第 38 届全国中学生物理竞赛决赛试题与参考解答

一、一个不透明薄片上的小圆孔如图 1a 中黑色之间的部分所示，半径 OM 为 1.00 mm。用波长 $\lambda = 632.8$ nm 的氦氖激光作为光源从小孔左侧平行正入射。在垂直于小孔的对称轴上右侧有某个点 P；相对于 P 点，小孔处的波面可视为半波带的组合：以 P 点为球心，P 点到小孔中心 O 的距离为 r_0（$r_0 >> \lambda$），分别以 $r_0 + \frac{\lambda}{2}$、$r_0 + 2\times\frac{\lambda}{2}$、$r_0 + 3\times\frac{\lambda}{2}$、… 为半径做球面，将小孔所在平面的波面划分成 N 个环带（N 为自然数），P 点到小孔边缘 M 的距离为 $r_0 + N\frac{\lambda}{2}$，半径最小的环带则是一个圆面，这样划分出的环带称为半波带（因为相邻环带的相应边缘到 P 点的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$）。显然，环带的数目 N 决定了 P 点的位置。在需要将原有半波带重新划分或合并时，只考虑将已有的每个半波带重新划分为若干个新的半波带，或者将已有的若干个半波带重新合并为一个新的半波带。

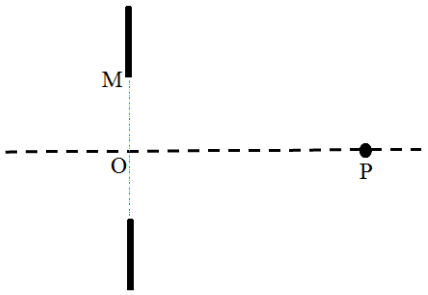


图 1a

（1）若 $N = 2n+1$，试分别求相应于 $n = 0$ 和 $n = 1$ 时 P 点的位置 P_0（P_0 为轴上最右侧的亮点，称为主焦点）和 P_1（P_1 也为亮点，称为次焦点）。

（2）若 $N = 4$（4 级波带片），且在第 1、3 半波带放置透明材料（图 1b 中灰色部分），使通过该透明材料的光增加 $\frac{\lambda}{2}$ 光程。求

（i）此 4 级波带片的主焦点 P_0' 的位置；

（ii）紧邻主焦点 P_0' 左侧暗点 P_{-1}' 的位置；

（iii）紧邻主焦点 P_0' 右侧暗点 P_{+1}' 的位置。

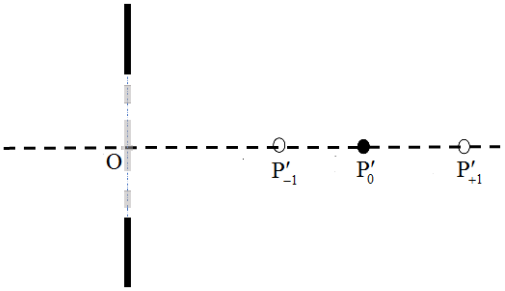


图 1b

（3）波带片不仅可以实现平行光的聚焦，还可以成像。以上的 4 级波带片平行光的聚焦过程，相当于物距无穷远、像距等于焦距的情形。将一个点光源（物）置于轴上 O 点左侧 3 m 处的 S 点，其像点为 S′，如图 1c 所示。

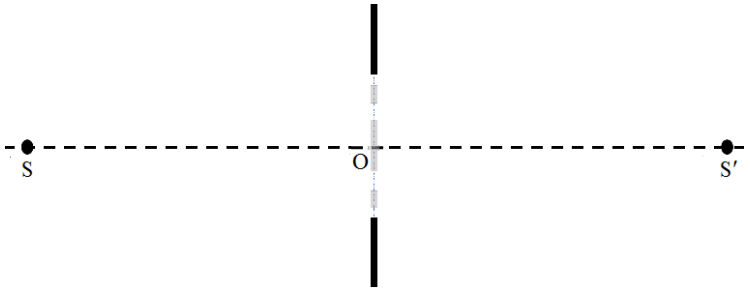


图 1c

（i）4 级波带片主焦点对应的像距 OS′ 是多少？并验证成像公式是否满足。

（ii）如果该波带片所成的像不是唯一的，轴上还有其他像点，那么距离第（3）（i）问所得到的像点最近的另一个像点在哪里？与此成像过程对应的次焦点的焦距是多少？（不能应用成像公式）

（iii）如果将物放置于此波带片左侧， 与 O 点距离为 $OP_0'/2$，求分别将 4 级波带片的主焦点和（3）（ii）所述的次焦点作为焦点而成的像的类型（虚像或实像）与位置。（不能应用成像公式）

参考解答：

（1）（8 分）对于焦点 P，固定点 PO 和 PM 的距离差为 1/2 波长。设 P 到小孔中心的距离为 r_0（P 点位置坐标为 x），由半波带法有

$$\sqrt{R^2+r_0^2}=r_0+\frac{\lambda}{2} \qquad ①$$

式中 R 是小圆孔半径。利用题给数据得

$$1.00^2+x_0^2=(x_0+0.3164\times10^{-3})^2,$$

式中 $r_0=x_0$ mm。由此得

$$r_0=1580\ \text{mm} \qquad ②$$

设 3 波带焦点 P_1 到小孔中心的距离为 r_1（P_1 位置坐标为 x_1），由半波带法有

$$\sqrt{R^2+r_1^2}=r_1+(2\times1+1)\frac{\lambda}{2} \qquad ③$$

利用题给数据得

$$1.00^2+x_1^2=(x_1+3\times0.3164\times10^{-3})^2,$$

式中 $r_1=x_1$ mm。由此得

$$r_1=527\ \text{mm} \qquad ④$$

（2）（i）（8 分）由于灰色部分增加了 1/2 波长，导致所有波带到达固定点 P_0' 时，其光程差同中心波带的光程差变为 0，λ，λ，因此四个波带在固定点 P_0' 处并非两两相消，而是共同增强，形成焦点。在计算几何长度时，最外侧波带外缘的几何长度与中心轴线的几何长度相比，增加 2λ，故

$$\sqrt{R^2+r_0'^2}=r_0+2\lambda \qquad ⑤$$

利用题给数据得

$$1.00^2+x'^2=(x'+4\times0.3164\times10^{-3})^2,$$

式中 $r_0'=x'$ mm。由此得

$$r_0'=395\ \text{mm} \qquad ⑥$$

（ii）（8 分）紧邻焦点 P_0' 左侧的暗点 P_{-1}' 出现于进一步划分波带片为 8 个波带结构，

$$\sqrt{R^2+r_{-1}'^2}=r_0+4\lambda \qquad ⑦$$

利用题给数据得

$$1.00^2+x_{-1}'^{\,2}=(x_{-1}'+8\times0.3164\times10^{-3})^2,$$

式中 $r_{-1}'=x_{-1}'$ mm。由此得到暗点 P_{-1}' 坐标为

$$r_{-1}'=198\ \text{mm} \qquad ⑧$$

（iii）（8 分）紧邻焦点 P_0' 右侧的暗点 P_{+1}' 出现于四个波带两两归并，整体视为两个波带时出现：

$$\sqrt{R^2+r_{+1}'^2}=r_0+\lambda \qquad ⑨$$

利用题给数据得

$$1.00^2+x_{+1}'^{\,2}=(x_{+1}'+2\times0.3164)^2\,,$$

式中 $r_{+1}'=x_{+1}'$ mm。得到暗点 P_{+1}' 坐标为

$$r_{+1}'=790\ \text{mm} \qquad ⑩$$

（3）（i）（10 分）光线从波带片最外侧经转折到达像点时，其几何路径长度和轴线相比，增加了 2λ。方程为

$$\sqrt{s_{物}^2+R^2}+\sqrt{s_{像}^2+R^2}=s_{物}+s_{像}+4\times\frac{\lambda}{2} \qquad ⑪$$

式中 $s_{物}=\mathrm{OS}$，$s_{像}=\mathrm{OS}'$。利用题给数据得

$$\sqrt{3000^2+1.00^2}+\sqrt{x_2^2+1.00^2}=3000+x_2+2\lambda$$

式中 $s_{像}=x_2$ mm。由此解出

$$s_{像}=455\ \text{mm} \qquad ⑫$$

成像公式为

$$\frac{1}{s_{物}}+\frac{1}{s_{像}}=\frac{1}{f} \qquad ⑬$$

代入题给数据得

$$f=395\ \text{mm} \qquad ⑭$$

和 4 级波带片焦距 r_0' 即⑥式一致，成像公式成立。

（ii）（8 分）下一个像点，需要将 4 级波带片拆解为 12 级波带片。因此上一问中所表述的路径差即为 6λ，方程为

$$\sqrt{s_{物}^2+R^2}+\sqrt{s_{像}'^2+R^2}=s_{物}+s_{像}'+3\times4\times\frac{\lambda}{2} \qquad ⑮$$

利用题给数据得

$$\sqrt{3000^2+1.00^2}+\sqrt{x_3^2+1.00^2}=3000+x_3+6\lambda$$

式中 $s_{像}'=x_3$ mm。由此解出

$$s_{像}'=137\ \text{mm} \qquad ⑯$$

对应的次焦点是将 4 级波带片拆解为 12 级波带片时对应的焦点。每个波带片按照奇数次拆分时可获得对应的新的次级焦点，因此 4 级波带片中的每个波带需拆分为 3 个波带才能获得此次焦点。

$$\sqrt{f'^2+R^2}=f'+3\times4\times\frac{\lambda}{2} \qquad ⑰$$

其中 f' 为次焦点的焦距。利用题给数据得

$$\sqrt{f'^2+1.00^2}=f'+6\lambda$$

由此解出：

$$f'=132\,\text{mm} \qquad ⑱$$

即次焦距为 132mm。

（iii）（14 分）考虑将 4 级波带片的主焦点作为焦点而成的像。由于物点在左侧主焦点和波带片之间，仍然在左侧。由⑥式或⑭式知

$$f = r_0' = 395 \text{ mm}，$$

据题意知物距为

$$s_{物}=\frac{f}{2}=198 \text{ mm} \qquad ⑲$$

设像距为 $s''_{像}$，则

$$\sqrt{s_{物}^2+R^2}+\sqrt{s''^2_{像}+R^2}=s_{物}+s''_{像}+4\times\frac{\lambda}{2} \qquad ⑳$$

利用题给数据得

$$\sqrt{198^2+1.00^2}+\sqrt{x_4^2+1.00^2}=198+x_4+2\lambda$$

式中 $s''_{像}=x_4$ mm。由此解出

$$s''_{像}=-396 \text{ mm}， \qquad ㉑$$

即该像点为虚像，在左侧焦点位置。 ㉒

考虑将在第（3）（ii）小问中所述的次焦点作为焦点所成的像。设像距为 $s'''_{像}$，则

$$\sqrt{s_{物}^2+R^2}+\sqrt{s'''^2_{像}+R^2}=s_{物}+s'''_{像}+3\times4\times\frac{\lambda}{2} \qquad ㉓$$

利用题给数据得

$$\sqrt{198^2+1^2}+\sqrt{x_5^2+1^2}=198+x_5+6\lambda$$

式中 $s'''_{像}=x_5$ mm。由此解出

$$s'''_{像}=393 \text{ mm}， \qquad ㉔$$

即该像点为实像，在波带片右侧 393mm 处的位置。

二、2021 年 6 月神州 12 载人火箭与天宫太空站成功对接，这里涉及到追击者（神州 12 火箭）与目标（太空站）在绕地轨道相遇的问题。本题采用霍尔曼变轨方案来探究追击者如何改变速度（速率和方向）与固定轨道上的目标实现对接（相遇）。

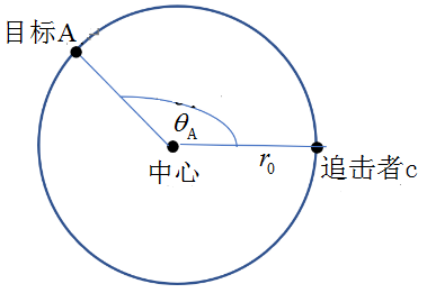


图 2a.

