第 36 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题与解答

2019 年 9 月 21 日

一、如图 a，旅行车上有一个半径为 R 的三脚圆凳(可视为刚性结构)，三个相同凳脚的端点连线（均水平）构成边长为 a 的等边三角形，凳子质心位于其轴上的 G 点．半径为 r 的一圆筒形薄壁茶杯放在凳面上，杯底中心位于凳面中心 O 点处，茶杯质量为 m（远小于凳子质量），其中杯底质量为 $\frac{m}{5}$（杯壁和杯底各自的质量分布都是均匀的），杯高为 H（与杯高相比，杯底厚度可忽略）．杯中盛有茶水，茶水密度为 ρ．重力加速度大小为 g．

1）为了使茶水杯所盛茶水尽可能多并保持足够稳定，杯中茶水的最佳高度是多少？

2）现该茶水杯（杯中茶水高度最佳）的底面边缘刚好缓慢滑移到与圆凳的边缘内切于 D 点时静止（凳面边有小凸缘，可防止物体滑出；凳面和凳面边的凸缘各自的质量分布都是均匀的），且 OD⊥AC（见图 b），求此时旅行车内底板对各凳脚的支持力相对于滑移前（该茶水杯位于凳面中心处）的改变．

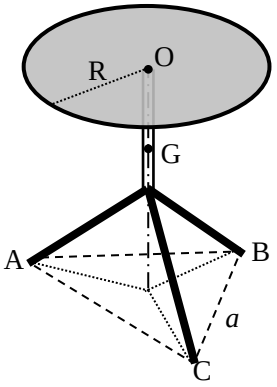


图 a

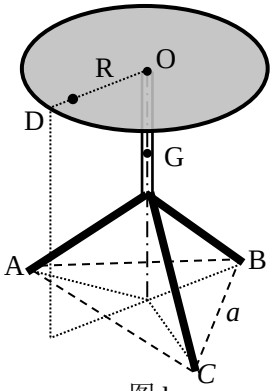


图 b

参考解答：

1）以凳面中心 O 为坐标原点，以过 O 点向上的竖直线为 y 轴．茶杯（包括茶水在内）的质心位置 y_{CM} 为

$$y_{\mathrm{CM}}=\frac{\frac{4m}{5}\frac{H}{2}+\rho(\pi r^2h)\frac{h}{2}}{m+\rho(\pi r^2h)} \tag{1}$$

式中 h 是杯中茶水的高度．令 $\lambda=\rho\pi r^2$，(1)式即

$$y_{\mathrm{CM}}=\frac{\frac{4m}{5}\frac{H}{2}+\lambda\frac{h^2}{2}}{m+\lambda h}$$

事实上，考虑在茶杯中茶水的水平面从杯底逐渐缓慢上升的过程，茶水杯整体的质心先是逐渐降低，然后再逐渐上升．为了使茶水杯盛尽可能多的茶水并保持足够稳定，茶水杯整体的质心应尽可能接近凳面，处于最低点的位置 $y_{\mathrm{CM}}(h=h_{\max})=(y_{\mathrm{CM}})_{\min}$，故有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}h}\right|_{h=h_{\max}}=0 \tag{2}$$

由(1)(2)式得

$$h_{\max}=\frac{m}{\lambda}\left[-1\pm\sqrt{1+\frac{4}{5}\frac{H\lambda}{m}}\right] \tag{3}$$

舍弃负值（不合题意），杯中茶水的最佳高度为

$$h_{\max}=\frac{m}{\lambda}\left(\sqrt{1+\frac{4}{5}\frac{\lambda H}{m}}-1\right)$$
$$=\frac{m}{\rho\pi r^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\pi}{5}\frac{\rho r^2 H}{m}}-1\right) \qquad (4)$$

[另一解法：

事实上，考虑在茶杯中的茶水的水平面从杯底逐渐缓慢上升的过程，茶水杯整体的质心先是逐渐降低，然后再逐渐上升. 为了使茶水杯盛尽可能多的茶水并保持足够稳定，茶水杯整体的质心应尽可能接近凳面，处于最低点的位置 $y_{\mathrm{CM}}(h=h_{\max})=(y_{\mathrm{CM}})_{\min}$. (1)式即

$$y_{\mathrm{CM}}=\frac{\frac{2mH}{5}+\frac{m^2}{2\lambda}}{m+\lambda h}+\frac{m+\lambda h}{2\lambda}-\frac{m}{\lambda}$$

