第 37 届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

一、我国大科学装置散裂中子源于 2018 年建成并投入使用，它在诸多领域有广泛的应用。历史上，查德威克在 1932 年首次确认了中子的存在并测出了它的质量；哈恩等人在 1939 年发现用中子轰击铀原子核可使其分裂，同时放出中子，引发链式反应。为了使链式反应能够持续可控地进行，可通过弹性碰撞使铀核放出的中子慢化。不考虑相对论效应。

（1）查德威克用中子（质量为 m ）轰击质量为 m_1 的静止靶核（氢核 H 或氮核 $^{14}\mathrm{N}$，质量为 m_{H} 或 $14m_{\mathrm{H}}$ ），观察它们的运动。设靶核的出射动量与入射中子的初动量之间的夹角为 α，试导出此时靶核的出射速率 v_1 和中子的末速率 v 分别与中子初速率 v_0 之间的关系。该实验测得氢核的最大出射速率为 $3.30\times10^7\ \mathrm{m/s}$，氮核的最大出射速率为 $4.70\times10^6\ \mathrm{m/s}$，求 m 和 v_0 的值。

（2）在上述实验中一个氮核也可能受到一束中子的连续撞击。假设氮核开始时是静止的，每次与之相碰的中子的速率都是 v_0，碰撞都使得氮核速率的增量最大。试计算经过多少次碰撞后氮核的动能与中子的初动能近似相等？

（3）设经过多次碰撞被减速的中子处于热平衡状态，其速率满足麦克斯韦分布

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2}v^2\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}},$$

这里 k_B 为玻尔兹曼常量，T 为系统的绝对温度。试计算在热平衡时，中子的最概然速率所对应的动能和最概然动能。

二、当电场中两个导体球靠近时，导体球之间的电场将明显增强。本题试探讨这一现象。已知真空介电常量为 ε_0。

（1）设一个半径为 R_0 的孤立导体球的球心与一个静止点电荷 Q 相距为 a（ $a>R_0$ ），求镜像电荷的电量及其位置。

（2）设导体球置于大小为 E_0 的匀强外电场中，该外加电场可看作是由两个相距很远的等量异号点电荷 $\pm Q$ 在其连线中点处产生的。试证导体球的感应电荷的作用等效于两个镜像电荷形成的电偶极子，并求该电偶极子的偶极矩与外场 E_0 之间的关系。

（3）设导体球外两等量异号点电荷 $\pm q$ 的间距为 Δl，它们形成的电偶极子 $q\Delta\boldsymbol{l}$ 沿径向放置在半径为 R_0 的导体球附近，偶极子中心与导体球中心相距 r（ $r>>\Delta l$ ），求该偶极子在导体球中镜像电偶极矩的大小。

（4）在大小为 E_0 的匀强外电场中，沿外电场方向放置两个半径为 R_0 的导体球，两球心相距 r（ $r>2R_0$ ）。求导体球外过两球心的平面内任一点 $\mathrm{P}'(x,y)$ 处的电势分布和在两球心连线方向的场强分布（可用递推式表示），取两球心连线中点为坐标原点，连线方向为 X 轴。

（5）试证：在不考虑击穿放电的情形下，当上述两导体缓慢无限靠近时，两球连心线中点

的电场会因静电感应而趋于无限大。

三、量子热机是利用量子物质作为工作物质进行循环的热机。下面以二能级原子系统为例描述量子热机的工作原理。二能级原子的平均能量定义为

$$\langle E\rangle = p_0 \cdot E_0 + p_1 \cdot E_1 ,$$

其中 E_0 、 p_0 和 E_1 、 p_1 分别表示原子处于基态和激发态的能量、概率。为简单起见，假设 $E_0 = 0$，在循环过程中激发态与基态的能量差是一个可调参量。该原子处于能量为 E 的能态的概率满足玻尔兹曼分布

$$p \propto \mathrm{e}^{-E/(k_\mathrm{B}T)} ,$$

其中 T 为热力学温度， k_B 为玻尔兹曼常量。在准静态过程中，平均能量的变化为

$$\mathrm{d}\langle E\rangle = p_1 \mathrm{d}E_1 + E_1 \mathrm{d}p_1 ,$$

其中 $p_1 \mathrm{d}E_1$ 为能级变化引起的能量变化，对应外界对二能级原子系统所做的功 $đW$ ； $E_1 \mathrm{d}p_1$ 为概率变化引起的能量变化，对应外界对二能级原子系统的传热 $đQ$ 。

（1）将二能级原子系统与一个温度为 T 的热源接触，求热平衡时二能级原子系统处在基态的概率 p_0 和激发态的概率 p_1 。

（2）经典奥托循环的 P-V 图如图 2a 所示，其中 A→B 和 C→D 是等容过程，B→C 和 D→A 是绝热过程。试画出量子奥托循环过程中二能级的能量差 E_1 与激发态概率 p_1 的关系示意图，并计算量子奥托循环四个过程中的传热、内能增量和对外做功。

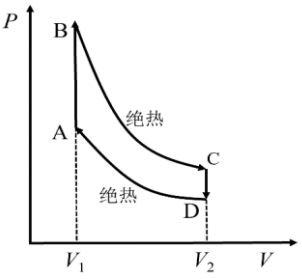


图 2a

（3）类似地，计算量子卡诺循环各个过程中的传热、内能增量和对外做功。假设量子卡诺循环中高温热源温度 T_h 和低温热源温度 T_l 分别与量子奥托循环的最高温度和最低温度相同，试比较量子奥托热机和量子卡诺热机的工作效率。

四、自 1964 年 Yeh 和 Cummins 观察到水流中粒子的散射光多普勒频移至今，激光多普勒测速技术已获得了广泛应用。为了得到足够的散射光强，通常在流体中散播尺寸和浓度适当的示踪散射粒子，激光照射到运动粒子上时发生散射，从而获得粒子（和流体）的速度信息。设粒子速度 $\boldsymbol{v}$ 与竖直方向的夹角为 β 。

（1）如图 4a 所示，一束频率为 f 的光被流体中的运动粒子所散射。光在流体中的传播速率为 c/n （ n 为流体的折射率），粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动（ $v << c/n$ ）。入射光和观测到的散射光的传播方向与粒子速度的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 。求散射光相对于入射光的频移量 Δf 与散射光方向的关系。设粒子的速率 $v = 1\ \mathrm{m/s}$ ，光的频率 $f = 10^{14}\mathrm{Hz}$ ， Δf 能否可以直接用分辨率为 5MHz 的光谱仪进行检测？

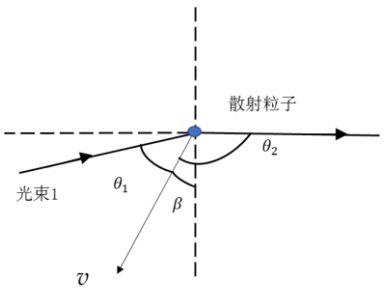


图 4a

（2）如图 4b 所示，用频率为 f 的两束相干平行光（其传播方向在同一竖直平面内）照射流体中同一粒子，两束光与水平面的夹角均为 $\alpha/2$（α 比较小）。两束光的散射光到达光电探测器的相位分别为 ϕ_1 和 ϕ_2，散射光的电场矢量方向近似相同且振幅均为 E_0。光电探测器输出的电流强度正比于它接收到的光强，比例常量为 k。假设光电探测器的频率响应范围为 $10^2 \sim 10^7\,\mathrm{Hz}$，求光电探测器的输出电流表达式。为简单起见，假设粒子速度处于照射在粒子上的两束入射光所在平面内。

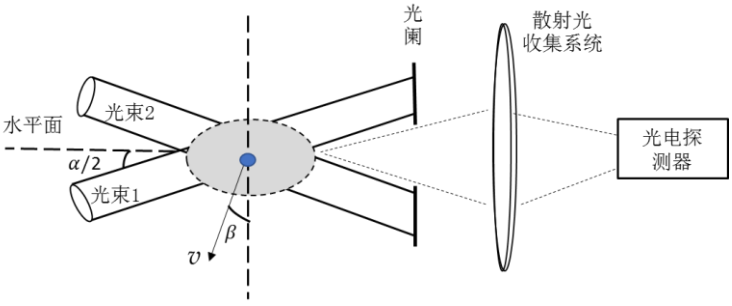


图 4b

（3）设 XOZ 平面内两束相干平行光相对于 X 轴对称入射到达相交区域（见图 4c），求干涉条纹间距；粒子（其速度在 XOZ 平面内）经过明暗相间的干涉条纹区将散射出光脉冲，求光脉冲的频率。

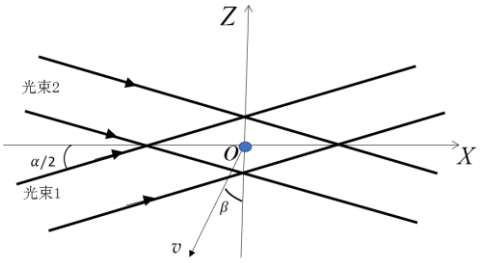


图 4c

五、在恒星之间的广阔宇宙空间中存在星际介质。在宇宙射线的作用下，星际介质中的分子失去部分电子成为正离子，电子则游离在外，成为等离子态。脉冲星是高速旋转、具有超强磁场的中子星，地球上所观测到其发出的电磁辐射是脉冲信号。脉冲星信号可用于星际导航和高精度计时，为此需要获得脉冲信号到达地球的精确时间，研究其电磁辐射的相位变化与色散。

一脉冲星到地球的距离为 d，星际介质中的电子平均数密度为 n_e（数量级为 $10^4\,\mathrm{m}^{-3}$）；假设介质中存在匀强静磁场 B（数量级为 $10^{-10}\,\mathrm{T}$），其方向平行于电磁波的传播方向。已知电子质量为 m_e，电荷为 $-e$（$e>0$），真空介电常量为 ε_0，真空中光速为 c。

（1）取该脉冲星到地球的电磁辐射方向为 z 轴正向，对于频率为 f 的电磁波，其电场为 $E_x = E_0\cos(kz-2\pi ft)$，$E_\mathrm{y} = E_0\cos(kz-2\pi ft\pm\dfrac{\pi}{2})$，式中 E_0 和 k 分别为电磁波的振幅和波数。为简单起见，设 E_0 为常量、且电磁波本身的磁场对电子的作用可忽略，求电子运动的回旋半径 R_e。

（2）脉冲星信号在星际介质中传播时会发生色散，其传播速度大小（群速度的大小 v_g）依赖于电磁波频率相对于波数的变化率：$v_\mathrm{g} = 2\pi\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k}$。求能通过介质到达地球的脉冲星信号电磁波的最低频率 f_c。

（3）假设在脉冲星信号的传播路径上，星际介质中的电子平均数密度 n_e 保持不变，问脉冲星信号中频率为 f 的电磁波到达地球的时间比其在真空中传播的时间延迟了多少？

（4）观测发现，从脉冲星同时出发的频率为 f 的电磁波到达地球时出现了相位差，求该相位差（可取近似：$\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n_e}{\varepsilon_0 m_e}} << f, \frac{eB}{2\pi m_e} << f$ ）。