如图 2a，目标 A 和追击者 c 都在以半径为 r_0 的圆轨道上以速率 v_0 逆时针运动。在 0 时刻两者的位置分别为

$$\theta_{A,i}=\theta_0,\ \theta_{c,i}=0,\ r_{A,i}=r_{c,i}=r_0$$

在此时刻，追击者 c 瞬间点火，速度瞬间改变 $\Delta\boldsymbol{v}$（如图 2b 所示)；c 的轨道也从半径为 r_0 的圆轨道瞬间变为图 2c 所示的椭圆轨道，椭圆轨道的长轴与极轴方向（中心到点火时 c 的位置的连线）之间的夹角为 ϕ（ϕ 是沿顺时针方向测量的)。c 的运动方向与极轴方向之间的夹角记为 θ_c（θ_c 正方向为逆时针方向), c 与中心相距 $r_c(\theta_c)$。

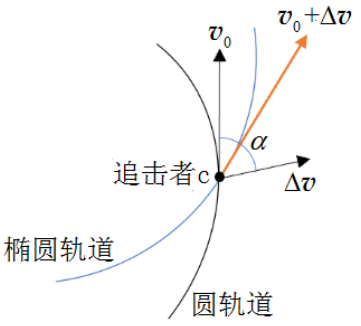


图 2b

（1）若飞行物的质量 m、能量 E（实际为飞行物和地球组成系统的总机械能）和角动量 L 均为已知量，试用 E、L、m 和题给的已知参量 r_0、v_0 等来表示轨道参量 R、ε。已知：正椭圆轨道（长轴沿极轴方向）在极坐标下的形式（原点取为右焦点）为

$$r(\theta)=\frac{R}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

其中，R 是轨道尺寸参量，ε 是轨道偏心率，统称为轨道参量。

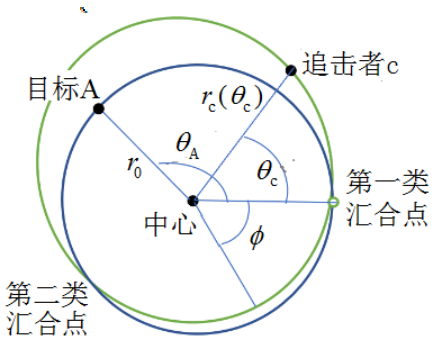


图 2c

（2）写出点火（见图 2c）后追击者 c 的轨道 $r_c(\theta_c)$ 的表达式，用 r_0、偏心率 ε 和 ϕ 表示。

（3）写出点火后追击者 c 的轨道周期 T_c 与目标 A 的周期 T_A 之比 T_c/T_A，用 ε 和 ϕ 表示。

（4）定义两个点火参数（见图 2b)：无量纲的速度改变率 $\delta=\left|\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}_0}\right|$，$\Delta\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 之间的夹角 α（重合时 $\alpha=0$，顺时针方向取为正方向)。试用点火参数 δ 和 α 来表示追击者 c 的轨道的偏心率 ε 和 $\varepsilon\cos\phi$。

（5）考虑追击者 c 和目标 A 在第一类轨道汇合点（见图 2c）相遇的情形。设自 0 时刻起目标 A 经过第一类轨道汇合点的次数为 n_A，追击者 c 经过第一类轨道汇合点的次数（起始时不计在内）为 n_c。在 0 时刻，$\theta_{A,i}=\theta_0,\ \theta_{c,i}=0$。求 n_A，用 n_c、θ_0、ε 和 ϕ 表示。

（6）将 n_A 用 δ、α 表出，固定 δ，试求函数 $n_A(\alpha)$ 相对于 α 变化的两个简单、明显的极值点 α_0（以便即使喷火时角度 α 相对于 α_0 有一些偏差，但解依然近似成立，便于成功对接)。

（7）如果取上述两个 α_0 值之一，

（i）δ 值有一个上限 δ_{max}（即若 $\delta>\delta_{max}$，追击者 c 和目标 A 不会相遇)，求 δ_{max}；

（ii）令 θ_A 的初始值为 θ_0，试写出 δ 与 θ_0、n_A、n_c 的关系式；并求当 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$、$n_A=2$、$n_c=1$ 时 δ 的值。

参考解答：

（1）由轨道方程可知

$$r_{近}=\frac{R}{1+\varepsilon},\quad r_{远}=\frac{R}{1-\varepsilon} \qquad ①$$

总能量 E 、轨道角动量 L 为守恒量：

$$L=mv_{近}r_{近}=mv_{远}r_{远}=mvr$$

或

$$v=\frac{L}{mr} \qquad ②$$

系统总能量为

$$E=-\frac{C}{r_{近}}+\frac{L^2}{2mr_{近}^2}=-\frac{C}{r_{远}}+\frac{L^2}{2mr_{远}^2} \qquad ③$$

其中

$$C=GMm=mr_0v_0^2$$

这里，利用了

$$\frac{GMm}{r_0^2}=m\frac{v_0^2}{r_0}$$

由①②③式和 C 的表达式得

$$R=\frac{L^2}{m^2r_0v_0^2} \qquad ④$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m^3r_0^2v_0^4}}=\sqrt{1+\frac{2ER}{mr_0v_0^2}} \qquad ⑤$$

（2）追击者c的椭圆轨道点火后变为偏转的椭圆。按题中角度定义，这偏转的椭圆轨道为

$$r_{\mathrm{c}}(\theta_{\mathrm{c}})=\frac{R}{1+\varepsilon\cos(\theta_{\mathrm{c}}+\phi)} \qquad ⑥$$

初始条件为

$$r_c=r_0,\quad 当\,\theta_{\mathrm{c}}=0$$

代入⑥式得

$$R=r_0(1+\varepsilon\cos\phi) \qquad ⑦$$

于是

$$r_{\mathrm{c}}(\theta_{\mathrm{c}})=\frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon\cos(\theta_{\mathrm{c}}+\phi)} \qquad ⑧$$

（3）由⑥式可得点火后的椭圆轨道的长轴长度 $2a$ 为

$$2a=r_{近}+r_{远}=\frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon}+\frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1-\varepsilon}=\frac{2r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1-\varepsilon^2} \qquad ⑨$$

目标 A 的轨道长轴为 $2r_0$ 。由开普勒第三定律得

$$\frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{A}}}=\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}=\left(\frac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2} \qquad ⑩$$

（4）现将点火后速度用点火参数表达。取极坐标，径向（从圆轨道中心即焦点指向追击者c所在位置的矢径方向）速度为

$$v_r = v_0\delta\sin\alpha$$

切向（垂直于矢径的方向）速度为

$$v_\theta = v_0(1+\delta\cos\alpha) \qquad ⑪$$

由角动量L守恒有

$$L = mr_0v_\theta = mr_0v_0(1+\delta\cos\alpha) \qquad ⑫$$

由⑫式和

$$r_{近} = \frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon}，\quad r_{远} = \frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1-\varepsilon}$$

得，在近地和远地点速率为

$$\begin{aligned} v_{近} &= \frac{L}{mr_{近}} = \frac{r_0v_0(1+\delta\cos\alpha)}{\frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon}} = v_0\frac{(1+\varepsilon)(1+\delta\cos\alpha)}{1+\varepsilon\cos\phi}, \\ v_{远} &= \frac{L}{mr_{远}} = \frac{r_0v_0(1+\delta\cos\alpha)}{\frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1-\varepsilon}} = v_0\frac{(1-\varepsilon)(1+\delta\cos\alpha)}{1+\varepsilon\cos\phi} \end{aligned} \qquad ⑬$$

由能量守恒有

$$E = -\frac{C}{r}+\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{C}{r}+\frac{L^2}{2mr^2} \qquad ⑭$$

在远地和近地点有

$$-\frac{C}{r_{远}}+\frac{1}{2}mv_{远}^2 = -\frac{C}{r_{近}}+\frac{1}{2}mv_{近}^2$$

此即

$$-\frac{(1-\varepsilon)C}{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}+\frac{1}{2}m\left[v_0\frac{(1-\varepsilon)(1+\delta\cos\alpha)}{1+\varepsilon\cos\phi}\right]^2 = -\frac{(1+\varepsilon)C}{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}+\frac{1}{2}m\left[v_0\frac{(1+\varepsilon)(1+\delta\cos\alpha)}{1+\varepsilon\cos\phi}\right]^2$$

化简后有

$$\frac{C}{r_0} = mv_0^2\frac{(1+\delta\cos\alpha)^2}{1+\varepsilon\cos\phi}$$

利用C的表达式，上式即

$$1+\varepsilon\cos\phi = (1+\delta\cos\alpha)^2$$

或

$$\varepsilon\cos\phi = \delta\cos\alpha(2+\delta\cos\alpha) \qquad ⑮$$

点火后（$t=0$）沿轨道径向速度和切向速度大小之比为

$$\left.\frac{v_r}{v_\theta}\right|_{t=0} = \frac{\delta\sin\alpha}{1+\delta\cos\alpha} = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\mathrm{d}r_c}{\mathrm{d}\theta_c}\right)_{\theta_c=0} = \frac{\varepsilon\sin\phi}{1+\varepsilon\cos\phi} \qquad ⑯$$

此即

$$\varepsilon\sin\phi=(1+\varepsilon\cos\phi)\frac{\delta\sin\alpha}{1+\delta\cos\alpha}$$
$$=(1+2\delta\cos\alpha+\delta^2\cos^2\alpha)\frac{\delta\sin\alpha}{1+\delta\cos\alpha} \qquad ⑰$$
$$=\delta\sin\alpha(1+\delta\cos\alpha)$$

由⑮⑰式得

$$\varepsilon=\delta\sqrt{1+3\cos^2\alpha+2\delta\cos\alpha(1+\cos^2\alpha)+\delta^2\cos^2\alpha} \qquad ⑱$$

[（解法二）

现将点火后速度用点火参数表达。取极坐标，径向（从圆轨道中心即焦点指向追击者 c 所在位置的矢径方向）速度为

$$v_r=v_0\delta\sin\alpha$$

切向（垂直于矢径的方向）速度为

$$v_\theta=v_0(1+\delta\cos\alpha) \qquad ⑪$$

由角动量 L 守恒有

$$L=mr_0v_\theta=mr_0v_0(1+\delta\cos\alpha) \qquad ⑫$$

由④⑫式得

$$R=\frac{[mr_0v_0(1+\delta\cos\alpha)]^2}{m^2r_0v_0^2}=r_0(1+\delta\cos\alpha)^2 \qquad ⑬$$

由⑦⑬式得

$$(1+\varepsilon\cos\phi)=(1+\delta\cos\alpha)^2 \qquad ⑭$$

于是

$$\varepsilon\cos\phi=\delta\cos\alpha(2+\delta\cos\alpha) \qquad ⑮$$

变速后的能量

$$E=-\frac{GMm}{r_0}+\frac{1}{2}m\left[v_0^2(1+\delta\cos\alpha)^2+v_0^2\delta^2\sin^2\alpha\right] \qquad ⑯$$

利用 $C=GMm=mr_0v_0^2$ 得

$$E=-mv_0^2+\frac{1}{2}m\left[v_0^2(1+\delta\cos\alpha)^2+v_0^2\delta^2\sin^2\alpha\right] \qquad ⑰$$

将⑰式代入⑤式得

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m^3r_0^2v_0^4}}=\sqrt{1+\frac{2ER}{mr_0v_0^2}}=\delta\sqrt{1+3\cos^2\alpha+2\delta\cos\alpha(1+\cos^2\alpha)+\delta^2\cos^2\alpha} \qquad ⑱$$

]

（5）在 t 时刻两者相遇，要求：

$$t=n_cT_c=n_AT_A-\frac{\theta_0}{2\pi}T_A \qquad ⑲$$

利用⑩⑲式得

$$n_{\mathrm{A}}=\frac{\theta_0}{2\pi}+n_{\mathrm{c}}\frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{A}}}=\frac{\theta_0}{2\pi}+n_{\mathrm{c}}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2} \qquad ⑳$$

（6）将⑮⑱式和代入⑳式得

$$n_{\mathrm{A}}(\alpha)=\frac{\theta_0}{2\pi}+n_{\mathrm{c}}[f(\alpha)]^{\frac{3}{2}}$$

式中

$$f(\alpha)=\frac{1+\delta\cos\alpha(2+\delta\cos\alpha)}{1-\delta^2\left[1+3\cos^2\alpha+2\delta\cos\alpha(1+\cos^2\alpha)+\delta^2\cos^2\alpha\right]} \qquad ㉑$$

并对 α 求导，使得

$$\frac{\mathrm{d}f(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=0 \qquad ㉒$$