它满足代数不等式

$$y_{\mathrm{CM}}\geq 2\sqrt{\frac{\frac{2mH}{5}+\frac{m^2}{2\lambda}}{m+\lambda h}\frac{m+\lambda h}{2\lambda}}-\frac{m}{\lambda}=2\sqrt{\frac{\frac{2mH}{5}+\frac{m^2}{2\lambda}}{2\lambda}}-\frac{m}{\lambda}=(y_{\mathrm{CM}})_{\min} \qquad (2)$$

式中当 h 满足

$$\frac{m+\lambda h}{2\lambda}=\frac{\frac{2mH}{5}+\frac{m^2}{2\lambda}}{m+\lambda h} \qquad (3)$$

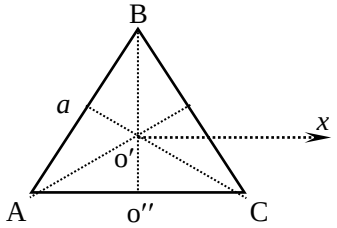
即

$$h=h_{\max}=\frac{m}{\lambda}\left(\sqrt{1+\frac{4}{5}\frac{\lambda H}{m}}-1\right)$$
$$=\frac{m}{\rho\pi r^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\pi}{5}\frac{\rho r^2 H}{m}}-1\right) \qquad (4)$$

时取等号，$h_{\max}$ 即杯中茶水的最佳高度.

]

2）记凳子质量为 M. 该茶水杯的底面边缘刚好滑移到与圆凳的边缘内切于 D 点静止后，坐标系及三脚圆凳的受力分析分别如解题图 a 和解题图 b 所示，其中 N_{A}、N_{B} 和 N_{C} 分别是车内底板对凳脚 A、B 和 C 的支持力. 由几何关系有



解题图 a

$$\overline{\mathrm{o'A}}=\overline{\mathrm{o'B}}=\frac{a/2}{\cos 30^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}} \qquad (5)$$

$$\overline{\mathrm{o'o''}}=\frac{a}{2}\tan 30^\circ=\frac{a}{2\sqrt{3}} \qquad (6)$$

三脚圆凳处于力平衡状态，竖直方向合力为零

$$N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}}+N_{\mathrm{C}}-Q-P=0 \qquad (7)$$

$$N_{\mathrm{A}}=N_{\mathrm{C}} \qquad (8)$$

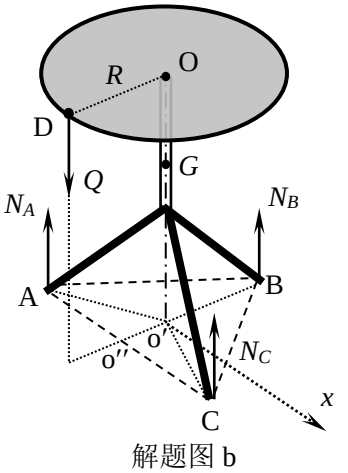
式中，$Q=mg+\lambda h_{\max}g$，$P=Mg$. 由(7) (8)式得

$$2N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}}-Q-P=0$$

以 x 轴为转动轴，力矩平衡

$$Q(R-r)+N_{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{o'B}}-(N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{C}})\overline{\mathrm{o'o''}}=0 \qquad (9)$$

记 $R'=R-r$，由(5)(6)(9)式有



解题图 b

$$QR' + N_{\mathrm{B}}\frac{a}{\sqrt{3}} - 2N_{\mathrm{A}}\frac{a}{2\sqrt{3}} = 0$$

[另一解法：

以 AC 为转动轴，由力矩平衡条件有

$$Q(R' - \overline{\mathrm{o'o''}}) + N_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{o'B}} + \overline{\mathrm{o'o''}}) - P\overline{\mathrm{o'o''}} = 0 \qquad (9)$$

即

$$Q(R' - \frac{a}{2\sqrt{3}}) + N_{\mathrm{B}}(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}}) - P\frac{a}{2\sqrt{3}} = 0$$

]