（5） 如果在传播途中长度为 a 的区间内电子数密度出现涨落 Δn_e，求脉冲星信号中频率为 f 的电磁波通过该区间后由电子数密度涨落引起的相位移动。

六、反粒子最早由狄拉克的理论所预言。1932 年，安德森研究宇宙射线时发现了电子的反粒子——正电子。此后，人类又陆续发现了反质子等反粒子。

用单粒子能量为 6.8 GeV 的高能质子束轰击静止的质子靶，可产生反质子，其反应式为

$$\mathrm{p}+\mathrm{p}\rightarrow \mathrm{p}+\mathrm{p}+\underbrace{\mathrm{p}+\bar{\mathrm{p}}}_{\hookrightarrow \pi^-+\cdots}$$

质子和反质子湮灭时可产生 π^- 介子，因此在反质子束流中还伴随有大量 π^- 介子。图 6a 是探测反质子的实验装置原理图。反质子 $\bar{\mathrm{p}}$ 和 π^- 介子流依次通过闪烁计数器 S_1、S_2 和 S_3， S_1 与 S_2 相距 $l=12\mathrm{m}$，在 S_2 和 S_3 之间放置有切伦科夫计数器 C_1 和 C_2。切伦科夫计数器通过探测切伦科夫辐射（带电粒子在介质中的运动速度超过介质中光速时所激发的电磁辐射）而确定带电粒子的运动速度。C_1 仅记录速度较快的 π^- 介子，C_2 仅记录速度较慢的反质子。实验中 S_3 的作用是检验前面的计数结果是否真实。

（1）在上述反应中，假设末态质子和反质子速度近似相同，求反质子从 S_1 运动到 S_2 所需的时间 $t_{\bar{\mathrm{p}}}$。若 π^- 介子与反质子动能相同，求 π^- 介子从 S_1 运动到 S_2 所需的时间 t_{π^-}。

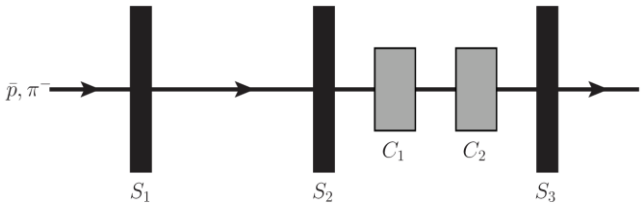


图 6a

（2）运动速率为 v（$v>c/n$）的带电粒子通过折射率为 n 的介质，求所产生的切伦科夫辐射传播方向与带电粒子的运动方向的夹角 θ。

（3）微分式切伦科夫计数器可以记录速率在某一个区间的粒子数。图 6b 是其关于轴线（图中虚线）旋转对称的原理剖面图。光收集系统包括半径为 R 的球面镜和半径可调的环状光阑。当切伦科夫辐射传播方向与带电粒子运动方向的夹角 θ 很小时，球面镜将带电粒子激发的切伦科夫辐射会聚在其焦平面上，形成半径为 r 的辐射光环，投射在计数器上。对于速率为 v 的带电粒子激发的辐射，求光环的半径。

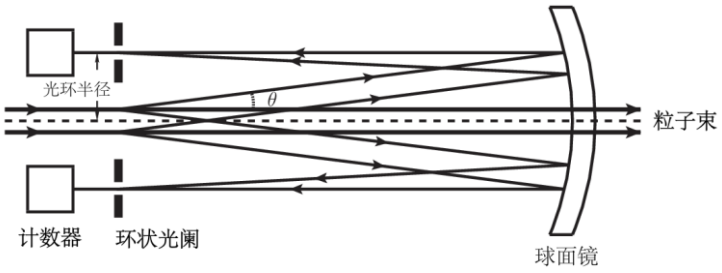


图 6b

（4）反质子与质子相遇会发生湮灭反应 $\mathrm{p}+\bar{\mathrm{p}}\to 3\pi^0$。反应末态粒子的总动能与反应初态粒子的总动能之差即为反应能 Q。为简单起见，假设质子和反质子的动能可忽略。末态三个 π^0 介子的总动能是一个常量，可用 Dalitz 图表示总动能在三个 π^0 介子之间的分配。如图 6c 所示，Dalitz 图是一个高为 1 的等边三角形，P 点到三边的距离等于三个 π^0 介子的动能占反应能的比率，即 $d_i = E_{k,i}/Q$，$E_{k,i}$ 表示第 i 个 π^0 介子的动能，$i=1,2,3$。以底边为 X 轴，底边中点为原点，底边上的中垂线为 Y 轴建立坐标系。求 P 点可能的分布范围边界的表达式，用反应能 Q、π^0 介子质量 m_{π^0} 和真空中的光速 c 表示。并讨论若 $m_{\pi^0}=0$ 时，P 点的分布范围边界的表达式。

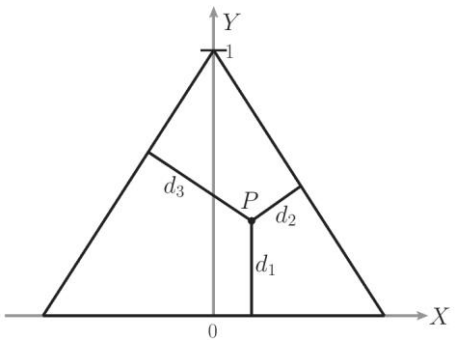
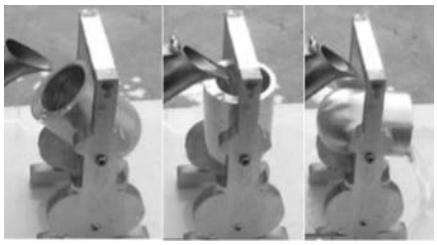


图 6c

已知：真空中的光速 $c=2.998\times10^8\,\mathrm{m/s}$，质子质量 $M_\mathrm{p}=938.2720\ \mathrm{MeV}/c^2$，中性 π 介子质量 $m_{\pi^0}=134.9766\ \mathrm{MeV}/c^2$，带电 $\pi^\pm$ 介子质量 $m_{\pi^\pm}=139.5702\ \mathrm{MeV}/c^2$。

七、据《荀子·宥坐篇》记载，孔子观于鲁桓公之庙，有欹（qī）器焉。欹器者，“虚则欹，中则正，满则覆。”悬挂式欹器实物如图 7a 所示：欹器空时，器身倾斜；注水适中，器身正立；注水过满，器身倾覆。图 7b 为悬挂式欹器的正视剖面图。整个欹器的外轮廓是相对于 Z 轴的回转面，Z' 轴为内部镗腔的对称轴，容器内壁与外壁的半球壳半径分别为 $R_1=R$ 和 $R_2=\sqrt{3}R$，两半球的球心 O 和 O' 均位于 X 轴上。Z' 轴和 Z 轴相距 $t=3R/10$，欹器圆柱部分的长度 $l=2R$。欹器的一对悬挂点所在直线与 XOZ 平面交于 Q 点，其坐标为 $(x_Q=-R/10,\ z_Q=2\sqrt{3}R/11)$。欹器材质均匀，其密度 ρ_1 为水的密度 ρ_2 的 3 倍。不计摩擦。


图 7a

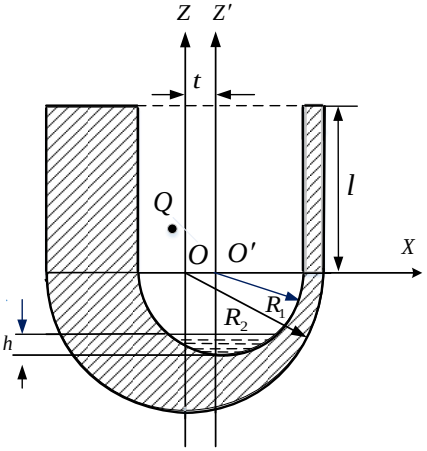


图 7b

（1）求空欹器自由悬挂平衡时 Z 轴与竖直方向的夹角。

（2）求空欹器绕一对悬挂点所在轴的转动惯量及其在平衡位置附近微振动的角频率（已知密度为 ρ、半径为 R 的匀质球体绕过其质心的轴的转动惯量为 $I_1=\dfrac{8}{15}\pi\rho R^5$；半径为 R、长度为 L 的匀质圆柱体绕过其质心且平行于圆柱底面的轴的转动惯量为 $I_2=\dfrac{\pi\rho R^2L(3R^2+L^2)}{12}$）。

（3）让空欹器自由悬挂，并开始往欹器内缓慢注水，问欹器内水面到底部的距离 h 为多少时器身正立？

（4）简述欹器“满则覆”的临界条件。

第 37 届全国中学生物理竞赛决赛试题参考答案

一、（1）中子以初速度与静止的靶核发生碰撞，碰撞前瞬间初速度方向与两球球心连线之间的夹角为α。在两球心连线和中子初速度方向所决定的平面上，令x轴沿两球心连线，中子初速度垂直于连线的方向为y轴。设碰撞后中子的速率为v，沿着x轴方向的速度分量为v_x，y轴方向的速度分量为v_y，碰撞后靶核速率为v_1，碰撞前后沿x轴和y轴方向的动量分别守恒

$$\begin{cases} mv_0\cos\alpha = mv_x + m_1v_1, \\ mv_0\sin\alpha = mv_y. \end{cases} \qquad ①$$

式中

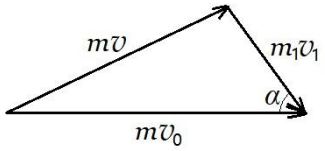
$$v_x^2 + v_y^2 = v^2$$

[

解法（二）

由碰撞前后动量守恒，碰前中子的动量$m\boldsymbol{v}_0$、碰后中子的动量$m\boldsymbol{v}$和碰后原子核的动量$m_1\boldsymbol{v}_1$构成一闭合的矢量三角形，如解题图 1a 所示。据余弦定理有

$$m^2v_0^2 + m_1^2v_1^2 - 2mm_1v_0v_1\cos\alpha = m^2v^2 \qquad ①$$



解题图 1a

式中，α是碰前中子的动量与碰后原子核的动量之间的夹角。

]

能量守恒给出

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 \qquad ②$$

由①②式得

$$m_1v_1^2 + \frac{m_1^2}{m}v_1^2 - 2m_1v_0v_1\cos\alpha = 0,$$

由此得

$$v_1 = \frac{2m\cos\alpha}{m+m_1}v_0, \qquad ③$$

将③式代入②式得

$$v = \frac{\sqrt{(m+m_1)^2 - 4mm_1\cos^2\alpha}}{m+m_1}v_0 = \frac{\sqrt{m^2 + m_1^2 - 2mm_1\cos 2\alpha}}{m+m_1}v_0 \qquad ④$$

由③式知，当$\alpha=0$时v_1达到最大，

$$v_{1\max}=\frac{2m}{m+m_1}v_0,$$

所以氢核的最大速率是

$$v_{\mathrm{H}}=\frac{2m}{m+m_{\mathrm{H}}}v_0,$$

氮核的最大速率是

$$v_{\mathrm{N}}=\frac{2m}{m+14m_{\mathrm{H}}}v_0,$$

由以上两式得

$$m=\frac{14v_{\mathrm{N}}-v_{\mathrm{H}}}{v_{\mathrm{H}}-v_{\mathrm{N}}}m_{\mathrm{H}}=\frac{14\times4.7\times10^6-3.3\times10^7}{3.3\times10^7-4.7\times10^6}m_{\mathrm{H}}=1.16m_{\mathrm{H}},\qquad ⑤$$

$$v_0=\frac{m+m_{\mathrm{H}}}{2m}v_{\mathrm{H}}=3.07\times10^7\ \mathrm{m/s}.\qquad ⑥$$