此即

$$\frac{\mathrm{d}f(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=-\sin\alpha\frac{\mathrm{d}f(\cos\alpha)}{\mathrm{d}\cos\alpha}=0$$

显然有解

$$\alpha=0,\ \pi \qquad ㉓$$

（7）（i）若取 $\alpha=\alpha_0=0$，由⑱式有

$$\varepsilon=\delta\sqrt{4+4\delta+\delta^2}=\delta(\delta+2)\le 1 \qquad ㉔$$

由此得

$$0<\delta\le\delta_{\max}=\sqrt{2}-1 \quad （或 0<\delta<0.5） \qquad ㉕$$

[

若取 $\alpha=\alpha_0=\pi$，由⑱式得

$$\varepsilon=\delta\sqrt{\delta^2-4\delta+4}=\delta|\delta-2|\le 1 \qquad ㉔$$

当 $\delta\le 2$，

$$\varepsilon=\delta(2-\delta)\le 1$$

由此得

$$-(\delta-1)^2\le 0$$

恒成立。当 $\delta>2$，

$$\varepsilon=\delta(\delta-2)\le 1$$

由此得

$$2<\delta\le\sqrt{2}+1$$

合起来有，若取 $\alpha_0=\pi$，

$$0<\delta\le\delta_{\max}=\sqrt{2}+1 \qquad ㉕$$

]

（ii）若取 $\alpha=\alpha_0=0$，由⑳㉑式有

$$\left(\frac{2\pi n_{\mathrm{A}}-\theta_0}{2\pi n_{\mathrm{c}}}\right)^{2/3}=\frac{1+\delta(2+\delta)}{1-\delta^2\left[4+4\delta+\delta^2\right]}=\frac{1}{1-\delta(2+\delta)} \qquad ㉖$$

或

$$\delta^2+2\delta+\left(\frac{2\pi n_c}{2\pi n_A-\theta_0}\right)^{2/3}-1=0$$

它有解的条件是判别式

$$\Delta=2^2-4\left[\left(\frac{2\pi n_c}{2\pi n_A-\theta_0}\right)^{2/3}-1\right]\geq 0$$

当 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$, $n_A=2$, $n_c=1$（易验证满足 $\Delta\geq 0$），上式成为

$$\delta^2+2\delta+\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3}-1=0$$

解为

$$0<\delta(\alpha=0)=-1+\sqrt{2-\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3}}=0.145<\sqrt{2}-1 \qquad ㉗$$

已去掉 $\delta<0$ 的解。

[

若取 $\alpha=\alpha_0=\pi$，由⑳㉑式有

$$\left(\frac{2\pi n_A-\theta_0}{2\pi n_c}\right)^{2/3}=\frac{1-\delta(2-\delta)}{1-\delta^2[4-4\delta+\delta^2]}=\frac{1}{1+\delta(2-\delta)} \qquad ㉖$$

或

$$\delta^2-2\delta+\left(\frac{2\pi n_c}{2\pi n_A-\theta_0}\right)^{2/3}-1=0$$

它有解的条件是判别式

$$\Delta=(-2)^2-4\left[\left(\frac{2\pi n_c}{2\pi n_A-\theta_0}\right)^{2/3}-1\right]\geq 0$$

当 $\theta_0=\frac{\pi}{2}, n_A=2, n_c=1$（易验证满足 $\Delta\geq 0$），上式成为

$$\delta^2-2\delta+\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3}-1=0$$

解为

$$0<\delta(\alpha=\pi)=1+\sqrt{2-\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3}}=2.145<\sqrt{2}+1 \qquad ㉗$$

已去掉 $\delta<0$ 的解。

]

三、宇宙中可能有四分之一的物质是以暗物质的形式存在的。暗物质可能是由一种新的基本粒子构成的。人们一直在寻找暗物质粒子和已知的粒子之间的相互作用，其中一类重要的实验是寻找暗物质粒子和原子核之间的相互作用。这类实验一般是以某种材料作为靶物质，当暗物质粒子飞入探测器时会和靶物质的原子核发生碰撞。在这个过程中原本几乎静止的原子核会从暗物质粒子得到一部分动能，从而在靶物质中运动，产生光信号和电信号。暗物质探测器可以探测到这些信号从而对暗物质进行观测。

（1）选取靶物质为氙同位素原子核 $^{132}\mathrm{Xe}$，假设暗物质粒子 X 和 $^{132}\mathrm{Xe}$ 核的质量都是质子质量 m_{p} 的132 倍；在粒子 X 和 $^{132}\mathrm{Xe}$ 核的质心系中，散射是各向同性的（出射粒子在各个方向上出现的概率相等）。设有一个暗物质粒子 X 以大小为 200 km/s 的速度沿 z 方向进入探测器，与静止的靶核 $^{132}\mathrm{Xe}$ 碰撞。试推导实验室系（碰撞前相对于靶核 $^{132}\mathrm{Xe}$ 静止的参考系）中碰撞后，

（i） $^{132}\mathrm{Xe}$ 核的动量与其出射角的关系；

（ii）$^{132}\mathrm{Xe}$ 核的角分布（按其出射角的概率分布）；

（iii）$^{132}\mathrm{Xe}$ 核动能的分布。

（2）人们常常用散射截面来表示两个粒子之间相互作用的大小，散射截面类似于某种横截面积，而横截面积可理解为两个粒子之间发生碰撞时的有效面积。例如，两个半径分别为 r_1 和 r_2 的刚性小球之间碰撞的横截面积为 $\pi(r_1+r_2)^2$，这就是两小球碰撞的散射截面。现在探测器中有1.0 t 氙原子，暗物质粒子X和 $^{132}\mathrm{Xe}$ 核之间碰撞的散射截面为 $1.0\times10^{-38}\ \mathrm{cm}^2$；假设所有的暗物质粒子X的速度大小都是 200 km/s，假设在地球附近的暗物质的密度为 $0.40m_{\mathrm{p}}/\mathrm{cm}^3$。试求这个探测器里每年能发生多少次暗物质粒子X和 $^{132}\mathrm{Xe}$ 核之间的碰撞？阿佛加德罗常数 $N_{\mathrm{A}}=6.023\times10^{23}$。为简化起见，假设质子静质量为1.0 g/mol。

（3）探测器探测到的信号是由 $^{132}\mathrm{Xe}$ 核在碰撞过程中所得到的动能产生的。然而，只有当该动能超出探测器的阈值时这个信号才能被记录下来。假设这个阈值为10 keV，试估算这个探测器每年可以探测到多少个暗物质粒子X与 $^{132}\mathrm{Xe}$ 核发生了碰撞？质子的静质量为 $0.94\ \mathrm{GeV}/c^2$，c 是真空中的光速。

（4）银河系中的暗物质粒子的速率服从一定的分布 $f(v)$，暗物质粒子的速率有一个上限，$v_{\max}$，即当 $v>v_{\max}$ 时，$f(v)=0$。请回答这个上限是由什么造成的？

（5）对于地球上的实验室参考系，暗物质粒子速度分布的上限是真空中光速的 0.002 倍。另外，我们实际上也不知道暗物质粒子的质量是多少。请问当暗物质粒子的质量小于多少时，上面的探测器将不可能探测到暗物质的信号？

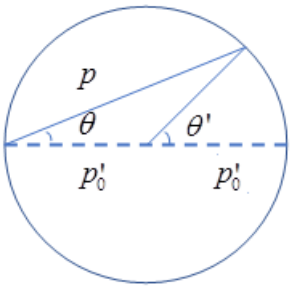
参考解答

（1）（i）

（解法一）

注意到暗物质粒子和原子核的质量是相等的，那么在暗物质粒子和原子核在质心系中的动量都是 $p_0'=Mv_0'$。

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{X}}'=-\boldsymbol{p}_{\mathrm{Xe}}' \qquad \left|\boldsymbol{p}_{\mathrm{X}}'\right|=p_0' \qquad ①$$



解题图 3a

粒子动量从质心系（其中的量加撇）到实验室系（其中的量不加撇）有

$$p_x=p_x',\ p_y=p_y',\ p_z=p_z'+p_0=p_z'+Mv_0' \qquad ②$$

质心系到实验室系的动量关系如解题图3a所示。从该图中容易看到，在质心系中的散射角为 θ'，在实验室系的散射角为 θ，则易知，在实验室系有

$$\theta=\frac{\theta'}{2}, \qquad ③$$

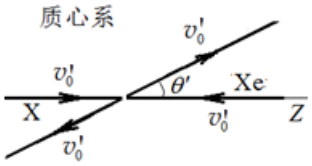
于是，^{132}Xe 核的动量与其出射角的关系为

$$p(\theta)=2p_0'\cos\theta=2Mv_0'\cos\theta=Mv_0\cos\theta,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ v_0=2v_0'; \qquad ④$$

$$p(\theta)=0, \qquad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi.$$

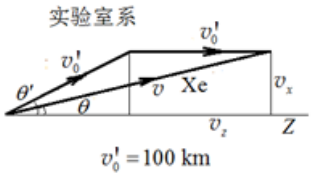
（解法二）

在质心系中，X与Xe以相同的速率 $v_0=100$ km/s 迎头相撞，再以同样的速率彼此分开，如解题图3b所示。



解题图 3b

记Xe粒子反冲速度的方向与X粒子入射方向（设为Z轴）之间的夹角是 θ'（质心系中的量带撇，实验室系中的量不带撇）。换到实验室系，设碰撞后Xe粒子速度的大小是 v，方向与Z轴间夹角 θ，如解题图 3c所示。那么



解题图 3c

$$\begin{aligned} v&=\sqrt{v_z^2+v_x^2}\\ &=v_0'\sqrt{(1+\cos\theta')^2+\sin^2\theta'}\\ &=2v_0'\sqrt{\cos^4\frac{\theta'}{2}+\sin^2\frac{\theta'}{2}\cos^2\frac{\theta'}{2}} \qquad ①\\ &=2v_0'\cos\frac{\theta'}{2}, \end{aligned}$$

因而，

$$\cos\theta=\frac{v_z}{v}=\frac{1+\cos\theta'}{2\cos\frac{\theta'}{2}}=\cos\frac{\theta'}{2}, \qquad ②$$

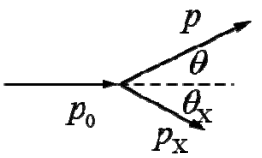
由此得，

$$\theta=\frac{\theta'}{2}, \qquad ③$$

于是，^{132}Xe 核的动量与其出射角的关系为

$$p(\theta)=2Mv_0'\cos\theta=Mv_0\cos\theta,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ v_0=2v_0';\qquad ④$$

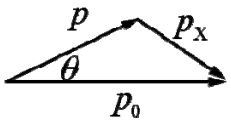
$$p(\theta)=0,\qquad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi.$$



解题图 3d

（解法三）

依题意，在实验室参考系中，入射暗物质粒子 X 的初速度 $v_0=200$ km/s，动量大小为 $p_0=Mv_0$，M 是暗物质粒子X的质量；设碰撞后 ^{132}Xe 核的动量大小为 p，与初速度 v_0 的夹角为 θ，如解题图3d所示。暗物质粒子 X 的动量大小为 p_{X}，与初速度 v_0 的夹角为 θ_{X}。



解题图 3e

由动量守恒得

$$p_0=p\cos\theta+p_{\mathrm{X}}\cos\theta_{\mathrm{X}}\qquad ①$$

$$p\sin\theta=p_{\mathrm{X}}\sin\theta_{\mathrm{X}}\qquad ②$$

由①②式（或直接根据矢量三角形，见解题图3e）得

$$p_{\mathrm{X}}^2=p^2+p_0^2-2pp_0\cos\theta$$

由能量守恒得

$$\frac{p_0^2}{2M}=\frac{p^2}{2M}+\frac{p_{\mathrm{X}}^2}{2M}\qquad ③$$

将前一式等号两边同除以 $2M$，并利用 ③式得，^{132}Xe 核的动量与其出射角 θ 的关系为

$$p(\theta)=p_0\cos\theta=Mv_0\cos\theta,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2};\qquad ④$$

$$p(\theta)=0,\qquad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi.$$

这里，已将 p 在 θ 的值记为 $p(\theta)$ 。

（ii）

（解法一）

在质心系中散射是各向同性的，即每一个方向的散射概率相等。从解题图3a可看出，在质心系中散射角为 θ' 的位置，绕 z 轴（如解题图3a中虚线所示）一圈的周长是

$$2\pi p_0'\sin\theta',\qquad ⑤$$

因此在单位 θ' 角上的散射概率一定是正比于 $\sin\theta'$ 的。因此，在质心系中，散射概率 P 的角度分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta'}=a\sin\theta'\qquad ⑥$$

