-\frac{k}{C}t\right), \text{ hence } \mathbf{ln}\,\Delta T = \mathbf{ln}\,\Delta T(0) - \frac{k}{C}t$$

We set $k/C = m$ then $k = mC$

From the regression, we can calculate the error of m:

$$\frac{\delta m}{m} \approx 2(1-r) \approx 0.2\%$$

$$\frac{\delta k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta C}{C}\right)^2}$$

We derive the expression for the error of $\eta_{\max}$:

$$\delta\eta_{\max} = \eta_{\max}\sqrt{\left(\frac{\delta P_{\max}}{P_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_{\text{cell}}}{S_{\text{cell}}}\right)^2 + \left(\frac{\delta B}{B}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta R_{\mathbf{det}}}{R_{\mathbf{det}}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\delta \alpha}{\alpha}\right)^2}$$

Typical values for $\eta_{\max}$ and other constituent errors:

$\eta_{\mathbf{max}} \approx 0.058$

$$\frac{\delta P_{\mathbf{max}}}{P_{\mathbf{max}}} = 5\% \;;\quad \frac{\delta B}{B} \approx 0.6\% \;;\quad \frac{\delta m}{m} \approx 0.2\% \;;\quad \frac{\delta S_{\text{cell}}}{S_{\text{cell}}} \approx 5\% \;;\quad \frac{\delta R_{\mathbf{det}}}{R_{\mathbf{det}}} \approx 5\% \;;$$

$$\frac{\delta C}{C} \approx 3\%\,; \frac{\delta k}{k} \approx 3\%\,;\ \frac{\delta E}{E} \approx 10.5\%\,;\ \frac{\delta \alpha}{\alpha} \approx 1.5\%$$

Finally:

$$\frac{\delta \eta_{\max}}{\eta_{\max}} = 12.7\%\,;\ \delta \eta_{\mathbf{max}} \approx 0.0074$$

and

$$\eta_{\mathbf{max}} = \left(5.8 \pm 0.8\right)\%$$

Note: if the student uses any other reasonable error method that leads to approximately the same result, it is also accepted.