（2）速度为V_i的氮 14 核继续与速度为v_0的第 i 个中子碰撞，在每次碰撞后获得最大速率增量条件下，氮 14 核的速度变为V_{i+1}，中子的末速度为v_0'，由动量守恒和能量守恒有

$$\begin{cases}mv_0+m_{\mathrm{N}}V_i=mv_0'+m_{\mathrm{N}}V_{i+1},\\ \frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}m_{\mathrm{N}}V_i^2=\frac{1}{2}mv_0'^2+\frac{1}{2}m_{\mathrm{N}}V_{i+1}^2\end{cases}\qquad ⑦$$

由⑦式得

$$\frac{V_i}{v_0}=1-a+a\frac{V_{i-1}}{v_0}\qquad ⑧$$

式中

$$a=\frac{m_{\mathrm{N}}-m}{m_{\mathrm{N}}+m}=0.847\qquad ⑨$$

按⑧式逐次迭代得

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{v_0}&=1-a+a\frac{V_{n-1}}{v_0}=1-a+a(1-a+a\frac{V_{n-2}}{v_0})=1-a^2+a^2\frac{V_{n-2}}{v_0}\\&=1-a^3+a^3\frac{V_{n-3}}{v_0}=\cdots=1-a^n+a^n\frac{V_0}{v_0}=1-a^n\end{aligned}\qquad ⑩$$

这里，应用了题给条件

$$V_0=0$$

所求的次数 n 满足

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{N}}V_n^2=\frac{1}{2}\times 1.16m_{\mathrm{H}}v_0^2$$

即是

$$\frac{1}{2}14m_{\mathrm{H}}(1-a^n)^2v_0^2=\frac{1}{2}\times 1.16m_{\mathrm{H}}v_0^2, \qquad ⑪$$

由⑨⑪式得，满足方程的最接近的值是

$$n=2. \qquad ⑫$$

（3）根据麦克斯韦速率分布

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}}v^2$$

速率取极大值的条件是

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}=0,$$

可知最概然速率为

$$v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m}} \qquad ⑬$$

最概然速率对应的动能为

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{p}}}^2=k_{\mathrm{B}}T. \qquad ⑭$$

设总粒子数为 N，由动能分布函数定义可知为

$$f(E_{\mathrm{k}})=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}} \qquad ⑮$$

由速率分布函数的定义可知

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}$$

而

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\sqrt{2mE_{\mathrm{k}}}}$$

所以

$$f(E_{\mathrm{k}})=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}=\frac{1}{\sqrt{2mE_{\mathrm{k}}}}f(\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}}}{m}})$$

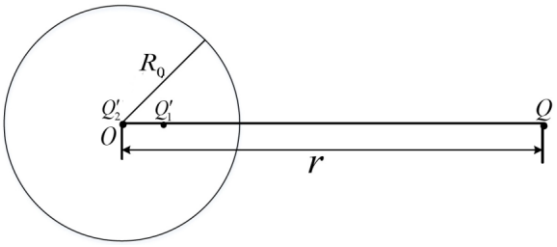
联立上述各式得

$$f(E_{\mathrm{k}})=\frac{2\pi}{(\pi k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{E_{\mathrm{k}}}{k_{\mathrm{B}}T}}{E_{\mathrm{k}}}^{1/2} \qquad ⑯$$

动能取极大值的条件为$\frac{\mathrm{d}f(E_\mathrm{k})}{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}=0$，由此可知最概然动能为

$$E_{\mathrm{kp}}=\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T=\frac{1}{2}E_\mathrm{p}. \qquad ⑰$$

二、（1）如解题图 2a 所示，取球心为原点，过球心和球外点电荷所在处的直线为 X 轴（下同），导体球外点电荷 Q 位于 $x=r$（$r>R_0$），导体球外电荷及其像电荷位于 X 轴上（下同）。由接地导体球的球面电像公式知，点电荷 Q 的镜像电荷 Q_1' 的大小和位置分别为



解题图 2a

$$Q_1'=-\frac{R_0}{r}Q,\ x'=\frac{R_0^2}{r} \qquad ①$$

由于不接地的导体球上电荷守恒以及导体球的外表面等势，在球心处还存在另一像电荷 Q_2'，其大小和位置为

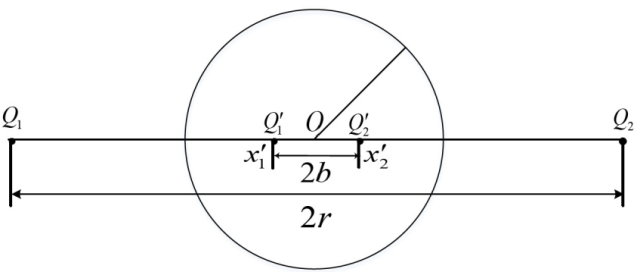
$$Q_2'=-Q_1'=\frac{R_0}{r}Q,\ x_2'=0 \qquad ②$$

导体球内、外的像电荷（包括像电偶极距）大小及其位置的坐标分别用打撇、不打撇加以区分（下同，特别声明的除外）。

（2）设在 X 轴上有等量异号点电荷 $Q_1=Q$（$Q>0$）和 $Q_2=-Q$，与金属球（导体球）球心 O 的距离均为 r（$r>R_0$），如解题图 2b 所示。由球面电像公式可知，Q_1 和 Q_2 的镜像电荷 Q_1' 和 Q_2' 的大小和在的位置分别为

$$\begin{cases} Q_1'=-\dfrac{R_0}{r}Q_1=-\dfrac{R_0}{r}Q,\ x_1'=-b\equiv-\dfrac{R_0^2}{r}; \\ Q_2'=-\dfrac{R_0}{r}Q_2=\dfrac{R_0}{r}Q,\quad x_2'=b\equiv\dfrac{R_0^2}{r}. \end{cases}$$

像电荷 Q_1' 和 Q_2' 之和等于零，已保持导体球为电中性。当 $r\to\infty$ 时，$b\to 0$；一对像电荷 Q_1' 和 Q_2' 可视为一位于球心 O 的点电偶极子，其偶极矩 p' 的大小为



解题图 2b

$$p'=Q_2'(x_2'-x_1')=2Q_1'b=2\frac{R_0^3}{r^2}Q \qquad ②$$

匀强外电场 E_0 可视为等量异号点电荷 $\pm Q$ 在其连线中点处产生的电场，有

$$E_0 = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad ③$$

由此可得

$$p' = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R_0^3 \qquad ④$$

（3）由题设，球外点电荷 $q_1 = -q$（$q > 0$）和 $q_2 = q$ 分别位于 $x_1 = r - \frac{\Delta l}{2}$ 和 $x_2 = r + \frac{\Delta l}{2}$，如解题图 2c 所示。由①式知，$q_1$ 和 q_2 的像电荷 q_1' 和 q_2' 的大小和位置分别为

$$q_1' = \frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} > 0,\ x_1' = \frac{R_0^2}{r - \frac{\Delta l}{2}} \qquad ⑤$$

$$q_2' = -\frac{qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}} < 0,\ x_2' = \frac{R_0^2}{r + \frac{\Delta l}{2}} \qquad ⑥$$

由于导体球上电荷守恒和导体球的外表面等势，在球心处还存在另一像电荷 Q'，其大小和位置分别为 $p_2 = \frac{R_0^3}{r_1^3}p_1, b_2 = \frac{R_0^2}{r_1}, r_2 = r - b_2; Q_1 = -q_1^{(2)} < 0, q_1^{(2)} = \frac{R_0}{r_1^2}p_1 > 0$

$$Q' = -(q_1' + q_2') = -\left(\frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} + \frac{-qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}}\right) = -\frac{R_0 q\Delta l}{r^2 - \left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2} = -\frac{R_0}{r^2}q\Delta l < 0,\ x_3' = 0 \qquad ⑦$$

这里，已利用条件 $\Delta l << r$（下同）。

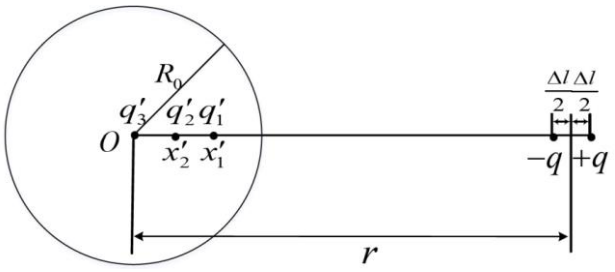
q_1' 和 q_2' 组成的像电荷体系可视为位于

$$x_0' = b \equiv \frac{R_0^2}{r}$$

点的像点电荷，电荷量为

$$-Q' = q_1' + q_2' = \frac{qR_0}{r - \frac{\Delta l}{2}} + \frac{-qR_0}{r + \frac{\Delta l}{2}}$$

$$= \frac{R_0}{r^2}q\Delta l = -q_3' > 0$$



解题图 2c

和一个像点电偶极子，电偶极距大小为

$$p' = q_1'(x_1' - x_0') + q_2'(x_2' - x_0')$$

$$= \frac{R_0^3}{r^2}\frac{q}{1 - \frac{\Delta l}{2r}}\left[\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta l}{2r}} - 1\right) - \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{2r}} - 1\right)\right] = \frac{R_0^3}{r^3}q\Delta l$$

方向沿 X 轴正向，即与球外电偶极距的方向相同。

此外，一对点电荷 $Q' < 0$、$-Q' > 0$ 体系具有不为零的点电偶极距（以及高阶距），电偶极距的大小为

$$p''=(-Q')(x_0'-0)=\frac{R_0}{r^2}q\Delta l\frac{R_0^2}{r}=\frac{R_0^3}{r^3}q\Delta l$$

方向沿 X 轴正向，即与球外电偶极距的方向相同。

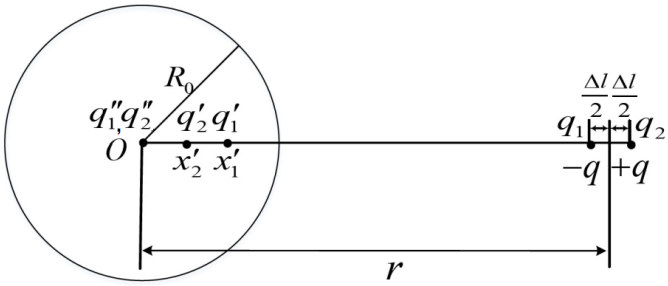
合起来，球外偶极子的镜像电偶极距的大小为

$$p'_{总}=p'+p''=2\frac{R_0^3}{r^3}q\Delta l \qquad ⑧$$

方向沿 X 轴正向，即与球外电偶极距的方向相同。

[解法（二）

设球外的电偶极子是点电荷 $q_1=-q\ (q>0)$ 位于 $x_1=r-\frac{\Delta l}{2}$ 和 $q_2=q$ 位于 $x_2=r+\frac{\Delta l}{2}$，那么 q_1 有**两个**像电荷，分别是



解题图 2d

$$q_1'=\frac{qR_0}{r-\frac{\Delta l}{2}}(>0),\ x_1'=\frac{R_0^2}{r-\frac{\Delta l}{2}};$$
$$q_1''=-\frac{qR_0}{r-\frac{\Delta l}{2}}(<0),\ x_1''=0. \qquad ⑤$$