比例常数 a 由概率的归一化条件

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta'}\mathrm{d}\theta'=1\qquad ⑦$$

得到，即

$$a=\frac{1}{2}\qquad ⑧$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\cos\theta'}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta'}\left|\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\cos\theta'}\right|=a\sin\theta'\frac{1}{\sin\theta'}=\frac{1}{2}\qquad ⑨$$

其中，$\left|\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\cos\theta'}\right|$是概率积分测度变化因子。

换到实验室系有

$$\mathrm{d}\cos\theta' = \mathrm{d}\cos 2\theta = \mathrm{d}(2\cos^2\theta - 1) = 4\cos\theta \mathrm{d}\cos\theta$$

可得，

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\cos\theta} = 2\cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad ⑩$$

（注: 角分布⑩式可以有如下等价写法, 即写成

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} = \sin(2\theta),\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad ⑩$$

或

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi} = \frac{1}{\pi}\cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad ⑩$$

均可, 其中 Ω 为立体角。）

（解法二）

在质心系中，Xe粒子在碰撞后是完全各向同性地射出的，也就是说它的角分布函数是常数 C

$$\rho'(\theta', \phi') = C \qquad ⑤$$

由归一化条件

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \rho'(\theta', \phi')\mathrm{d}\cos\theta' \mathrm{d}\phi' = 1$$

有

$$C\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta' \mathrm{d}\phi' = 4\pi C = 1$$

故

$$\rho'(\theta', \phi') = C = \frac{1}{4\pi} \qquad ⑥$$

一个特定事件发生的概率与参考系无关，所以，在球坐标系中有

$$\rho'(\theta', \phi')\mathrm{d}\cos\theta' \mathrm{d}\phi' = \rho(\theta, \phi)\mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi \qquad ⑦$$

又由于体系相对于 z 轴的轴对称性， $\rho(\theta, \phi)$ 与 ϕ 无关，因而

$$\rho(\theta, \phi) = \rho(\theta) \qquad ⑧$$

从质心系到实验室系（沿 z 轴）的变换中，方位角保持不变

$$\phi' = \phi$$

由⑦⑧式和上式可知

$$\rho(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\cos\theta' \mathrm{d}\phi'}{\mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\cos\theta'}{\mathrm{d}\cos\theta} \qquad ⑨$$

由 $\theta = \frac{\theta'}{2}$ 和上式得

$$\rho(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\cos(2\theta)/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\cos\theta/\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{4\pi}\frac{2\sin(2\theta)}{\sin\theta} = \frac{1}{\pi}\cos\theta,\ \ (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}) \qquad ⑩$$

$$\rho(\theta) = 0,\ \ (\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi)$$

（解法三）

出射粒子的动量分布函数可写为$\rho'(p'_x,p'_y,p'_z)$，它满足归一化条件

$$\int \mathrm{d}p'_x\mathrm{d}p'_y\mathrm{d}p'_z\rho'(p'_x,p'_y,p'_z)=1$$

由于散射是各向同性的，这里概率密度ρ只是动量的大小p'的函数。因此有

$$\rho'(p'_x,p'_y,p'_z)=\rho'(p')$$

对于二体弹性碰撞，出射的粒子的动量大小在质心系中是确定的，设为p_0。在球坐标系中，对于立体角的积分可立即积出，有

$$\int p'^2\mathrm{d}p'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}\cos\theta'\rho'(p')=4\pi\int\rho'(p')p'^2\mathrm{d}p'=1$$

于是，在质心系中

$$\rho'(p')=\frac{1}{4\pi p_0^2}\delta(p'-p_0) \qquad ⑤$$

或

$$\rho'(p')=\frac{1}{4\pi p'^2}\delta(p'-p_0)$$

（由于δ-函数是在积分中定义的，上述两种形式实际上是等效的。）从质心系（其中的量不加撇）到实验室系（其中的量加撇），我们有

$$p_x=p'_x,\ p_y=p'_y,\ p_z=p'_z+p_0$$

换成实验室球坐标系，有

$$\phi=\phi',\ p\sin\theta=p'\sin\theta',\ p\cos\theta=p'\cos\theta'+p_0$$

由上式得

$$p'=(p^2-2pp_0\cos\theta+p_0^2)^{1/2} \qquad ⑥$$

或

$$\cos\theta'=\frac{p\cos\theta-p_0}{(p^2-2pp_0\cos\theta+p_0^2)^{1/2}}$$

一个特定事件发生的概率与参考系无关，所以

$$\rho'(p'_x,p'_y,p'_z)\mathrm{d}p'_x\mathrm{d}p'_y\mathrm{d}p'_z=\rho(p_x,p_y,p_z)\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z$$

在球坐标系中可化为

$$\rho'(p')p'^2\mathrm{d}p'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}\cos\theta'=\rho(p)p^2\mathrm{d}p\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\cos\theta \qquad ⑦$$

积分测度$\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z$是伽利略变换不变的，即

$$\mathrm{d}p'_x\mathrm{d}p'_y\mathrm{d}p'_z=\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z$$

它可在球坐标系中表出

$$p'^2\mathrm{d}p'\mathrm{d}\cos\theta'\mathrm{d}\phi'=p^2\mathrm{d}p\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\phi \qquad ⑧$$

利用⑤⑥⑦⑧式可得，在实验室系中

$$\rho(p,\cos\theta)=\frac{1}{4\pi p_0^2}\delta[(p^2-2p_0p\cos\theta'+p_0^2)^{1/2}-p_0] \qquad ⑨$$

因此，在实验室系中，原子核被撞概率 P 的角分布为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\cos\theta}&=\int p^2\mathrm{d}p\mathrm{d}\phi\rho(p,p\cos\theta)\\&=\int p^2\mathrm{d}p\mathrm{d}\phi\frac{1}{4\pi p_0^2}\delta[(p^2-2p_0p\cos\theta+p_0^2)^{1/2}-p_0]\\&=\int p^2\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p'}\right|\mathrm{d}p'\frac{1}{2p_0^2}\delta(p'-p_0)\\&=\int p^2\left|\frac{p'}{p-p_0\cos\theta}\right|\mathrm{d}p'\frac{1}{2p_0^2}\delta(p'-p_0)\\&=(2p_0\cos\theta)^2\left|\frac{p_0}{2p_0\cos\theta-p_0\cos\theta}\right|\frac{1}{2p_0^2}\\&=2|\cos\theta|\end{aligned} \qquad ，\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \qquad ⑩$$

这里应用了⑥式与

$$\frac{\partial p}{\partial p'}=\frac{p'}{p-p_0\cos\theta}$$

以及当 $p'=p_0$ 时，

$$p=0,\ 2p_0\cos\theta$$

但前者没有贡献。注意，在实验室系中，原子核的出射 θ' 的取值范围是[0, π/2]，而不是[0, π]，见图1所标明的运动学限制条件 $\theta'=\theta/2$ 。

（iii）

（解法一）考虑出射粒子的动能分布。由 $p=2p_0'\cos\theta=p_0\cos\theta$ 可以得到

$$\cos\theta=\frac{p}{p_0}$$

于是

$$\mathrm{d}\cos\theta=\frac{\mathrm{d}p}{p_0} \qquad ⑪$$

代入⑩式可得，被撞原子核的动量分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}p}=\frac{2p}{p_0^2} \qquad ⑫$$

实验室系中出射 Xe 核的动能为

$$E_\mathrm{k}=\frac{p^2}{2m_\mathrm{Xe}},$$

其中 m_Xe 是 Xe 核的质量。由上式有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}=\frac{2m_\mathrm{Xe}}{p_0^2}=\frac{2M}{p_0^2}=\frac{1}{E_\mathrm{k}^\mathrm{in}}=\frac{2M}{p_0^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}Mv_0^2} \qquad ⑬$$

这里利用了

$$m_\mathrm{Xe}=M$$

而

$$E_\mathrm{k}^\mathrm{in}=\frac{p_0^2}{2m_\mathrm{X}}=\frac{p_0^2}{2M} \qquad ⑭$$

是在实验室系中入射的暗物质粒子的动能。可见，根据题设的暗物质模型，在实验室系中，出射的原子核的动能是从0到 $E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{in}}$ 之间的均匀分布。

（解法二）

Xe粒子的动能分布函数满足

$$\rho(\theta)2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=\rho(E_{\mathrm{k}})\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} \tag{11}$$

Xe粒子的动能 E_{k} 与其出射角 θ 的关系是

$$\begin{aligned} &E_{\mathrm{k}}(\theta)=\frac{1}{2}Mv_0^2\cos^2\theta,\quad (0\le\theta\le\frac{\pi}{2}) \\ &E_{\mathrm{k}}(\theta)=0,\qquad\qquad (\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi) \end{aligned} \tag{12}$$

由⑪⑫式得

$$\rho(E_{\mathrm{k}})=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{Mv_0^2\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}Mv_0^2},\qquad (0\le E_{\mathrm{k}}\le\frac{1}{2}Mv_0^2) \tag{13}$$

因此，Xe粒子的动能在 $0\le E_{\mathrm{k}}\le\frac{1}{2}Mv_0^2$ 的范围内（对应于 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$）的分布是均匀的。

（2）总的原子核的个数为

$$N_{\mathrm{Xe}}=\frac{M_{\mathrm{total}}}{m_{\mathrm{Xe}}}=\frac{1.0\ \mathrm{t}}{132\ \mathrm{g/mol}}\times N_{\mathrm{A}}\approx 4.6\times10^{27} \tag{15}$$

这里 N_{A} 是阿佛加德罗常数。在一年中一个原子核被暗物质粒子碰撞的概率为

$$P_1=\sigma vt\frac{\rho_{\mathrm{X}}}{m_{\mathrm{X}}} \tag{16}$$

其中 σ 为碰撞的截面，v 为暗物质的速度，t 为总的时间，ρ_{X} 和 m_{X} 分别为暗物质的密度和暗物质粒子 X 的质量。代入具体数据得，

$$P_1\approx1.9\times10^{-26} \tag{17}$$

这个概率远远小于1，因此我们可以忽略一个原子核被两个暗物质粒子碰撞的情况。所以一年里，这个探测器发生的总的碰撞次数可以估计为

$$N_{\mathrm{C}}=P_1N_{\mathrm{Xe}}\approx87 \tag{18}$$

所以，大概会发生 87 次碰撞。

（3）由于碰撞产生的出射的原子核的动能分布为从0到 $E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{in}}$ 之间的均匀分布，出射动能大于某一阈值 $E_{阈}$ 的数目为

$$N_{\mathrm{S}}=N_{\mathrm{C}}\frac{E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{in}}-E_{阈}}{E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{in}}} \tag{19}$$

将题给数据代入⑭式得

$$E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{in}}\approx28\ \mathrm{keV} \tag{20}$$

由题设

$$E_{阈}=10\ \mathrm{keV}$$

由⑰⑱⑲式得，

$$N_{\mathrm{S}}=56 \tag{21}$$

这个探测器中每年产生的暗物质的信号的数目为56个。

（4）这个截断是由逃逸速率造成的，速度大小超过逃逸速率的暗物质粒子可能逃逸出银河系引力的束缚。

（5）设暗物质粒子的质量是 m_{X}，它在实验室系中速度大小为 v_{X}，则暗物质粒子和静止的氙原子核的质心 c 相对于实验室系的速度为

$$v_{\mathrm{c}}=v_{\mathrm{X}}\frac{m_{\mathrm{X}}}{m_{\mathrm{X}}+m_{\mathrm{Xe}}}. \qquad ㉒$$

在实验室系中，氙原子核可以从与暗物质粒子碰撞中获得的最大的反冲速度为

$$v_{\mathrm{r\,max}}=2v_{\mathrm{c}}=2v_{\mathrm{X}}\frac{m_{\mathrm{X}}}{m_{\mathrm{X}}+m_{\mathrm{Xe}}}. \qquad ㉓$$

氙原子核能获得的最大的反冲动能为

$$E_{\mathrm{r\,max}}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{Xe}}v_{\mathrm{r\,max}}^2=\frac{1}{2}m_{\mathrm{X}}v_{\mathrm{X}}^2\frac{4m_{\mathrm{X}}m_{\mathrm{Xe}}}{(m_{\mathrm{X}}+m_{\mathrm{Xe}})^2} \qquad ㉔$$

实验室中不可能探测到暗物质信号的条件是

$$E_{\mathrm{r\,max}}<E_{\text{阈}}，\text{当}\ v_{\mathrm{X}}=v_{\max}， \qquad ㉕$$

由㉓㉔㉕式得，当

$$m_{\mathrm{X}}<\frac{m_{\mathrm{Xe}}}{v_{\max}\sqrt{\dfrac{2m_{\mathrm{Xe}}}{E_{\text{阈}}}-1}}=\frac{m_{\mathrm{Xe}}}{\dfrac{v_{\max}}{c}\sqrt{\dfrac{2m_{\mathrm{Xe}}c^2}{E_{\text{阈}}}-1}}=14\ \mathrm{GeV}/c^2 \qquad ㉖$$

时，探测器不可能探测到暗物质的信号。

四、在生物体中电相互作用起着很重要的作用。将一个类 DNA 的酸性分子放入水中，分子上一些松散附着的原子可能解离，正离子漂走，留下一些电子，使这个大分子带负电。类似地，水中的细胞膜也会因此而带上负电，它们之间的静电排斥作用可使这些大分子或细胞避免“结块”。由于物质本身是电中性的，溶液中漂浮着的大量正离子，会使这些大分子之间的静电力随距离衰减。在常温 T 下考察以下问题：

（1）（i）考虑带负电的细胞膜外侧（朝向正离子漂浮的区域）附近靠近其表面的区域。此时细胞膜可视为无限大平面。取 x 轴垂直于细胞膜外表面，方向指向膜外侧，原点在膜外表面上。膜周围溶液的介电常量为 ε，膜外表面上均匀分布的面电荷密度为 $-\sigma$（$\sigma>0$）。系统与环境保持热平衡。由于静电作用，溶液中各处正离子的密度并不均匀，但可认为各局域部分都是平衡态。此时正离子的行为与地面上大气分子的行为类似，只是这里正离子受到静电场作用，而大气分子受到重力场作用。取紧靠膜外表面处正离子数密度 n_0 为待定常量。试写出膜外表面附近电势 φ 满足的微分方程。已知电子电量为 $-e$，正离子电量为 $+e$，玻尔兹曼常量为 k；忽略重力和水的浮力。提示：玻尔兹曼统计认为，粒子处于能量为 E 的状态的几率正比于 $\exp(-\dfrac{E}{kT})$，T 为粒子所处平衡态的绝对温度。

（ii）细胞膜表面内的液状组织可认为是导电的；选取膜表面上的电势为零。试写出在膜外表面上电势 φ 满足的边界条件。

（iii）在给定的边界条件下，取对数函数 $\varphi(x)=A\ln(1+Bx)$ 作为第（1）（i）问中得到的微分方程的试探解。试定出常量 n_0、A、B 的值，并将 $\varphi(x)$ 和 $n(x)$（在 x 处的正离子数密度）用 σ、ε、T、e、k 表出；

（iv）试验证，所求得的 $n(x)$ 保证了整个系统是电中性的。

（v）求以带电的膜外表面单位面积为底的足够高的柱形体积内的静电场能 U_{f}，以及同一体积中的所有正离子在静电场中的总电势能 U_{e}。

（2）考虑两个细胞彼此靠近的情形。两个细胞膜外侧及它们之间的这个系统，可用这样的简化模型研究：已知两个均匀带负电的无限大平行平板各带面电荷密度 $-\sigma$，相互之间距离为 $2D$。两板正中间处选为坐标原点，x 轴垂直于平板，原点电势选为零，原点处的正离子数密度 n_0 作为待定参量。取函数 $\varphi(x)=A\ln[\cos(Bx)]$ 作为微分方程的试探解。

（i）由 $\varphi(x)$ 满足的微分方程定出常量 A、B，用 T、ε、e、k、n_0 表出。

（ii）求 n_0，用 D、σ、ε、T、e、k、θ（若遇到超越方程，不必求解，该方程在物理区域的解记为 θ）表出。

（iii）给出正离子在细胞外表面处与两膜中心处的粒子数密度之差 $\Delta n\equiv n(\pm D)-n_0$，用 σ、ε、T、k 表出。

（iv）试验证，所求得的 $n(x)$ 保证了整个系统是电中性的。

（v）试给出带电平面（细胞膜）单位面积上所受的作用力的合力。已知细胞膜内外都充满了密度相同的水。提示：正离子在水中的行为与理想气体类似，且局域地处于热平衡。

（vi）如果其它条件不变，在两平板仍可视为无限大的前提下，试讨论在近距离和远距离两种不同的极限情形下，带电平面单位面积上所受的作用力的合力大小如何随距离 D 而改变？

参考解答：

（1）

（i）在生物膜表面外 x 点附近取一个单位面积为底、厚度为 $x+\mathrm{d}x$ 的小体积（上、下底均与膜表面平行）。由对称性，生物膜表面外电场强度只与 x 有关，因而小体积上、下底处的电场强度可分别记为 $E(x+\mathrm{d}x)$、$E(x)$，以 x 轴正向为正方向。由高斯定理有

$$E(x+\mathrm{d}x)-E(x)=\frac{1}{\varepsilon}en(x)\mathrm{d}x,$$

而

$$E(x)=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x},$$

由以上两式得

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{e}{\varepsilon}n(x). \qquad ①$$

电荷 $+e$ 的正离子在上述静电场中的电势能是 $e\varphi$。根据玻尔兹曼统计有

$$n(x)=n_0\mathrm{e}^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}}, \qquad ②$$

其中 n_0 是 $\varphi=0$ 处的正离子的数密度，所以 $\varphi(x)$ 满足的方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{en_0}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{e\varphi}{kT}}. \qquad ③$$

（ii）$\varphi(x)$ 的边界条件是

$$\varphi|_{x=0}=0, \qquad ④$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-E|_{x=0}=-\frac{(-\sigma)}{\varepsilon},\ (\sigma>0) \qquad ⑤$$

这里，已注意到膜外表面的面电荷密度为 $-\sigma$，膜内部可认为是导体。

（iii）将试探解 $\varphi(x)=A\ln(1+Bx)$（已满足④式）代入③式得

$$-\frac{AB^2}{(1+Bx)^2}=-\frac{en_0}{\varepsilon}(1+Bx)^{-\frac{eA}{kT}},$$

比较上式两边 $(1+Bx)$ 的幂和系数得

$$A=\frac{2kT}{e}, \qquad ⑥$$

$$B=\sqrt{\frac{n_0e^2}{2\varepsilon kT}}, \qquad ⑦$$

再将试探解 $\varphi(x)=A\ln(1+Bx)$ 代入⑤式得

$$AB=\frac{\sigma}{\varepsilon},$$

所以

$$B=\frac{\sigma e}{2\varepsilon kT}, \qquad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$n_0=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}. \qquad ⑨$$

由试探解 $\varphi(x)=A\ln(1+Bx)$ 和⑥⑧式得

$$\varphi(x)=\frac{2kT}{e}\ln(1+\frac{\sigma e}{2\varepsilon kT}x), \qquad ⑩$$

由②⑨式得

$$n(x)=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}\frac{1}{(1+\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}x)^2}. \qquad ⑪$$

（iv）以膜外表面单位面积为底的无限高柱形体积内的总电荷是

$$Q=e\int_0^\infty n(x)\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2 e}{2\varepsilon kT}\int_0^\infty\frac{1}{(1+\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}x)^2}\mathrm{d}x=\sigma\int_0^\infty\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=\sigma. \qquad ⑫$$

所以，整个系统（包括膜外表面）是电中性的。

（v）静电场能密度满足

$$u_{\mathrm{f}}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\varepsilon(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x})^2, \qquad ⑬$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{2kT}{e}\frac{\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}}{1+\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}x}, \qquad ⑭$$

以带电的膜外表面单位面积为底的足够高的柱形体积内的总静电场能是

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{f}}&=\frac{1}{2}\varepsilon\int_0^\infty(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x})^2\mathrm{d}x=\frac{\sigma kT}{e}\int_0^\infty\frac{\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}}{(1+\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}x)^2}\mathrm{d}x \qquad ⑮\\&=\frac{\sigma kT}{e}\int_0^\infty\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=\frac{\sigma kT}{e}.\end{aligned}$$

另一方面，同一体积中的所有正离子在静电场中的总电势能是

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{e}}&=\int_0^\infty en(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}2kT\int_0^\infty\frac{\ln(1+\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}x)}{(1+\dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}x)^2}\mathrm{d}x=\frac{2\sigma kT}{e}\int_0^\infty\frac{\ln(1+y)}{(1+y)^2}\mathrm{d}y \qquad ⑯\\&=-\frac{2\sigma kT}{e}\int_0^\infty\ln(1+y)\mathrm{d}\frac{1}{1+y}=\frac{2\sigma kT}{e}\int_0^\infty\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=\frac{2\sigma kT}{e}.\end{aligned}$$

这里，已注意到所考虑的正离子只是全部正离子的极小的一部分，因而所考虑的正离子电荷可视为全部电荷（包括全部正离子电荷和膜外表面的面电荷）所产生的电场的检验电荷。

（2）

（i）类比③式，φ 满足的微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{en_0}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{e\varphi}{kT}},\ (-D<x<+D,\varphi|_{x=0}=0) \qquad ⑰$$

以试探函数 $\varphi(x)=A\ln[\cos(Bx)]$（满足边界 $\varphi|_{x=0}=0$）代入，得

$$AB^2\frac{1}{\cos^2 Bx}=\frac{en_0}{\varepsilon}(\cos Bx)^{-\frac{eA}{kT}},$$

因而

$$A=\frac{2kT}{e}, \qquad ⑱$$

$$B=\sqrt{\frac{n_0e^2}{2\varepsilon kT}}. \qquad ⑲$$

（ii）类比⑤式，另一边界条件是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-D}=-\frac{(-\sigma)}{\varepsilon},\ (\sigma>0)$$

以试探解 $\varphi(x)=A\ln[\cos(Bx)]$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=-AB\tan Bx, \qquad ⑳$$

所以得

$$AB\tan BD=\frac{\sigma}{\varepsilon},$$

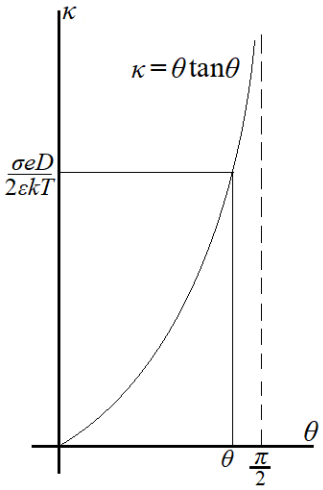
代入 A 的表达式⑱，得

$$BD\tan BD=\frac{\sigma eD}{2\varepsilon kT}. \qquad ㉑$$

记 $\theta\equiv BD$，则它满足超越方程

$$\theta\tan\theta=\frac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}\equiv\kappa,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

在 D、σ、ε、T 给定后，$\kappa\equiv\dfrac{\sigma eD}{2\varepsilon kT}$ 是一个确定的常量。在本题所考虑的情形下，σ 很小，甚至等于 0；而当 $\sigma=0$ 时，上述超越方程显然有解 $\theta=0$。物理的解应是连续的，不能跨越奇点。因此，所考虑的超越方程的物理区域是 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$。由解题图 4a 可知，在所考虑的超越方程在物理区域 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 中有且只有一个根 θ（事实上，由于 θ 和 $\tan\theta$ 在区域 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 中都是 θ 的单调函数，两者的乘积 $\kappa(\theta)$ 也是 θ 的单调函数），这正好符合静电唯一性定理。确定 θ 后，有



解题图 4a

$$B=\frac{\theta}{D},$$

因此

$$n_0=\frac{2\varepsilon kT}{e^2}B^2=\frac{2\varepsilon kT\theta^2}{e^2D^2}. \qquad ㉒$$

可见给定了 D、σ、ε、T 就决定了 θ，也就完全决定了 n_0。

（iii）类比②式并利用试探解形式 $\varphi(x)=A\ln[\cos(Bx)]$ 以及⑱式有

$$n(x)=n_0\mathrm{e}^{-\frac{e\varphi(x)}{kT}}=n_0[\cos(Bx)]^{-\frac{eA}{kT}}=n_0\frac{1}{\cos^2 Bx}, \qquad ㉓$$