同理，q_2 也有**两个**像电荷，分别是

$$q_2'=-\frac{qR_0}{r+\frac{\Delta l}{2}}(<0),\ x_2'=\frac{R_0^2}{r+\frac{\Delta l}{2}};$$
$$q_2''=\frac{qR_0}{r+\frac{\Delta l}{2}}(>0),\ x_2''=0. \qquad ⑥$$

球外的电偶极子及其像电荷如解题图 2d 所示。

四个像电荷 q_1',q_1'',q_2',q_2'' 构成的电荷系统的总电偶极矩为

$$p'_{总}=q_1'x_1'+q_1''x_1''+q_2'x_2'+q_2''x_2'' \qquad ⑦$$

即

$$p'_{总}=\frac{qR_0^3}{[r-(\Delta l/2)]^2}-\frac{qR_0^3}{[r+(\Delta l/2)]^2}=2\frac{R_0^3}{r^3}q\Delta l \qquad ⑧$$

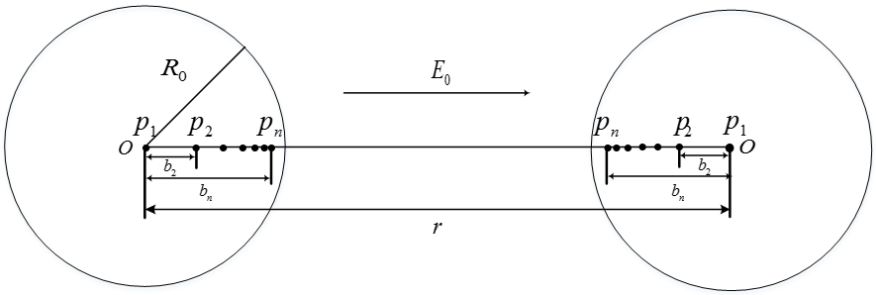
其方向与球外电偶极距的方向相同。

]

（4）此后，对于导体球内的像电荷（包括像电偶极距）大小及其位置的坐标取消打撇的标志。如图所示，当空间电场方向有两个相同导体球时，在恒外电场作用下，在两球心位置处产生一对点电偶极子

$$p_1 = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R_0^3 \qquad ⑨$$

这一对像偶极子又会产生次级电偶极子 p_2 以及位于电偶极子 p_2 处和球心的一对等量正反点电荷，接着产生 p_3, p_4, … 与隔开的等量正反点电荷的镜像电荷（孤立点电荷），如此无穷地镜像映射下去（见解题图 2e，其中孤立的镜像点电荷未画出）。由第（3）问分析知，各对点电偶极子的偶极矩和该偶极子所在位置到两球心的距离、以及孤立点电荷的大小依次为



解题图 2e

$$p_1 = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R_0^3,\ b_1 = 0,\ r_1 = r - b_1 = r \qquad ⑩$$

$$p_2 = \frac{R_0^3}{r_1^3} p_1, b_2 = \frac{R_0^2}{r_1}, r_2 = r - b_2; Q_1 = -q_1^{(2)} < 0, q_1^{(2)} = \frac{R_0}{r_1^2} p_1 > 0 \qquad ⑪$$

$$\begin{aligned} &p_3 = \frac{R_0^3}{r_2^3} p_2, b_3 = \frac{R_0^2}{r_2}, r_3 = r - b_3; \\ &Q_2 = -(q_2^{(2)} + q_2^{(3)}), q_2^{(2)} = \frac{R_0}{r_2} Q_1 < 0, q_2^{(3)} = \frac{R_0}{r_2}\left(\frac{p_2}{r_2} + q_1^{(2)}\right) > 0 \end{aligned} \qquad ⑫$$

$$\begin{aligned} &p_4 = \frac{R_0^3}{r_3^3} p_3, b_4 = \frac{R_0^2}{r_3}, r_4 = r - b_4; \\ &Q_3 = -(q_3^{(2)} + q_3^{(3)} + q_3^{(4)}), q_3^{(2)} = \frac{R_0}{r_2} Q_2, q_3^{(3)} = \frac{R_0}{r_3} q_2^{(2)}, q_3^{(4)} = \frac{R_0}{r_3}\left(\frac{p_3}{r_3} + q_2^{(3)}\right) > 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} &p_n = \frac{R_0^3}{r_{n-1}^3} p_{n-1}, b_n = \frac{R_0^2}{r_{n-1}}, r_n = r - b_n; \\ &Q_{n-1} = -\sum_{i=2}^{n} q_{n-1}^{(i)}, q_{n-1}^{(2)} = \frac{R_0}{r_2} Q_{n-2} < 0, q_{n-1}^{(3)} = \frac{R_0}{r_3} q_{n-2}^{(2)} < 0, \cdots, q_{n-1}^{(n-1)} = \frac{R_0}{r_{n-2}} q_{n-2}^{(n-2)} < 0, q_{n-1}^{(n)} = \frac{R_0}{r_{n-1}}\left(\frac{p_{n-1}}{r_{n-1}} + q_{n-2}^{(n-1)}\right) > 0 \end{aligned} \qquad ⑬$$

$$\vdots$$

这里，$q_n^{(i)}$ 是第 n 次镜像映射后左球内位置 b_i（即到球心的距离）上的镜像点电荷量，Q_i 是

位于球心的补赏电荷（以保证导体球电中性以及球的外表面等势）。

位于 $\boldsymbol{b}_0$ 、电偶极距为 $\boldsymbol{p}$ 的电偶极子的电势为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b}_0)}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b}_0\right|^3}$$

取两球连线的中点为坐标原点，x 轴水平向右，坐标原点为电势零点，则在球外空间任一点 $P(x,y)$ 处的电势为

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=&-E_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\frac{r}{2}-b_n)p_n}{4\pi\varepsilon_0[(x+\frac{r}{2}-b_n)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\frac{r}{2}+b_n)p_n}{4\pi\varepsilon_0[(x-\frac{r}{2}+b_n)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\varepsilon_0[(x+\frac{r}{2}-b_i)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Q_{n-1}}{4\pi\varepsilon_0[(x+\frac{r}{2})^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\varepsilon_0[(x-\frac{r}{2}+b_i)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Q_{n-1}}{4\pi\varepsilon_0[(x-\frac{r}{2})^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\qquad ⑭$$

当 $y=0$ 时，两球心连线上（球外）的电势分布为

$$\begin{aligned}\varphi(x,y=0)=&-E_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\frac{r}{2}-b_n)p_n}{4\pi\varepsilon_0\left|x+\frac{r}{2}-b_n\right|^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\frac{r}{2}+b_n)p_n}{4\pi\varepsilon_0\left|x-\frac{r}{2}+b_n\right|^3}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\varepsilon_0\left|x+\frac{r}{2}-b_i\right|}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Q_{n-1}}{4\pi\varepsilon_0\left|x-\frac{r}{2}\right|}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\varepsilon_0\left|x+\frac{r}{2}-b_i\right|}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Q_{n-1}}{4\pi\varepsilon_0\left|x-\frac{r}{2}\right|}\end{aligned}\qquad ⑮$$

两球心连线上（球外）的场强分布为

$$\begin{aligned}E(x,y=0)=&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y=0)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{2\pi\varepsilon_0\left|x+\frac{r}{2}-b_n\right|^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{2\pi\varepsilon_0\left|x-\frac{r}{2}+b_n\right|^3}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\varepsilon_0\left|x+\frac{r}{2}-b_i\right|^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Q_{n-1}}{4\pi\varepsilon_0\left|x-\frac{r}{2}\right|^2}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{4\pi\varepsilon_0\left|x+\frac{r}{2}-b_i\right|^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Q_{n-1}}{4\pi\varepsilon_0\left|x-\frac{r}{2}\right|^2}\end{aligned}\qquad ⑯$$

式中，像电荷构成的电偶极子的方向与导体球外的外加匀强电场的方向相同。

（5）设 $r\to 2R_0$ 并保持两球相互绝缘。由⑩⑪⑫式可知

$$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^3p_1,\quad b_2=\frac{1}{2}R_0,\quad r_2=\frac{3}{2}R_0 \qquad ⑰$$

$$p_3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 p_1=\left(\frac{1}{3}\right)^3 p_1,\quad b_3=\frac{2}{3}R_0,\quad r_3=\frac{4}{3}R_0 \tag{18}$$

$$\vdots$$

$$p_n=\left(\frac{1}{n}\right)^3 p_1,\quad b_n=\frac{n-1}{n}R_0,\quad r_n=\frac{n+1}{n}R_0\,; \tag{19}$$

$$\vdots$$

由⑯式有

$$\begin{aligned}E(x=0,y=0)&=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{\pi\varepsilon_0\left|\frac{r}{2}-b_n\right|^3}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{2\pi\varepsilon_0\left|\frac{r}{2}-b_i\right|^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Q_n}{2\pi\varepsilon_0\left|\frac{r}{2}\right|^2}\\&=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{\pi\varepsilon_0\left|\frac{r}{2}-b_n\right|^3}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{n-1}^{(i)}}{2\pi\varepsilon_0\left|\frac{r}{2}-b_i\right|^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-\sum_{i=2}^{n}q_{n-1}^{(i)}}{2\pi\varepsilon_0\left|\frac{r}{2}\right|^2}\\&>E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{\pi\varepsilon_0\left|\frac{r}{2}-b_n\right|^3}\\&=E_0+E_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\left|1-\frac{n-1}{n}\right|^3}=E_0+4E_0\sum_{n=1}^{\infty}1\to\infty\end{aligned} \tag{20}$$

这里，用到了不等式

$$-Q_{n-1}\equiv\sum_{i=2}^{n}q_{n-1}^{(i)}>0$$

这可通过直接计算证明如下：

$$\begin{aligned}-Q_{n-1}\equiv\sum_{i=2}^{n}q_{n-1}^{(i)}&=\frac{R_0}{r_2}Q_{n-2}+\frac{R_0}{r_3}q_{n-2}^{(2)}+\cdots+\frac{R_0}{r_{n-2}}q_{n-2}^{(n-1)}+\frac{R_0}{r_{n-1}}q_{n-2}^{(n)}\\&=\frac{R_0}{r_2}Q_{n-2}+\frac{R_0}{r_3}q_{n-2}^{(2)}+\cdots+\frac{R_0}{r_{n-2}}q_{n-2}^{(n-1)}+[\frac{R_0}{r_{n-1}}(\frac{p_{n-1}}{r_{n-1}}+q_{n-2}^{(n-1)})]\\&=\frac{R_0}{r_2}Q_{n-2}+\frac{R_0}{r_3}q_{n-2}^{(2)}+\cdots+\frac{R_0}{r_{n-2}}q_{n-2}^{(n-2)}+[\frac{R_0}{r_{n-1}^2}p_{n-1}+\frac{R_0}{r_{n-1}}(\frac{p_{n-2}}{r_{n-2}}+q_{n-3}^{(n-2)})]\\&=\frac{R_0}{r_2}Q_{n-2}+\frac{R_0}{r_3}q_{n-2}^{(2)}+\cdots+\frac{R_0}{r_{n-2}}q_{n-2}^{(n-2)}+\frac{R_0}{r_{n-1}}q_{n-2}^{(n-1)}+\frac{R_0}{r_{n-1}^2}p_{n-1}\\&>\frac{R_0}{r_{n-1}}[Q_{n-2}+\sum_{i=2}^{n-1}q_{n-2}^{(i)}]+\frac{R_0}{r_{n-1}^2}p_{n-1}=\frac{R_0}{r_{n-1}^2}p_{n-1}>0\end{aligned}$$