其中 n_0 和 B 如前所示，所以

$$n(\pm D)=n_0\frac{1}{\cos^2 BD}=n_0(1+\tan^2 BD)=n_0+n_0\tan^2\theta,$$

而

$$n_0\tan^2\theta=\frac{2\varepsilon kT}{D^2e^2}(\theta\tan\theta)^2=\frac{2\varepsilon kT}{D^2e^2}(\frac{\sigma eD}{2\varepsilon kT})^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT},$$

所以

$$n(\pm D)-n_0=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}. \qquad ㉔$$

（iv）根据前面 $n(x)$ 的表达式㉓，有

$$\int_{-D}^{D}en(x)\mathrm{d}x=en_0\int_{-D}^{D}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 Bx}=\frac{2e}{B}\frac{2\varepsilon kT\theta^2}{e^2D^2}\tan\theta=\frac{2e}{B}\frac{2\varepsilon kT\theta}{e^2D^2}\frac{\sigma eD}{2\varepsilon kT}=2\sigma, \qquad ㉕$$

其中 $\theta\tan\theta=\dfrac{\sigma eD}{2\varepsilon kT}$ 和 $\theta=BD$ 。由于两个均匀带负电无限大平行平面各带面电荷密度 $-\sigma$，所以整个系统是电中性的。

（v）对于两个带电平面中的一个平面，系统里的其它电荷包括另一个平面上的负电荷和正离子云的正电荷，而它们的总电荷量恰好与这个平面的总电量大小相等、符号相反，等价于平行板电容器的另一个极板，所以这个平面上单位面积受到的它们所施加的静电力是

$$f_{\mathrm{e}}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon},$$

方向指向生物膜外，即指向另一个平面。至于正离子碰撞形成的压强，根据题目的提示，完全类似于理想气体（或称为正离子气）的压强，因此

$$f_{\mathrm{h}}=n(\pm D)kT=(n_0+\frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT})kT=\frac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}+\frac{\sigma^2}{2\varepsilon},\qquad ㉖$$

方向指向生物膜内。合力是

$$f=f_{\mathrm{h}}-f_{\mathrm{e}}=n_0kT=\frac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2},\qquad ㉗$$

方向指向生物膜内。这就是说，静电力与正离子气压力的合力是在两个带电平面之间产生斥力。值得指出的是，膜内外充满了水，膜内外所受到的水的压强相互抵消，不予考虑。

（解法二）

平面 $x=0$ 将两带电平面之间的正离子（包括相应的液体）体系分成体系 I 和 II。对于平面 $x=0$ 和两个带电平面之一的平面之间的正离子（包括相应的液体）体系 I，体系 II 相当于面电荷密度为 $+\sigma$ 的平板，它对于 I 的作用正好被其邻接的电荷密度为 $-\sigma$ 的带电平板对于 I 的作用抵消，可以不予考虑。因此，I 除了受到带电平面对它的指向 I 内的作用力（其在单位面积上的大小 f 等于带电平面所受到的静电力与正离子气压力的合力在单位面积上的大小）之外，还受到平面 $x=0$ 处的正离子气的压力（方向指向 I 内），其在单位面积上的大小为

$$f_{\mathrm{h}0}=n_0kT\qquad ㉖$$

由于体系 I 处于力平衡状态，故

$$f=f_{\mathrm{h}0}$$

于是

$$f=n_0kT=\frac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}\qquad ㉗$$

值得指出的是，膜内外充满了水，膜内外所受到的水的压强相互抵消，不予考虑。

（vi）由㉖式知

$$f\propto\left(\frac{\theta}{D}\right)^2,\qquad ㉘$$

注意到 θ 满足

$$\theta\tan\theta=\frac{\sigma eD}{2\varepsilon kT},$$

因而也与 D 有关。在近距离极限下

$$\frac{\sigma eD}{2\varepsilon kT}<<1,$$

因而可以认为 $\tan\theta\approx\theta$，于是

$$\theta\approx\sqrt{\frac{\sigma eD}{2\varepsilon kT}}\propto\sqrt{D},$$

所以

$$f\propto\left(\frac{\sqrt{D}}{D}\right)^2\propto\frac{1}{D}.\qquad ㉙$$

而在远距离极限下

$$\frac{\sigma eD}{2\varepsilon kT} >> 1,$$

因而可以认为

$$\theta \approx \frac{\pi}{2} = 常数,$$

于是

$$f \propto \frac{1}{D^2}, \qquad ㉚$$

㉙㉚式表明，f 是随距离的增加而衰减的。

五、（1）一个电子的自旋磁矩为

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{-e}{m}\boldsymbol{S}$$

式中 $-e$（$e>0$）是电子电荷，m 是电子质量，$\frac{-e}{m}$ 是电子的荷质比；$\boldsymbol{S}$ 是自旋角动量，其 z 分量 S_z 只能取两个值，自旋向上时 $S_z=\frac{1}{2}\hbar$，向下时 $S_z=-\frac{1}{2}\hbar$，其中 $\hbar=\frac{h}{2\pi}$，h 是普朗克常量。假设一个分子或原子的磁矩等于一个电子的自旋磁矩。

（i）将顺磁体置于外磁场中，由于其分子的磁矩平行或反平行于磁场方向排列的几率发生变化而产生磁化；磁化程度用单位体积内的磁矩（磁化强度）$\boldsymbol{M}$ 描述，$\boldsymbol{M}=\chi\boldsymbol{H}$，其中 χ 为磁化率，$\boldsymbol{H}\equiv\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$ 为磁场强度，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度，μ_0 为真空磁导率。在通常温度 T（绝对温度）下，$\chi<<1$，$kT>>\frac{e\hbar}{2m}B$（k 为玻尔兹曼常量）；设磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是均匀的，顺磁体的分子数密度为 n，试利用玻尔兹曼统计导出顺磁体的磁化率满足 $\chi=\frac{C}{T}$，并给出 C 的表达式。已知：玻尔兹曼统计认为，粒子处在某个能量状态的几率正比于 $\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}$，其中 E 为该状态的能量，T 为粒子所处平衡态的绝对温度。

（ii）铁磁体不同于顺磁体：在居里温度以下，铁磁体可以在没有外磁场的环境中产生并保持比较强的磁性，此称为自发磁化；自发磁化产生“磁畴”，每个“磁畴”中分子磁矩均沿着同一方向排列（顺排），此时铁磁体处于铁磁相。磁矩发生顺排的原因是因为量子效应，也可以认为里面有很强的等效磁场，外斯称其为“分子场”。“分子场”比一个自旋磁矩在原子间距上产生的磁场大 3 个量级左右。在居里温度以上，铁磁体转变为顺磁体，它的磁化率遵从居里-外斯定律 $\chi=\frac{C}{T-\theta}$（其中 θ 为居里温度），与通常的顺磁体有差异，其差异来自于铁磁体内部的“分子场” H_m，H_m 可表示为 $H_m=\gamma M$。假设铁磁体的分子数密度亦为 n，试给出 γ 的表达式（居里温度 θ 可视为已知量）；并导出在所有磁矩都是顺排的情形下分子场 H_m 的表达式。

（2）在铁磁晶体中原子是在周期性的格点上排列的。每个原子所感受到的磁场可理解为其最近邻格点上的原子提供的“分子场”的平均值。

（i）考察如图 5a 所示的一维晶格自旋系统，所有格点上的磁矩都是顺排的。这个系统的居里温度为 θ。假设上一问中导出的 H_m 与 θ 之间的关系仍然成立，且此系统包含 N（$N>>1$）个格点，每个格点上有一个原子；当发生自发磁化后，原子的自旋平行排列，这样的排列会使系统能量最低。试给出此时一个自旋在其最近邻格点上产生的等效磁场、以及整个系统的磁能。

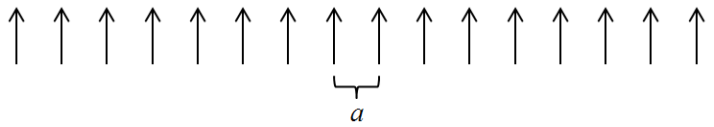


图 5a

（ii）假设这个一维晶格自旋系统中的某一个非端点晶格上的自旋发生翻转，变为反平行排列，如图 5b 所示。相比于图 5a 的情形，系统的能量增加了多少？

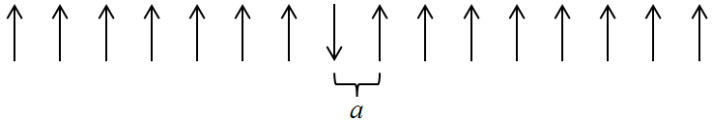


图 5b

（3）若原子自旋交替反向排列，则称为反铁磁体。反铁磁体具有特殊的晶格结构：该结构由 A 位晶格和 B 位晶格组成，如图 5c 所示。A 位的最近邻都是 B，次近邻才是 A；B 位类似。反铁磁体的最近邻“分子场”与铁磁体的方向相反，而且除了最近邻自旋之外，次近邻自旋对“分子场”也有贡献。此时，A、B 位的“分子场”可分别表示为

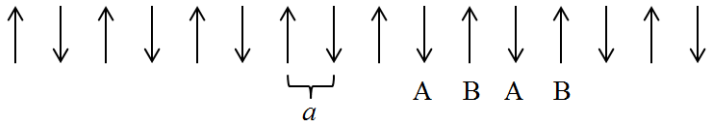


图 5c

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{mA}}=-\alpha_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}}-\alpha_{\mathrm{AA}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}}\,,\quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{mB}}=-\alpha_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}}-\alpha_{\mathrm{BB}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}}\,,$$

式中，$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}}$、$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}}$ 分别是 A、B 位上自旋磁矩。设所有 A 位原子都是相同的，所有 B 位原子也都是相同的，则 $\alpha_{\mathrm{AA}}=\alpha_{\mathrm{BB}}=\alpha$，$\alpha_{\mathrm{AB}}=\alpha_{\mathrm{BA}}=\beta$，$\beta>|\alpha|$。

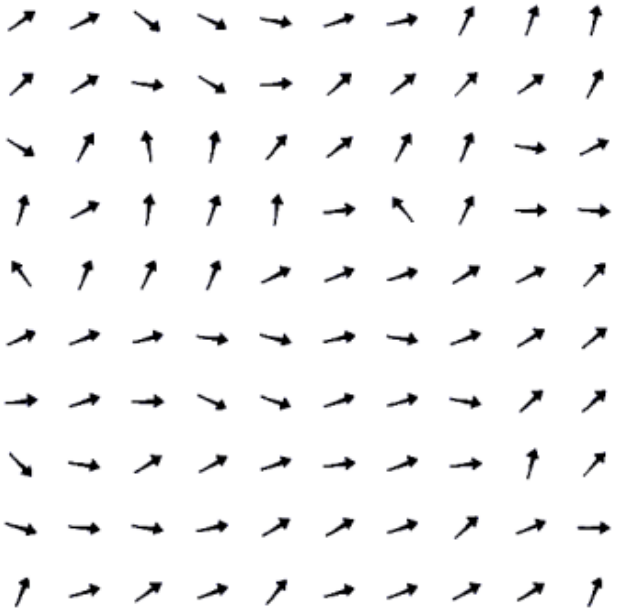
（i）试给出具有 N 个格点（A、B 各有 $N/2$ 个格点）的反铁磁体的磁能；

（ii）奈尔温度是指高出这个温度时，反铁磁相消失，反铁磁体呈顺磁性。这时，A 位晶格和 B 位晶格的磁化强度和磁场分别满足

$$M_{\mathrm{A}}=\frac{C}{2T}H_{\mathrm{A}}\,,\quad M_{\mathrm{B}}=\frac{C}{2T}H_{\mathrm{B}}\,,$$

这里系数 C 与第（1）（i）问中的类同。试给出一维反铁磁体的奈尔温度。

（4）下面考虑另一种情境：原子分布在晶格常数为 a 的二维 x-y 平面内的正方点阵上，原子的磁矩可在平面内转动。如图 5d，在尺寸为 L（$L>>a$）的平面区域内，磁矩分布由各点上的箭头所示。由于“分子场”效应，磁矩之间具有比较强的相互作用，这种作用只明显存在于最近邻分子之间。设此平面内第 i 个格点上的自旋角动量 $\boldsymbol{S}_i$ 与 x 轴的夹角为 $\theta_i\in[0,2\pi]$，系统磁能可表示为