三、（1）二能级系统处于能量为E_1的概率满足玻尔兹曼分布$p\propto e^{-E/k_BT}$，有

$$p_1=p_0e^{-\frac{E_1}{k_BT}} \tag{①}$$

原子处于不同能级的总概率为 1，即

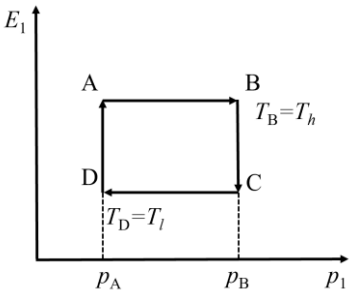
$$p_1 + p_0 = 1 \qquad ②$$

由①②式得

$$p_0 = \frac{1}{1+e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} \qquad ③$$

$$p_1 = \frac{e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{1+e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} \qquad ④$$

（2）量子奥托循环示意图如解题图 3a 所示。下面计算量子奥托热机循环过程中的各个物理量的增量。



解题图 3a

A→B（量子等容）过程：

不做功，即 $E_A = E_B$，吸热全部用来增加内能，因此吸收热量为

$$\Delta_1\langle E\rangle = Q_1 = E_B\left(p_B - p_A\right) \qquad ⑤$$

B→C（量子绝热）过程：

不吸收或者放出热，故 $p_B = p_C$，内能增量为

$$\Delta_2\langle E\rangle = \left(E_C - E_B\right)p_B \qquad ⑥$$

对外做功为

$$W_2 = -\Delta_2\langle E\rangle = -\left(E_C - E_B\right)p_B = \left(E_B - E_C\right)p_B \qquad ⑦$$

C→D（量子等容）过程：

不做功，即 $E_C = E_D$，放出的热来自内能减少，内能的增量为

$$\Delta_3\langle E\rangle = E_D\left(p_A - p_B\right) \qquad ⑧$$

放出热量为

$$Q_2 = -\Delta_3\langle E\rangle = E_C\left(p_B - p_A\right) \qquad ⑨$$

D→A（量子绝热）过程：

不吸收或者放出热，内能增量为

$$\Delta_4\langle E\rangle = \left(E_A - E_D\right)p_A \qquad ⑩$$

对外做功为

$$W_4 = -\Delta_4\langle E\rangle = -\left(E_A - E_D\right)p_A = \left(E_D - E_A\right)p_A \qquad ⑪$$

（3）对量子奥托热机，设循环过程中吸热为 Q_1 和放热为 Q_2，效率为

$$\eta_{奥}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1} \qquad ⑫$$

将⑤和⑨式代入⑫式得

$$\eta_{奥}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{E_{\mathrm{C}}}{E_{\mathrm{B}}} \qquad ⑬$$

由于 B→C 过程中，$p_{\mathrm{B}}=p_{\mathrm{C}}$，有

$$\frac{e^{-\frac{E_{\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{B}}}}}{1+e^{-\frac{E_{\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{B}}}}}=\frac{e^{-\frac{E_{\mathrm{C}}}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{C}}}}}{1+e^{-\frac{E_{\mathrm{C}}}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{C}}}}} \qquad ⑭$$

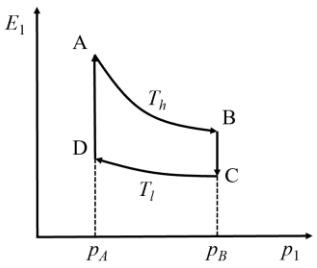
化简后，再根据$T_{\mathrm{B}}=T_h$有

$$\frac{E_{\mathrm{B}}}{T_h}=\frac{E_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{C}}} \qquad ⑮$$

由⑬⑮式得

$$\eta_{奥}=1-\frac{E_l}{E_h}=1-\frac{T_{\mathrm{C}}}{T_h} \qquad ⑯$$

量子卡诺循环示意图如解题图 3b 所示。下面计算量子卡诺热机循环过程中的各个物理量的增量。



解题图 3b

A→B 过程：

$$đQ_1=E_1\mathrm{d}p_1=E_1\mathrm{d}\left(\frac{e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}}{1+e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}}\right)$$

$$=E_1\frac{-\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T_h}e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}\left(1+e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}\right)-e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}\left(-\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T_h}e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}\right)}{\left(1+e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}\right)^2}\mathrm{d}E_1=\frac{-\frac{E_1}{k_BT_h}e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}}{\left(1+e^{-\frac{E_1}{k_{\mathrm{B}}T_h}}\right)^2}\mathrm{d}E_1$$

此过程中吸热为

$$Q_1=\int_{E_A}^{E_B}\frac{-\frac{E_1}{k_BT_h}e^{-\frac{E_1}{k_BT_h}}}{\left(1+e^{-\frac{E_1}{k_BT_h}}\right)^2}\mathrm{d}E_1=\int_{E_A}^{E_B}\frac{E_1}{\left(1+e^{-\frac{E_1}{k_BT_h}}\right)^2}\mathrm{d}e^{-\frac{E_1}{k_BT_h}}=\int_{E_A}^{E_B}E_1\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+e^{-\frac{E_1}{k_BT_h}}}\right)$$

$$=\frac{E_A}{1+e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}-\frac{E_B}{1+e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}+\int_{E_A}^{E_B}\frac{1}{1+e^{-\frac{E_1}{k_BT_h}}}\mathrm{d}E_1=\frac{E_A}{1+e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}-\frac{E_B}{1+e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}+\int_{E_A}^{E_B}\frac{k_BT_h\mathrm{d}e^{\frac{E_1}{k_BT_h}}}{1+e^{\frac{E_1}{k_BT_h}}}\quad⑰$$

$$=\frac{E_A}{1+e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}-\frac{E_B}{1+e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}+k_BT_h\ln\frac{1+e^{\frac{E_B}{k_BT_h}}}{1+e^{\frac{E_A}{k_BT_h}}}$$

内能增量为

$$\Delta E_1=\frac{e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}{1+e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}E_B-\frac{e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}{1+e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}E_A\quad⑱$$

对外做功为

$$W_1=Q_1-\Delta E=E_A-E_B+k_BT_h\ln\frac{1+e^{\frac{E_B}{k_BT_h}}}{1+e^{\frac{E_A}{k_BT_h}}}\quad⑲$$

B→C 过程：

在这个过程中，概率分布始终不变，$p_B=p_C$，过程中无传热，有

$$\frac{e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}{1+e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}=\frac{e^{-\frac{E_C}{k_BT_l}}}{1+e^{-\frac{E_C}{k_BT_l}}}$$

化简后得

$$E_C=\frac{T_l}{T_h}E_B\quad⑳$$

同理，$p_D=p_A$，故 D→A 过程中无吸热或放热发生，有

$$\frac{e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}{1+e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}=\frac{e^{-\frac{E_D}{k_BT_l}}}{1+e^{-\frac{E_D}{k_BT_l}}}$$

化简后得

$$E_D=\frac{T_l}{T_h}E_A\quad㉑$$

吸热为

$$Q_2=0\quad㉒$$

对外做功等于内能减少

$$W_2=-\Delta E_2=\frac{e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}{1+e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}E_B-\frac{e^{-\frac{E_C}{k_BT_C}}}{1+e^{-\frac{E_C}{k_BT_h}}}E_C \qquad ㉓$$

C→D 过程：

过程 C→D 与 A→B 类似，均为等温过程，放热的计算可以类比⑰式，并代入⑳和㉑式后得，放热为

$$Q_3=\frac{E_D}{1+e^{-\frac{E_D}{k_BT_l}}}-\frac{E_C}{1+e^{-\frac{E_C}{k_BT_l}}}+k_BT_l\ln\frac{1+e^{\frac{E_C}{k_BT_l}}}{1+e^{\frac{E_D}{k_BT_l}}}=\frac{\frac{T_l}{T_h}E_A}{1+e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}-\frac{\frac{T_l}{T_h}E_B}{1+e^{-\frac{E_B}{k_BT_h}}}+k_BT_l\ln\frac{1+e^{\frac{E_B}{k_BT_h}}}{1+e^{\frac{E_A}{k_BT_h}}} \qquad ㉔$$

内能增量为

$$\Delta E_3=\frac{e^{-\frac{E_D}{k_BT_l}}}{1+e^{-\frac{E_D}{k_BT_l}}}E_D-\frac{e^{-\frac{E_C}{k_BT_l}}}{1+e^{-\frac{E_C}{k_BT_l}}}E_C \qquad ㉕$$

对外做功为

$$W_3=Q_3-\Delta E_3=E_C-E_D+k_BT_l\ln\frac{1+e^{\frac{E_B}{k_BT_h}}}{1+e^{\frac{E_A}{k_BT_h}}} \qquad ㉖$$

D→A 过程：

吸热为

$$Q_4=0 \qquad ㉗$$

对外做功等于内能减少

$$W_4=-\Delta E_4=\frac{e^{-\frac{E_D}{k_BT_l}}}{1+e^{-\frac{E_D}{k_BT_l}}}E_D-\frac{e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}{1+e^{-\frac{E_A}{k_BT_h}}}E_A \qquad ㉘$$

对量子卡诺热机，循环过程中吸热Q_1，放热Q_3，将⑰和㉔式代入效率计算公式得

$$\eta_{卡}\equiv\frac{Q_1-Q_4}{Q_1}=1-\frac{Q_4}{Q_1}=1-\frac{T_l}{T_h} \qquad ㉙$$

这与经典卡诺热机的效率一致。然而$T_l<T_C<T_h$，故由⑯㉙式知

$$\eta_{奥}<\eta_{卡} \qquad ㉚$$

因此，量子奥托热机的效率低于量子卡诺热机的效率。

四、（1）一束频率为f的光波被流体中运动粒子所散射。光波在流体中的传播速度大小为c，粒子运动速度大小为v（$v\ll c$）。由于多普勒效应，粒子接收到的光的频率为

$$f'=f(1+\frac{vn}{c}\cos\theta_1) \qquad ①$$

式中θ_1为光波入射方向与散射粒子运动速度之间的夹角。同样由于多普勒效应，在散射方向

上探测到来自粒子的散射光的频率为

$$f'' = \frac{f'}{1-\frac{vn}{c}\cos\theta_2} \qquad ②$$

其中θ_2为散射光波传播方向与散射粒子速度之间的夹角。

散射光与入射光的频率之差为

$$\Delta f = f'' - f = \frac{fvn}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \qquad ③$$

已知粒子的速度为$v = 1\text{m/s}$，光的频率量级为10^{14}Hz，

$$\Delta f = \frac{fvn}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) < \frac{2fvn}{c} \approx 0.7\text{MHz} < 5\ \text{MHz} \qquad ④$$

因此，分辨率为 5MHz 的光谱仪不能对以此速度运行的粒子进行探测。

（2）到达探测器的两散射光 1 和 2 的电场为

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0\cos[2\pi(f+\Delta f)t+\phi_1] \\ E_2 &= E_0\cos[2\pi(f+\Delta f')t+\phi_2] \end{aligned} \qquad ⑤$$

其中Δf、$\Delta f'$分别为散射光 1 和 2 与原光频率的频率之差。两散射光的合成光强为

$$\begin{aligned} I(t) &\propto |E_1+E_2|^2 \\ &= E_0^2 + \frac{E_0^2}{2}\cos[4\pi(f+\Delta f)t+2\phi_1] + \frac{E_0^2}{2}\cos[4\pi(f+\Delta f')t+2\phi_2] \\ &\quad + E_0^2\cos[4\pi(2f+\Delta f'+\Delta f)t+(\phi_1+\phi_2)] + E_0^2\cos[2\pi(\Delta f-\Delta f')t+\phi_1-\phi_2] \end{aligned} \qquad ⑥$$

式中，第一项是常量；中间三项的变化频率为光频及其和频，探测器的频率响应跟不上其时间变化，它们实际上表现为其时间平均值，也是常量；第五项的变化频率是光频的差频。因此，探测器输出的光电流为

$$i(t) = kE_0^2\cos(2\pi\Delta f_D t + \phi_1 - \phi_2) \qquad ⑦$$

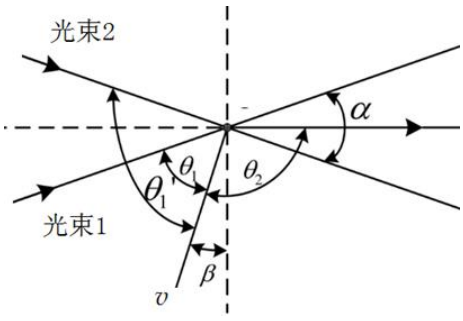
这里

$$\Delta f_D = \Delta f - \Delta f'$$

是光束 1 和光束 2 的散射光频率差之差。光束 1 和光束 2 及其被速度为v的粒子散射的散射光如解题图 4a 所示。由题意知，③式即为光束 1 的散射光频率差，类似的，对于光束 2 获得的频率差为

$$\Delta f' = \frac{fvn}{c}(\cos\theta_1' + \cos\theta_2) \qquad ⑧$$

因此光束 1 和光束 2 的散射光频率差之差



解题图 4a

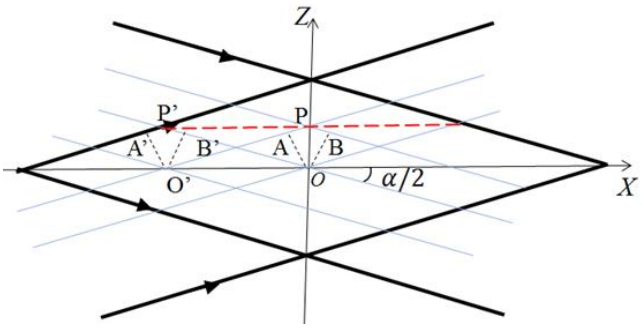
$$\Delta f_{\mathrm{D}} = \Delta f' - \Delta f$$
$$= \frac{f v n}{c}(\cos\theta_1' - \cos\theta_1) \qquad ⑨$$
$$= \frac{2 f v n}{c}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta$$

式中

$$\alpha = \theta_1' - \theta_1,\quad \beta = \frac{1}{2}(\theta_1' + \theta_1 - \pi)$$

因为光电流信号仅仅与散射光频率差之差相关，与 θ_2 没有关系，所以此方法对速度的测量与散射光的方向无光。

（3）如解题图 4b 所示，黑色粗线所包围的菱形为两对称射入相干平行光束相交区域，蓝色细线代表区域内的光线，对于位于 z 轴上的各点来说 $\Delta\phi = 0$，因此在相交区域 z 轴上的各点干涉相长（比如 O 点与 O’点），将呈现干涉相长明条纹。过 O 点做垂线 OA 垂直于 AP，OB 垂直于 BP，因此两相干光到 P 点相对于 O 点的相位差为



解题图 4b

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{AP+BP}) = \frac{4\pi}{\lambda} d\sin\frac{\alpha}{2} \qquad ⑩$$

其中 d 为 P 点到 X 轴的距离。类似的，对 O’点做垂线 O’A’垂直于 A’P’，O’B’垂直于 B’P’，因此两相干光到 P’点的相位差为

$$\Delta\phi' = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{A'P'+B'P'}) = \frac{4\pi}{\lambda} d\sin\frac{\alpha}{2} \qquad ⑪$$

因此，对于相交区域内 P’P 上的各点干涉情况一致，由图中几何关系可知，P’P 平行 O’O，如果各点满足 π 的偶数倍，则干涉相长，

$$\frac{4\pi}{\lambda} d\sin\frac{\alpha}{2} = 2j\pi, \qquad (j = 0,1,2,\cdots) \qquad ⑫$$

所以，第零级明条纹在相交区域内 X 轴上，其余明条纹将平行于 X 轴，呈等间距分布。

形成亮条纹两个相邻明条纹之间相位差 2π，有

$$2d\sin(\alpha/2) = \lambda \qquad ⑬$$

因此，干涉条纹间距为

$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)} \qquad ⑭$$

由于光强明暗相间的结果，每当粒子运动到明场时将散射出一个光脉冲，所以光脉冲的频率与粒子速度的竖直方向分量有关。 粒子穿越相邻两条亮纹的时间为

$$\tau = \frac{d}{v\cos\beta} \qquad ⑮$$

于是光脉冲频率为

$$f_{\mathrm{D}} = \frac{2fvn}{c}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta \qquad ⑯$$

[解法（二）

两束入射光的方向分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{i} + \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{i} - \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{j} \end{aligned} \qquad ⑩$$

在位矢 $\vec{r}$ 处，两束光的相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_2) \qquad ⑪$$

所有相位差都为 $\Delta\phi$ 的场点满足的方程为

$$\Delta\phi = 2y\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} \qquad ⑫$$

可见干涉条纹为一系列与 X 轴平行的直线。条纹间距 d 满足

$$2d\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \qquad ⑬$$

于是

$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)} \qquad ⑭$$

粒子穿越相邻两条亮纹的时间为

$$\tau = \frac{d}{v\cos\beta} \qquad ⑮$$

于是光脉冲频率为

$$f_{\mathrm{D}} = \frac{2fvn}{c}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta \qquad ⑯$$

]

五、（1）星际介质处于等离子态，由于正离子质量远大于负离于（电子）的质量，因此在电场的作用下电子运动，而离子可视为不动。星际介质的离子数密度很小，离子间的碰撞可忽略。电子的运动是低速的，电磁波的磁场对电子的作用也可忽略。设电子的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，则电子受到的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F}=-e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad ①$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 与电磁波传播方向垂直，$\boldsymbol{B}$ 与传播方向平行，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 与传播方向垂直，故 $\boldsymbol{F}$ 与传播方向垂直，从而使电子在垂直于信号传播方向的平面中作圆周运动。由牛顿第二定律有

$$eE_0 \pm evB=\frac{m_e v^2}{R_e} \qquad ②$$

式中，

$$v=2\pi f R_e \qquad ③$$

$\pm$ 对应于电子两个不同的旋转方向。联立②③式，解得

$$R_{e\mp}=\frac{eE_0}{2\pi m_e f(2\pi f \mp \frac{eB}{m_e})} \qquad ④$$

[解法（二）

电子在洛伦兹力作用下的运动方程为

$$m_e\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=-e[\boldsymbol{E}(\mathrm{t})+\dot{\boldsymbol{x}}(t)\times\boldsymbol{B}] \qquad ①$$

式中 $\boldsymbol{E}(t)$ 为该点电磁波的电场

$$\boldsymbol{E}(t)\equiv E_x \pm iE_y = E_0 e^{\pm i(\omega t-kz)}$$

这里 $\omega=2\pi f$ ，而 $\theta(t)$ 是在垂直于电磁波传播方向的平面（作为复平面）上电场的辐角。在上述复平面上

$$\boldsymbol{x}(t)=R_e e^{\pm i\omega t} \qquad ②$$

式中，ω 可理解为该电子回转的角速度。由②式和 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交可知

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)\times\boldsymbol{B}=\pm i[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}(t)]\times\boldsymbol{B}=\pm i\boldsymbol{x}(t)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B})=\pm i\omega B\boldsymbol{x}(t) \qquad ③$$

由①②③式有

$$-m_e\omega^2 R_e=-e[E_0\pm\omega R_e B]$$

解得

$$R_{e\mp}=\frac{eE_0}{2\pi m_e f(2\pi f \mp \frac{eB}{m_e})} \qquad ④$$

]

（2）星际介质中单位体积内的电子数为 n_e，所以介质的极化强度为

$$P_{\mp}=-n_e e R_{e\mp} \qquad ⑤$$

电位移矢量为

$$D_{\mp}=\varepsilon_0 E+P_{\mp}=\left(\varepsilon_0-\frac{n_e e^2}{4\pi^2 m_e f^2 \mp 2\pi f eB}\right)E \qquad ⑥$$

从而得到介质的介电常数

$$\varepsilon_{\mp}=\varepsilon_0-\frac{n_{\mathrm{e}}e^2}{4\pi^2 m_{\mathrm{e}}f^2\mp 2\pi feB} \tag{⑦}$$

折射率n为

$$n_{\mp}^2=\frac{\varepsilon_{\mp}}{\varepsilon_0}=1-\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{f\left(f\mp f_B\right)} \tag{⑧}$$

式中

$$f_{\mathrm{p}}=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{e}}}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}},\quad f_B=\frac{eB}{2\pi m_{\mathrm{e}}}$$

分别是等离子体的特征频率、电子在磁场中的同步回旋频率。

由波数、频率和折射率的关系$k=\frac{\omega}{c}n$（$\omega=2\pi f$）和⑧式得，群速度为

$$v_{\mathrm{g}\mp}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_{\mp}}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}k_{\mp}}{\mathrm{d}\omega}}=\frac{c}{n_{\mp}+\omega\frac{\mathrm{d}n_{\mp}}{\mathrm{d}\omega}}=\frac{n_{\mp}c}{1\pm\frac{f_{\mathrm{P}}^2 f_B}{2f(f\mp f_B)^2}} \tag{⑨}$$

在介质中群速度为零的电磁波是不能在该介质中传播的，

$$v_{\mathrm{g}\mp}=0 \tag{⑩}$$

即

$$f^2\mp f_B f-f_{\mathrm{p}}^2=0$$

舍去方程的负根，得到能通过星际介质的最低电磁波频率为

$$f_{\mathrm{c}\mp}=\frac{-(\mp f_B)+\sqrt{f_B^2+4f_{\mathrm{p}}^2}}{2}=\frac{e}{4\pi}\left(\sqrt{\frac{B^2}{m_{\mathrm{e}}^2}+\frac{4n_{\mathrm{e}}}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}}\pm\frac{B}{m_{\mathrm{e}}}\right) \tag{⑪}$$

当$B=0$时，$f_{\mathrm{c}\mp}(B=0)=f_{\mathrm{p}}$，这正是把$f_{\mathrm{p}}$称为等离子体特征频率的原因。