图 5d

$$\begin{aligned}E(\{\theta_i\})&=-J'\sum_{\langle i,j\rangle}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j\\&=-J\sum_{\langle i,j\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j)\end{aligned}$$

其中 J'、J（J'、$J>0$）为常量，$\langle i,j\rangle$ 代表所有最近邻 (一个格点一般有四个最近邻的格点) 的格点 i 和 j，系统构型由 $\{\theta_i\}$ 给出。假设系统与环境达到热平衡，系统体积不变，此时亥姆赫兹自由能为 $F=E-TS$，其中 E 为系统内能，S 为系统熵。

（i）系统中可能存在的涡旋构型如图 5e 所示。沿着围绕涡旋中心的闭合回路走一圈，该闭合回路上最近邻格点$\langle i,j\rangle$的磁矩取向角之差的和为

$$\sum_{\langle i,j\rangle}(\theta_i-\theta_j)=2\pi l$$

这里，l 是与涡旋结构有关的一个正整数，$l=1$ 的情形如图 5e 所示。为方便起见，考虑以涡旋中心为圆心、较大半径为 r 的闭合回路（圆），试求圆上相邻格点取向角之差的平均值$\langle\theta_i-\theta_j\rangle$。

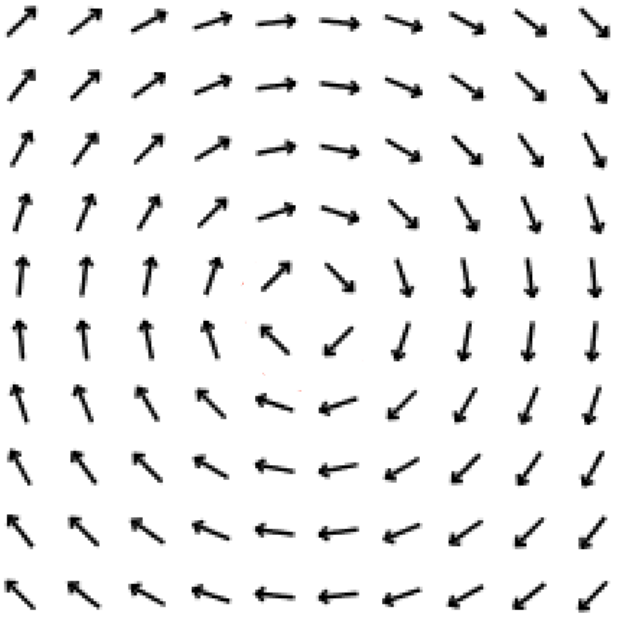


图 5e

（ii）当围绕涡旋中心的回路半径 r 比较大时，可近似认为磁矩依次排列成半径差为 a 的一系列同心圆，相邻同心圆上最近邻磁矩之间的夹角可认为是零。半径小的区域也作同样近似，对总能量影响不大。由此估算图 5e 所示的一个涡旋系统的能量。

（iii）如果涡旋的中心放在不同的位置，则可以认为系统处于不同的状态。假设在尺寸为 L、晶格常数为 a 的正方点阵上只有一个涡旋，试估算可能的状态数 Ω，进而计算系统的熵 $S\equiv k\ln\Omega$。

（iv）若系统存在某个温度，高于或低于此温度，系统性质有明显不同，则可能发生了相变。对于一个涡旋系统，找出可能的相变温度，并加以说明。

参考解答：

（1）

（i）按题设，一个分子的磁矩等于电子的自旋磁矩为

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{-e}{m}\boldsymbol{S}$$

它在外场 $\boldsymbol{B}$ 中的能量为

$$E=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{e}{m}S_z B=\pm\frac{e\hbar}{2m}B=\pm m_0 B$$

式中，$m_0=\dfrac{e\hbar}{2m}$，已取 $\boldsymbol{B}=B\hat{\boldsymbol{z}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 为方向矢量。

按照波尔兹曼统计，在能量为 E 的状态上分子数（占据数）满足

$$N_{\pm}\propto e^{\mp\frac{m_0 B}{kT}} \qquad ①$$

总分子数为

$$N=N_{+}+N_{-}$$

由以上两式得

$$\frac{N_{\pm}}{N}=\frac{e^{\mp m_0 B/kT}}{e^{m_0 B/kT}+e^{-m_0 B/kT}} \qquad ②$$

每个分子的平均磁矩为

$$\langle m\rangle=\frac{-m_0 N_{+}+m_0 N_{-}}{N} \qquad ③$$

根据磁化强度的定义有

$$M=n\langle m\rangle=nm_0\frac{\dfrac{e^{m_0 B/kT}-e^{-m_0 B/kT}}{2}}{\dfrac{e^{m_0 B/kT}+e^{-m_0 B/kT}}{2}}=nm_0\frac{\mathrm{sh}\dfrac{m_0 B}{kT}}{\mathrm{ch}\dfrac{m_0 B}{kT}}=nm_0\tanh\frac{m_0 B}{kT} \qquad ④$$

在高温近似

$$kT>>\frac{e\hbar}{2m}B=m_0 B$$

下有

$$\tanh\frac{m_0 B}{kT}=\frac{m_0 B}{kT}$$

由

$$M=\chi H=\frac{\chi}{1+\chi}\frac{B}{\mu_0}\approx\frac{\chi}{\mu_0}B \qquad ⑤$$

已考虑到 $\chi<<1$。由④⑤式知，在高温近似下有

$$\chi=\frac{\mu_0 n m_0^2}{kT}=\frac{C}{T} \qquad ⑥$$

从而

$$C=\frac{\mu_0 n m_0^2}{k}=\frac{\mu_0 n}{k}\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)^2 \qquad ⑦$$

（ii）在居里温度 θ 以上，由外斯定律

$$\chi = \frac{C}{T-\theta}$$

有

$$M = \chi H = \frac{C}{T-\theta}H$$

此即

$$\frac{T}{C}M = H + \frac{\theta}{C}M = H + H_m \qquad ⑧$$

因此，存在附加磁场（即所谓“分子场”）

$$H_{\mathrm{m}} = \frac{\theta}{C}M\ ,$$

与按照题中给出的表示

$$H_m = \gamma M$$

比较，得

$$\gamma = \frac{\theta}{C} \qquad ⑨$$

在所有磁矩都是顺排的情形下，由⑨式得

$$H_{\mathrm{m}} = \gamma M = \frac{\theta}{C}M = \frac{\theta}{\mu_0 n m_0^2 / k} n m_0 = \frac{k\theta}{\mu_0 m_0} \qquad ⑩$$

（2）（i）若认为这个分子场是最近邻自旋提供的，则每个自旋为最近邻分子提供的分子场（等效磁场）为

$$H'_{\mathrm{m}} = \frac{k\theta}{2\mu_0 m_0} \qquad ⑪$$

此后，为简明起见，将 H'_{m} 写成 H_{m}，但理解为等效磁场。在这个分子场中自旋能量为

$$E = -m_0 B_{\mathrm{m}} = -m_0 \mu_0 H_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2}k\theta \qquad ⑫$$

整个系统的能量为

$$E_N = -\frac{1}{2}(N-1)k\theta \qquad ⑬$$

（ii）这个非端点晶格上的自旋发生翻转前，它给左右最近邻自旋提供的分子场的能量为

$$(-\frac{1}{2}k\theta - \frac{1}{2}k\theta) = (-k\theta)$$

这个非端点晶格上的自旋发生翻转后，它给左右最近邻自旋提供的分子场的能量为

$$(+\frac{1}{2}k\theta + \frac{1}{2}k\theta) = (+k\theta)$$

相比于第（2）（i）问的情形，系统的能量增加为

$$(+k\theta) - (-k\theta) = 2k\theta \qquad ⑭$$

（3）（i）A 位自旋能量

$$\begin{aligned} &-\mu_0 \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{mA}} = -\mu_0 \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}} \cdot (-\alpha_{\mathrm{AB}} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}} - \alpha_{\mathrm{AA}} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}}) \\ &= \mu_0 (\alpha \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}} - \beta \mu_{\mathrm{A}}^2) = -\mu_0 (\beta m_0^2 - \alpha m_0^2) = -\mu_0 m_0^2 (\beta - \alpha) \end{aligned} \qquad ⑮$$

同理，B 位自旋能量与 A 位的相同。总能量为

$$E_N = -\frac{1}{2}(N-1)\mu_0 m_0^2 \beta + \frac{1}{2}(N-2)\mu_0 m_0^2 \alpha \quad （或 E_N = -\frac{1}{2}N\mu_0 m_0^2(\beta-\alpha)\ ） \qquad ⑯$$

（ii）A 、B 位分子数密度分别为$\frac{n}{2}$。对 A 位有

$$M_{\mathrm{A}}=\frac{C}{2T}H_{\mathrm{A}},\quad \text{即}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}\equiv\frac{n}{2}\bar{\boldsymbol{\mu}}_{\mathrm{A}}=\frac{C}{2T}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{mA}}) \qquad ⑰$$

式中$\bar{\boldsymbol{\mu}}_{\mathrm{A}}$是 A 位上$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}}$的平均值，而$\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}$是与之相应的磁化强度；同理，对 B 位有

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}\equiv\frac{n}{2}\bar{\boldsymbol{\mu}}_{\mathrm{B}}=\frac{C}{2T}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{mB}}) \qquad ⑱$$

外场$\boldsymbol{H}$为零时，若自发磁化，此时对应反铁磁相变，即

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}=\frac{C}{nT}(-\alpha_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}-\alpha_{\mathrm{AA}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}) \qquad ⑲$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}=\frac{C}{nT}(-\alpha_{\mathrm{BA}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}-\alpha_{\mathrm{BB}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}) \qquad ⑳$$

此即

$$\left(1+\frac{C}{nT}\alpha\right)\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}+\frac{C}{nT}\beta\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}=0$$

$$\frac{C}{nT}\beta\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}+\left(1+\frac{C}{nT}\alpha\right)\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}=0$$

若要有非零解，系数行列式须为零

$$\det\begin{pmatrix}1+\frac{C}{nT}\alpha & \frac{C}{nT}\beta\\ \frac{C}{nT}\beta & 1+\frac{C}{nT}\alpha\end{pmatrix}=0 \qquad ㉑$$

即

$$T=\frac{C}{n}(\beta-\alpha) \qquad ㉒$$

此即奈尔温度，代入 C 的表达式$C=\frac{\mu_0 n m_0^2}{k}$，得

$$T=\frac{\mu_0 m_0^2}{k}(\beta-\alpha) \qquad ㉓$$

（4）（i）

（解法一）

考虑围绕涡旋中心半径为r的闭合回路，则这个回路上一共有

$$N=\frac{2\pi r}{a}$$

个磁矩，由于绕回路一圈总的θ角的改变量是$2\pi l$，则相邻磁矩θ角的改变量（θ角之差）的平均值为

$$\left\langle\theta_i-\theta_j\right\rangle=\frac{2\pi l}{N}=\frac{2\pi l}{2\pi r/a}=\frac{la}{r} \qquad ㉔$$

（解法二）

任取围绕涡旋中心、半径为r的闭合回路上两个邻近格点$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，设其自旋$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ 、$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})$的方向分别为$\theta(\boldsymbol{r})$ 、$\theta(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})$，有

$$\theta(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})-\theta(\boldsymbol{r})=\nabla\theta(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\left|\nabla\theta(\boldsymbol{r})\right|\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

考虑到漩涡相对于过其中心的轴的对称性，各点 $\boldsymbol{r}$ 的 $\left|\nabla\theta(\boldsymbol{r})\right|$ 只与 r 有关，各点 $\boldsymbol{r}$ 的 $\nabla\theta(\boldsymbol{r})$ 的方向为 $\hat{\boldsymbol{n}}_\theta$（注：设在 $\boldsymbol{r}$ 处格点的自旋方向与二维平面上的 x 轴的夹角为 $\theta_{\boldsymbol{r}}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{r}} &= \nabla\theta_{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial\theta_{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{n}}_\theta + \frac{\partial\theta_{\boldsymbol{r}}}{\partial r}\hat{\boldsymbol{n}}_r\right)\cdot r\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}_r \\ &= \frac{\partial\theta_{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{n}}_\theta\cdot(r\mathrm{d}\theta)\hat{\boldsymbol{n}}_\theta = \frac{\partial\theta_{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta}r\mathrm{d}\theta \equiv \left|\nabla\theta_{\boldsymbol{r}}\right|r\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