（3）频率为f的电磁波信号通过该介质达到地球的时间比其在真空中传播的时间延迟量为

$$\Delta t_{\mp}=\int_0^d\frac{\mathrm{d}l}{v_{g\mp}}-\frac{d}{c} \tag{⑫}$$

将⑨式代入⑫式，注意到$f_{\mathrm{p}}<<f$, $f_B<<f$，有

$$\begin{aligned}\Delta t_{\mp}&=\int_0^d\frac{\mathrm{d}l}{v_{g\mp}}-\frac{d}{c}\approx\int_0^d\frac{(1\pm\frac{f_{\mathrm{P}}^2 f_B}{2f^3})\mathrm{d}l}{c\sqrt{1-\frac{f_{\mathrm{P}}^2}{f^2}\mp\frac{f_{\mathrm{P}}^2 f_B}{f^3}}}-\frac{d}{c}\approx\frac{1}{c}\int_0^d\left[1+\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{2f^2}\pm\frac{f_{\mathrm{p}}^2 f_B}{f^3}\right]\mathrm{d}l-\frac{d}{c}\\&=\frac{d}{c}\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{2f^2}\left(1\pm\frac{2f_B}{f}\right)=\frac{1}{2f^2 c}\frac{e^2 n_{\mathrm{e}}d}{4\pi^2\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}\left(1\pm\frac{eB}{\pi m_{\mathrm{e}}f}\right)\end{aligned} \tag{⑬}$$

（4）由波数与折射率关系$k=\frac{\omega}{c}n$和⑧式（在$f_{\mathrm{p}}<<f$, $f_B<<f$的近似下），

$$k_{\mp}(f)=\frac{2\pi f}{c}n_{\mp}=\frac{2\pi f}{c}\sqrt{1-\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{f^2}\mp\frac{f_{\mathrm{p}}^2 f_{\mathrm{B}}}{f^3}} \qquad ⑭$$

从脉冲星发出的频率为 f 的电磁波在通过星际介质区间d后形成的两种不同的电磁波信号的相位差为

$$\begin{aligned}\Delta\phi&\equiv\phi_+-\phi_-=-\omega(t_+-t_-)+\int_0^d(k_+-k_-)\mathrm{d}l\\&=-2\pi f\frac{d}{c}\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{2f^2}\left[\left(1-\frac{2f_B}{f}\right)-\left(1+\frac{2f_B}{f}\right)\right]+\frac{2\pi fd}{c}\left(\sqrt{1-\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{f^2}+\frac{f_{\mathrm{p}}^2 f_{\mathrm{B}}}{f^3}}-\sqrt{1-\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{f^2}-\frac{f_{\mathrm{p}}^2 f_{\mathrm{B}}}{f^3}}\right) \qquad ⑮\\&=2\pi f\frac{d}{c}\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{2f^2}\frac{4f_B}{f}+\frac{2\pi fd}{c}\frac{f_{\mathrm{p}}^2 f_{\mathrm{B}}}{f^3}=\frac{6\pi d}{c}\frac{f_{\mathrm{p}}^2 f_{\mathrm{B}}}{f^2}=\frac{3e^3 n_{\mathrm{e}}dB}{4\pi^2\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}^2 cf^2}\end{aligned}$$

（5）由⑮式可知，电子密度出现涨落会引起折射率的变化。由⑧式得

$$\Delta n_{\mp}=-\frac{f_{\mathrm{p}}^2}{2nf\left(f\mp f_B\right)}\frac{\Delta n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}} \qquad ⑯$$

由⑯式和$k=\dfrac{\omega}{c}n$得，波数因电子密度涨落引起的变化为

$$\Delta k_{\mp}=\frac{2\pi f}{c}\Delta n_{\mp}=-\frac{\pi f_{\mathrm{p}}^2}{nc(f\mp f_B)}\frac{\Delta n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}} \qquad ⑰$$

于是，频率为 f 的电磁波通过星际介质形成的两种不同的电磁波信号因电子密度涨落产生的相位移动为

$$\Delta\phi_{\mp}=-a\Delta k_{\mp}=\frac{\pi f_{\mathrm{p}}^2}{nc(f\mp f_B)}\frac{\Delta n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{e}}}a$$

六、（1）入射高能质子的动量为

$$P=\sqrt{\frac{E_{\mathrm{p}}^2}{c^2}-M_{\mathrm{p}}^2c^2}=6.735\ \mathrm{GeV}/c \qquad ①$$

所产生的反质子的动量近似为

$$P_{\bar{\mathrm{p}}}=\frac{P}{4}=1.684\ \mathrm{GeV}/c \qquad ②$$

［解法（二）

$$E_{\mathrm{p}}+M_{\mathrm{p}}c^2=4E_{\bar{\mathrm{p}}} \qquad ①$$

$$E_{\bar{\mathrm{p}}}=\sqrt{P_{\bar{\mathrm{p}}}^2c^2+M_{\mathrm{p}}^2c^4} \qquad ②$$

］

反质子的运动速度为

$$v_{\bar{p}}=\frac{P_{\bar{p}}c^2}{E_{\bar{p}}}=\frac{P_{\bar{p}}c^2}{\sqrt{P_{\bar{p}}^2c^2+M_{\bar{p}}^2c^4}}=0.873c \qquad ③$$

反质子从S_1运动到S_2的时间为

$$t_{\bar{p}}=\frac{l}{v_{\bar{p}}}=45.8\ \text{ns}. \qquad ④$$

π介子的能量为

$$E_\pi=E_{k,\pi}+m_\pi c^2=E_{\bar{p}}-M_{\bar{p}}c^2+m_\pi c^2. \qquad ⑤$$

π介子的运动速度为

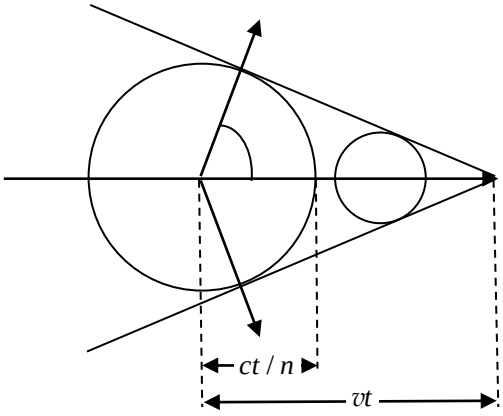
$$v_\pi=\frac{P_\pi c^2}{E_\pi}=\frac{c\sqrt{E_\pi^2-m_\pi^2c^4}}{E_\pi}=0.992c \qquad ⑥$$

π介子从S_1运动到S_2的时间为

$$t_\pi=\frac{l}{v_\pi}=40\ \text{ns}. \qquad ⑦$$

（2）带电粒子在折射率为n的介质中以速度v（$v>c/n$）从位置O匀速运动到位置P的过程（经历时间间隔为t）中，在其运动的路径上的各点所激发的介质中的电磁场形成一个圆锥形包络面，如解题图 6a 所示。切伦科夫辐射方向沿圆锥包络面的法线方向，它与带电粒子运动方向的夹角为

$$\cos\theta=\frac{ct/n}{vt}=\frac{c}{nv}.$$



解题图 6a

所以

$$\theta=\arccos\frac{c}{nv}. \qquad ⑧$$

（3）球面镜的焦距为

$$f=R/2. \qquad ⑨$$

焦平面上光环的半径为

$$r=f\tan\theta=\frac{R}{2}\sqrt{(\frac{nv}{c})^2-1}. \qquad ⑩$$

（4）由动量守恒得

$$\gamma_1m_\pi\boldsymbol{v}_1+\gamma_2m_\pi\boldsymbol{v}_2+\gamma_3m_\pi\boldsymbol{v}_3=0, \qquad ⑪$$

由能量守恒得

$$m_\pi c^2(\gamma_1-1)+m_\pi c^2(\gamma_2-1)+m_\pi c^2(\gamma_3-1)=Q\,. \qquad ⑫$$

式中

$$\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_i^2}{c^2}}}\,. \qquad ⑬$$

[解法（二）

由动量守恒有

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3=0 \qquad ⑪$$

由能量守恒有

$$E_{k,1}+E_{k,2}+E_{k,3}=Q \qquad ⑫$$

以及

$$E_{k,i}=\sqrt{p_i^2c^2+m_\pi^2c^4}-m_\pi c^2 \qquad ⑬$$

]

可得

$$p_i=\frac{Q}{c}\sqrt{d_i^2+2d_iK}\,,$$

其中 $K=m_\pi c^2/Q$，$d_i=K(\gamma_i-1)$，于是 3 个π介子的动量大小 p_1、p_2、p_3 满足 $p_i+p_j>p_k$，$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$。

d_1、d_2、d_3 可能的分布范围为：

$$\begin{aligned}&\sqrt{d_1^2+2d_1K}\le\sqrt{d_2^2+2d_2K}+\sqrt{d_3^2+2d_3K}\\&\sqrt{d_2^2+2d_2K}\le\sqrt{d_1^2+2d_1K}+\sqrt{d_3^2+2d_3K}\\&\sqrt{d_3^2+2d_3K}\le\sqrt{d_1^2+2d_1K}+\sqrt{d_2^2+2d_2K}\end{aligned} \qquad ⑭$$

在题给坐标系中有

$$d_1=y,\ \ d_2=-(\sqrt{3}x+y-1)/2,\ \ d_3=(\sqrt{3}x-y+1)/2 \qquad ⑮$$

将⑮式代入⑭式得

$$2(3K+1)y^3-6(3K+1)x^2y+(12K^2-1)y^2+3(2K+1)^2x^2-2(4K+1)Ky\le 0\,. \qquad ⑯$$

若 $m_\pi=0$，则 $K=0$，于是

$$(y-1/2)(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x)\le 0 \qquad ⑰$$

表示三条边的中点连接成的三角形区域。

七、（1）假设整个敞器是实心时，它分为长圆柱部分（I）和半球部分（II）。在坐标系 *XOZ* 中，圆柱部分（I）质心的位置为

$$x_{\mathrm{CI}}=0,\qquad z_{\mathrm{CI}}=\frac{l}{2}=R$$

半球部分（II）质心的位置为

$$x_{\mathrm{CII}}=0,\ z_{\mathrm{CII}}=\frac{\int_{-R_2}^{0}\rho_1\pi(R_2{}^2-z^2)z\mathrm{d}z}{\int_{-R_2}^{0}\rho_1\pi(R_2{}^2-z^2)\mathrm{d}z}=-\frac{3}{8}R_2=-\frac{3\sqrt{3}}{8}R=-0.6495R \qquad ①$$

设整个实心体的质心坐标为$(x_{\mathrm{C实}}=0,z_{\mathrm{C实}})$，则

$$(\rho\pi R_2^2l+\rho\frac{2}{3}\pi R_2^3)z_{\mathrm{C实}}=\rho\pi R_2^2lz_{\mathrm{CI}}+\rho\frac{2}{3}\pi R_2^3z_{\mathrm{CII}}=\rho\pi R_2^2l\frac{l}{2}-\rho\frac{2}{3}\pi R_2^3\frac{3R_2}{8}$$

于是

$$x_{\mathrm{C实}}=0,\ z_{\mathrm{C实}}=\frac{3(2l^2-R_2^2)}{4(3l+2R_2)}=\frac{5(3-\sqrt{3})}{16}R=0.3962R \qquad ②$$

相应地，整个欹器空心部分的质心坐标为

$$x_{\mathrm{C空}}=t=0.3R,\ z_{\mathrm{C空}}=\frac{3(2l^2-R_1^2)}{4(3l+2R_1)}=\frac{21}{32}R=0.6563R \qquad ③$$