），且 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (r\mathrm{d}\theta)\hat{\boldsymbol{n}}_\theta$，因而，沿着围绕涡旋中心的闭合回路走一圈，$\theta$ 角的改变量是

$$2\pi l = \oint\nabla\theta(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left|\nabla\theta(\boldsymbol{r})\right|\oint r\mathrm{d}\theta = 2\pi r\left|\nabla\theta(\boldsymbol{r})\right|$$

于是

$$\left|\nabla\theta(\boldsymbol{r})\right| = \frac{l}{r}$$

同理

$$\theta_i(\boldsymbol{r}_i) - \theta_j(\boldsymbol{r}_j) = \left|\nabla\theta(\boldsymbol{r}_{ij})\right|a$$

于是

$$\theta_i(\boldsymbol{r}_i) - \theta_j(\boldsymbol{r}_j) = \frac{la}{r}$$

因此

$$\left\langle\theta_i - \theta_j\right\rangle = \frac{la}{r} \qquad ㉔$$

（ii）由于沿着圆周磁矩角度变化很小，系统能量

$$\begin{aligned}E(\{\theta_i\}) &= -J\sum_{\langle i,j\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j) \approx -J\sum_{\langle i,j\rangle}\left[1-\frac{1}{2}(\theta_i-\theta_j)^2\right] \\ &= E_0 + \frac{J}{2}\sum_{r\in[a,L]}\sum_{\langle i,j\rangle\in\{r\}}(\theta_i-\theta_j)^2\end{aligned} \qquad ㉕$$

（解法一）

所求的一个涡旋的能量为

$$\begin{aligned}E_{\text{vortex}} &\equiv E(\{\theta_i\}) - E_0 \\ &= \frac{J}{2}\sum_{r\in[a,L]}\sum_{\langle i,j\rangle\in\{r\}}(\theta_i-\theta_j)^2 = \frac{J}{2}\int_a^L\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}\theta\left|\nabla\theta(\boldsymbol{r})\right|^2\end{aligned} \qquad ㉖$$

于是

$$E_{\text{vortex}} = \frac{J}{2}\int_a^L\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}\theta\left|\nabla\theta(\boldsymbol{r})\right|^2 = \frac{2\pi J}{2}\int_a^L\mathrm{d}r\frac{l^2}{r} = \pi Jl^2\ln\frac{L}{a} \qquad ㉗$$

（解法二）

所求的一个涡旋的能量为

$$
\begin{aligned}
E_{\text{vortex}} &\equiv E(\{\theta_i\}) - E_0 \\
&= \frac{J}{2}\sum_{r\in[a,L]}\sum_{\langle i,j\rangle\in\{r\}}(\theta_i-\theta_j)^2 = \frac{J}{2}\sum_{r\in[a,L]} N<\theta_i-\theta_j>^2 \qquad ㉖ \\
&= \frac{J}{2}\sum_{r\in[a,L]}\frac{2\pi r}{a}\left(\frac{la}{r}\right)^2 = \pi J l^2\sum_{r\in[a,L]}\frac{a}{r}
\end{aligned}
$$

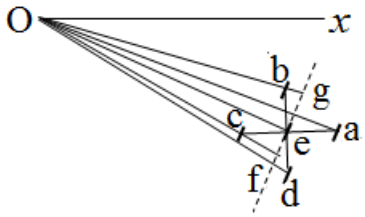
于是

$$
E_{\text{vortex}} = \pi J l^2\sum_{r\in[a,L]}\frac{\Delta r}{r} = \pi J l^2\int_a^L\frac{\mathrm{d}r}{r} = \pi J l^2\ln\frac{L}{a} \qquad ㉗
$$

（解法三）

考虑以涡旋中心O为圆心、半径为$r\to r+\Delta r$（$r>>a,\ r\Delta r>>a^2$）的一个二维细圆环，两个近邻磁矩的夹角$\Delta\theta=\theta_i-\theta_j<<1$，可取近似

$$
-J(\cos\Delta\theta-1)\approx\frac{J}{2}(\Delta\theta)^2.
$$



解题图 5a

设$l=1$。在解题图 5a 中，a、b、c、d 是格点 e 的最邻近格点，Ox 是二维 x-y（正方点阵）平面的水平轴。设 Oe 长为 r，Oe 与 Ox 的夹角为 α，且由题设 Oe 与格点 e 处的自旋取向（平行于直线 fg ）垂直（余亦同）。设格点 b、c 处的自旋取向与格点 e 处的自旋取向之间的夹角分别为 θ_{be}、θ_{ce}（余类推），由于 O$x\perp$ be，O$x\parallel$ ca （或 be$\perp$ ce），有

$$
\angle\text{beg}=\angle x\text{Oe}=\alpha,\quad \angle\text{cef}=\frac{\pi}{2}-\angle\text{beg}=\frac{\pi}{2}-\alpha
$$

于是

$$
\theta_{\text{be}}=\frac{a\cos\alpha}{r},\quad \theta_{\text{ce}}=\frac{a\sin\alpha}{r}
$$

同理，

$$
\theta_{\text{de}}=\frac{a\cos\alpha}{r},\quad \theta_{\text{ae}}=\frac{a\sin\alpha}{r}
$$

格点 e 的磁矩与最近邻的格点磁矩之间的相互作用能为

$$
<E_{\text{a}}>_{l=1}=\frac{J}{2}\left[\frac{1}{2}(\theta_{\text{be}}^2+\theta_{\text{de}}^2+\theta_{\text{ae}}^2+\theta_{\text{ce}}^2)\right]
$$

式中圆括号前的因子$\frac{1}{2}$是因为位于相邻格点处的磁矩之间的相互作用能是两个相邻格点上的磁矩共有的。于是

$$
<E_{\text{a}}>_{l=1}=\frac{J}{4}\left[2\left(\frac{a\cos\alpha}{r}\right)^2+2\left(\frac{a\sin\alpha}{r}\right)^2\right]=\frac{Ja^2}{2r}
$$

对于任意的 l，由于 $\Delta\theta$ 正比于 l，而相互作用能正比于 $(\Delta\theta)^2$，故

$$
<E_{\text{a}}>=\frac{Jl^2a^2}{2r}
$$

它只与 r 有关。

在以涡旋中心O为圆心、半径为$r \to r+\Delta r$（$r >> a$，Δr足够小，但$r\Delta r >> a^2$）的一个细圆环中包含的格点磁矩的数目是

$$\Delta n = \frac{2\pi r \Delta r}{a^2}$$

在$r \to r+\Delta r$的细圆环中的所有格点磁矩的相互作用能量为

$$\Delta E_r = \langle E_i \rangle \Delta n = \frac{Jl^2 a^2}{2r^2}\frac{2\pi r \Delta r}{a^2} = \pi J l^2 \frac{\Delta r}{r} \qquad ㉖$$

值得指出的是，在三维模型中，格点e的最邻近点还应当加上前后两个最邻近格点m、n（在原平面过e点垂直方向上）；但由题设，m、n点处的磁矩方向均与e点处的平行，因而对相互作用能没有贡献。

一个涡旋的能量

$$E_{\text{vortex}} = \sum_{r=a}^{L} \Delta E_r = \pi J l^2 \sum_{r=a}^{L} \frac{\Delta r}{r} = \pi J l^2 \int_a^L \frac{\mathrm{d}r}{r} = \pi J l^2 \ln \frac{L}{a} \qquad ㉗$$

（解法四）

首先计算$l=1$的自旋磁矩涡旋的能量，见图5e。晶格常数为a。

按题设：(1) 只考虑最近邻的磁矩之间的相互作用能，即

$$E(\{\theta_i\}) = -J\sum_{\langle i,j\rangle}[\cos(\theta_i - \theta_j) - 1],$$

其中$\langle i,j\rangle$代表i,j是最近邻（注：这里已经对能量进行了“重整化”，也就是把铁磁基态的能量取做了0）；(2) 对$l=1$的涡旋，各个磁矩的方向（假定都是顺时针的）总与从涡旋中心指向该磁矩的半径相垂直；(3) 平均说来，每一个格点占有的面积是a^2，因此，任何微观地大而宏观地小的面积ΔS中包含的磁矩的数目是$\Delta S / a^2$。

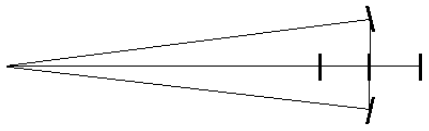
现在考虑以涡旋中心为圆心、半径为$r \to r+\Delta r$ $(r\Delta r >> a^2)$的一个细圆环，它的面积是$2\pi r\Delta r$，所以其中包含的磁矩的数目是

$$\Delta n = \frac{2\pi r \Delta r}{a^2}.$$

考虑距离涡旋中心很远的区域，因此两个近邻磁矩的夹角$\Delta\theta = \theta_i - \theta_j << 1$，可取近似

$$-J(\cos\Delta\theta - 1) \approx \frac{J}{2}(\Delta\theta)^2.$$

一个磁矩有4个最近邻。让我们考虑两种极端情形。第一种是这个原胞正交于从涡旋中心指向这个原胞的射线，见解题图5b。那么一个给定磁矩与两个横向近邻磁矩的夹角是0，相互作用能也是0，而与两个纵向近邻磁矩的夹角是a/r，所以它与最近邻磁矩相互作用能的平均值是



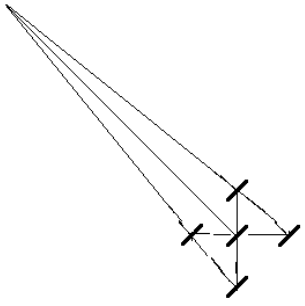
解题图5b

$$\langle E_i \rangle = \frac{J}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{a^2}{r^2} = \frac{J}{2}\frac{a^2}{r^2}.$$

第二种是这个原胞与从涡旋中心指向这个原胞的射线成45°角，见解题图5c。那么给定的磁矩与它的4个近邻的夹角都是$a/(\sqrt{2}r)$，所以它与最近邻磁矩相互作用能的平均值是

$$\langle E_i \rangle = \frac{J}{2}\cdot\frac{(a/\sqrt{2})^2}{r^2}\times\frac{4}{2} = \frac{J}{2}\frac{a^2}{r^2}.$$

我们发现二者完全相同！把上述分析推广到其它情形，很容易发现：这个结论适用于原胞在任何位置（方位），因为总有



解题图5c

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。所以普适的结论是

$$\langle E_i\rangle=\frac{J}{2}\frac{a^2}{r^2}.$$

在$r\to r+\Delta r$的细圆环中的相互作用能量为

$$\Delta E=\langle E_i\rangle\Delta n=\frac{J}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{2\pi r\Delta r}{a^2}=\pi J\frac{\Delta r}{r},\qquad ㉖$$

再把r从$a/2$到$L/2$积分，即得单个涡旋的总能量为

$$E_{\text{vortex}}=\pi J\int_{a/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\pi J\ln\frac{L}{a}.$$

把上述结论推广到任意的l是直接的：$\Delta\theta$正比于l，而能量正比于$(\Delta\theta)^2$，所以

$$E_{l\text{-vortex}}=\pi J\,l^2\ln\frac{L}{a}.\qquad ㉗$$

（iii）可以将涡旋中心放在$\Omega=\frac{L^2}{a^2}$个可能位置上，因此单个涡旋的熵可估算为

$$S=k\ln\Omega=k\ln\frac{L^2}{a^2}=2k\ln\frac{L}{a}\qquad ㉘$$

（iv）单个涡旋的亥姆赫兹自由能为

$$F=E_0+(\pi Jl^2-2kT)\ln\frac{L}{a}\qquad ㉙$$

由㉙式可知，系统可能的相变温度为

$$T=\frac{\pi Jl^2}{2k}\qquad ㉚$$

当$T<\frac{\pi Jl^2}{2k}$时，随着尺寸L增大，单个涡旋的自由能会发散到正无穷，说明此时系统不利于形成单个涡旋；当$T>\frac{\pi Jl^2}{2k}$时，随着尺寸L增大，单个涡旋的自由能会发散到负无穷，说明增加涡旋可以降低自由能，此时系统倾向于形成单个涡旋。