设$m_{实}$和$m_{空}$分别是整个欹器是实心时欹器的质量和整个欹器空心部分用欹器材质刚好填实时的质量，有

$$m_{实}=\rho_1\pi R_2^2(\frac{2R_2}{3}+l),\ m_{空}=\rho_1\pi R_1^2(\frac{2R_1}{3}+l)$$

整个瓶子的质心坐标为

$$x_{\mathrm{C}}=\frac{m_{实}x_{\mathrm{C实}}+(-m_{空})x_{\mathrm{C空}}}{m_{实}+(-m_{空})}=-\frac{R_1^2t(3l+2R_1)}{3l(R_2^2-R_1^2)+2(R_2^3-R_1^3)}=\frac{3(5-3\sqrt{3})}{5}R=-0.1177R \qquad ④$$

$$z_{\mathrm{C}}=\frac{m_{实}z_{\mathrm{C实}}+(-m_{空})z_{\mathrm{C空}}}{m_{实}+(-m_{空})}=\frac{3(R_2+R_1)(2l^2-R_2^2-R_1^2)}{4[3l(R_2+R_1)+2(R_2^2+R_2R_1+R_1^2)]}=\frac{3}{2}(3\sqrt{3}-5)R=0.2942R \qquad ⑤$$

悬挂点Q的位置为$(-\frac{1}{10}R,\frac{2\sqrt{3}}{11}R)$，欹器内没装水悬挂时欹器倾斜的角度为

$$\theta_0=\operatorname{arccot}\frac{z_{\mathrm{C}}-z_Q}{x_{\mathrm{C}}-x_Q}=\operatorname{arccot}\frac{25(5\sqrt{3}-3)}{121}=0.707439\times\frac{180^\circ}{\pi}=40.5333^\circ \qquad ⑥$$

（2）由球绕直径的转动惯量知，半球绕其底面圆直径的转动惯量为

$$I_{11}=\frac{1}{2}I_1=\frac{4}{15}\pi\rho R^5$$

由平行轴定理知，半球绕穿过其质心且平行其底面的转轴的转动惯量为

$$I_{1c}=I_{11}-\frac{2}{3}\pi\rho R^3(\frac{3}{8}R)^2=\frac{83}{480}\pi\rho R^5=0.1729\pi\rho R^5 \qquad ⑦$$

实心敫器绕过悬挂点的水平轴的转动惯量

$$\begin{aligned}I_{实}&=I_{1c}(R=R_2)+\frac{2}{3}\rho_1\pi R_2^3[x_Q^2+(-\frac{3}{8}R_2-z_Q)^2]\\&\quad+I_2(R=R_2,L=l)+\rho_1\pi R_2^2 l[x_Q^2+(\frac{l}{2}-z_Q)^2]\\&=\frac{79588+7591\sqrt{3}}{6050}\rho_1\pi R^5=15.3283\rho_1\pi R^5\end{aligned} \qquad ⑧$$

（填实后的）空心部分绕过悬挂点的水平轴的的转动惯量

$$\begin{aligned}I_{空}&=I_{1c}(R=R_1)+\frac{2}{3}\rho_1\pi R_1^3[(x_Q+t)^2+(-\frac{3}{8}R_1-z_Q)^2]\\&\quad+I_2(R=R_1,L=l)+\rho_1\pi R_1^2 l[(x_Q+t)^2+(\frac{l}{2}-z_Q)^2]\\&=\frac{(24953-3850\sqrt{3})}{6050}\rho_1\pi R^5=3.0223\rho_1\pi R^5\end{aligned} \qquad ⑨$$

敫器绕过悬挂点的水平轴的转动惯量

$$I=I_{实}-I_{空}=\frac{(54635+11441\sqrt{3})}{6050}\rho_1\pi R^5=12.306\rho_1\pi R^5 \qquad ⑩$$

质心C到过悬挂点Q的水平轴的距离为

$$\begin{aligned}d&=\sqrt{(x_C-x_Q)^2+(z_C-z_Q)^2}\\&=\sqrt{(-\frac{R_1^2t(3l+2R_1)}{3l(R_2^2-R_1^2)+2(R_2^3-R_1^3)}-x_Q)^2+(\frac{3(R_2+R_1)(2l^2-R_2^2-R_1^2)}{4[3l(R_2+R_1)+2(R_2^2+R_2R_1+R_1^2)]}-z_Q)^2}\\&=\frac{(3\sqrt{3}-5)\sqrt{2}}{220}\sqrt{30848-17541\sqrt{3}}R=0.02722R\end{aligned}$$

敫器的质量为

$$m_{敫}=m_{实}-m_{空}=\rho_1\pi[R_2^2(\frac{2R_2}{3}+l)-R_1^2(\frac{2R_1}{3}+l)]=\frac{2}{3}(5+3\sqrt{3})\rho_1\pi R^3$$

敫器绕悬挂点连线摆动的角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{m_{敫}gd}{I}}=\sqrt{\frac{110\sqrt{2(30848-17541\sqrt{3})}}{163905+34323\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{g}{R}}=0.122624\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad ⑪$$

（3）设敫器正立时里面装的水的质量为m_S。此时水、敫器以及整个体系质心的横坐标x_{CS}、x_C和x_{Ct}分别为

$$x_{CS}=t \qquad ⑫$$

$$x_C=\frac{3(5-3\sqrt{3})}{5}R=-0.1177R$$

$$x_{Ct} = x_Q \tag{13}$$

故

$$x_{Ct}(m_S + m_{敬}) = m_S x_{CS} + m_{敬} x_C \tag{14}$$

解得

$$m_S = \frac{m_{敬}(x_C - x_{Ct})}{x_{Ct} - x_{CS}} = \frac{m_{敬}(x_C - x_Q)}{x_Q - t} = 0.3006\rho_1\pi R^3 = 0.9018\rho_2\pi R^3 \tag{15}$$

由于

$$m_S = 0.9018\rho_2\pi R^3 > \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 \tag{16}$$

故水的体积大于底部半球的容器，即 $h > R$ 。因而有

$$m_S = \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 + \rho_2\pi R^2(h - R) = 0.9018\rho_2\pi R^3 \tag{17}$$

解得

$$h = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6} R = 1.23526R \tag{18}$$

此时整个体系质心的 z 坐标为

$$\begin{aligned} z_{Ct} &= \frac{m_{敬} z_C + m_S z_{Cs}}{m_{敬} + m_S} = \frac{3\{[\rho_1(R_2^2 - R_1^{\,2})(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2 R_1^{\,2}(2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)]\}}{4\{\rho_1[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)] + \rho_2 R_1^2(3h - R_1)\}} \\ &= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]} = 0.271326\,R < z_Q \end{aligned} \tag{19}$$

故 $h = 1.23526R$ 时敬器正立。

[（解法二）

若 $h \le R_1$ 时敬器正立， $h \le R_1$ 时，水的质心位置为

$$\begin{cases} x_{CS_1} = t = 0.3R, \\ z_{CS_1} = \dfrac{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^{\,2} - z^2) z dz}{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^{\,2} - z^2) dz} = -\dfrac{3(2R\ - h)^2}{4(3R\ - h)} \end{cases} \tag{12}$$

敬器的质量 m 和此时敬器中水的质量 m_S 分别为

$$\begin{aligned} m &= \rho_1[(\frac{2}{3}\pi R_2^3 + \pi R_2^2 l) - (\frac{2}{3}\pi R_1^3 + \pi R_1^2 l)] = \frac{1}{3}\rho_1\pi[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)] \\ &= \frac{1}{3}\rho_1\pi(R_2 - R_1)[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2)] \end{aligned}$$

$$m_{S_1} = \int_{-R}^{-(R\ -h)} \rho_2\pi(R^{\,2} - z^2) dz = \frac{\rho_2\pi h^2(3R\ - h)}{3}$$

整个装置的质心 C_t 的位置坐标为

$$x_{Ct1}=\frac{mx_C+m_S x_{CS}}{m+m_S}=\frac{[\rho_1 R_1^{\ 2}(3l+2R_1)+\rho_2 h^2(h-3R_1)]t}{\rho_1[3l(R_1^{\ 2}-R_2^2)+2(R_1^{\ 3}-R_2^3)]+\rho_2 h^2(h-3R_1)}$$
$$=\frac{3R(24R^3-3h^2R+h^3)}{10[(h-3R)h^2-6(5+3\sqrt{3})R^3]} \quad ⑬$$

敬器身正立时，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{Ct}=x_Q=-0.1h\ , \quad ⑭$$

解得

$$h=-0.8394R,\quad h=1.2389R,\ h=2.5996R \quad ⑮$$

均不满足 $0<h<R$ 。故此时无解。因此敬器竖直时，必有

$$h>R_1$$

当 $h>R_1$ 时，与③④式对比（③④式中可视为 $l=h-R_1$ ），得水的质心位置为

$$x_{CS}=t=0.3R,$$
$$z_{CS}=\frac{\int_{-R_1}^{0}\rho_2\pi(R_1^{\ 2}-z^2)zdz+\int_0^{h-R_1}\rho_2\pi R_1^{\ 2}zdz}{\int_{-R_1}^{0}\rho_2\pi(R_1^{\ 2}-z^2)dz+\int_0^{h-R_1}\rho_2\pi R_1^{\ 2}dz}=\frac{3(2h^2-4hR+R^2)}{4(3h-R)} \quad ⑯$$

此时敬器中水的质量 m_{S2} 为

$$m_{S_2}=\rho_1\pi R_1^2(h-\frac{R_1}{3})$$

整个装置的质心位置为

$$x_{Ct2}=\frac{mx_C+m_{S_2}x_{CS_2}}{m+m_{S_2}}=\frac{R_1^2[\rho_1(3l+2R_1)+\rho_2(R_1-3h)]t}{\rho_1[3l(R_1^2-R_2^2)+2(R_1^3-R_2^3)]+\rho_2R_1^2(R_1-3h)}$$
$$=\frac{3(3h-25R)R}{10[3h+(29+18\sqrt{3})R]} \quad ⑰$$

$$z_{Ct2}=\frac{mz_C+m_{S2}z_{Cs}}{m+m_{S2}}=\frac{3\{[\rho_1(R_2^2-R_1^{\ 2})(2l^2-R_1^2-R_2^2)+\rho_2R_1^{\ 2}(2h^2-4hR_1+R_1^2)]\}}{4\{\rho_1[3l(R_2^2-R_1^2)+2(R_1^3-R_1^3)]+\rho_2R_1^2(3h-R_1)\}}$$
$$=\frac{3(2h^2-4hR+25R^2)}{4[3h+(29+18\sqrt{3})R]} \quad ⑱$$

敬器身正立，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{Ct2}=x_Q=-0.1h$$

且

$$z_{Ct2}<z_Q=\frac{2\sqrt{3}}{11}h$$

当$h > R_1$时， 由⑱式有

$$h = \frac{1}{3}\left[R_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(3l + 2R_1 - \frac{x_Q R_2^2 (3l + 2R_2)}{R_1^2 (t - x_Q)} \right) \right] = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6} R = 1.23526R \qquad ⑲$$

而由 $z_{Ct2} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11} h$ 得

$$0 < h < 2.67979R \qquad 或 \qquad h < -20.059R$$

故$h = 1.23526R$时欹器正立。

]

（4）欹器“满则覆”的临界条件是：系统质心刚好高于悬挂点；或

$$x_{CH} = -x_Q,\ z_{CH} = z_Q \qquad ⑳$$