联立以上各式得

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{B}} &= \frac{(a - 2\sqrt{3}R')Q + aP}{3a} \\ &= \left[\left(1 - 2\sqrt{3}\frac{R-r}{a}\right)\sqrt{1 + \frac{4\pi}{5}\frac{\rho r^2 H}{m}}m + M\right]\frac{g}{3} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{A}} = N_{\mathrm{C}} &= \frac{(a + \sqrt{3}R')Q + aP}{3a} \\ &= \left[\left(1 + \sqrt{3}\frac{R-r}{a}\right)\sqrt{1 + \frac{4\pi}{5}\frac{\rho r^2 H}{m}}m + M\right]\frac{g}{3} \end{aligned} \qquad (11)$$

值得指出的是，解(10)满足 $N_{\mathrm{B}} > 0$，即

$$M > \frac{2\sqrt{3}(R-r) - a}{a}\sqrt{1 + \frac{4\pi}{5}\frac{\rho r^2 H}{m}}m \qquad (12)$$

这已由题给条件保证了.

由(7)(10)(11)式得，此时旅行车内底板对各凳脚的支持力相对于茶水杯滑移前的改变为

$$\begin{aligned} \Delta N_{\mathrm{B}} &= \frac{(a - 2\sqrt{3}R')Q + aP}{3a} - \frac{P+Q}{3} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{R-r}{a}\sqrt{1 + \frac{4\pi}{5}\frac{\rho r^2 H}{m}}mg \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta N_{\mathrm{A}} = \Delta N_{\mathrm{C}} &= \frac{(a + \sqrt{3}R')Q + aP}{3a} - \frac{P+Q}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{R-r}{a}\sqrt{1 + \frac{4\pi}{5}\frac{\rho r^2 H}{m}}mg \end{aligned} \qquad (14)$$

二、农用平板车的简化模型如图 a 所示，两车轮的半径均为 r（忽略内外半径差），质量均为 m（车轮辐条的质量可忽略），两轮可绕过其中心的光滑细车轴转动（轴的质量可忽略）；车平板长为 l、质量为 $2m$，平板的质心恰好位于车轮的轴上；两车把手（可视为细直杆）的长均为 $2l$、质量均为 m，且把手前端与平板对齐．平板、把手和车轴固连成一个整体，车轮、平板和把手各自的质量分布都是均匀的．重力加速度大小为 g．

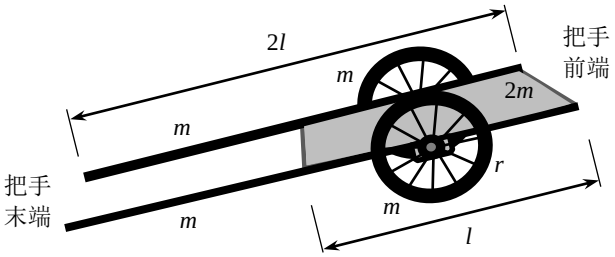


图 a. 农用平板车的简化模型

1）该平板车的车轮被一装置（图中未画出）卡住而不能前后移动，但仍可绕车轴转动．将把手提至水平位置由静止开始释放，求把手在与水平地面碰撞前的瞬间的转动角速度．

2）在把手与水平地面碰撞前的瞬间立即撤去卡住两车轮的装置，同时将车轮和轴锁死，在碰后的瞬间立即解锁，假设碰撞时间较短（但不为零），碰后把手末端在竖直方向不反弹．已知把手与地面、车轮与地面之间的滑动摩擦系数均为μ（最大静摩擦力等于滑动摩擦力）．求在车轮从开始运动直至静止的过程中，车轴移动的距离．

参考解答：

1）车轮被一装置卡住而不能前后移动，但仍可绕轮轴转动．把手绕车轴的转动惯量为

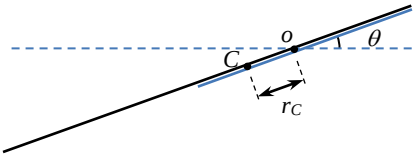
$$J_1 = 2[\frac{1}{12}m(2l)^2 + m(\frac{1}{2}l)^2] = 2(\frac{4}{12}m^2 + \frac{1}{4}ml^2) = \frac{7}{6}ml^2$$

平板绕车轴的转动惯量为

$$J_2 = \frac{1}{12}2ml^2 = \frac{1}{6}ml^2$$

平板与把手整体绕车轴的转动惯量为

$$J = J_1 + J_2 = \frac{7}{6}ml^2 + \frac{1}{6}ml^2 = \frac{4}{3}ml^2 \qquad (1)$$



解题图 a

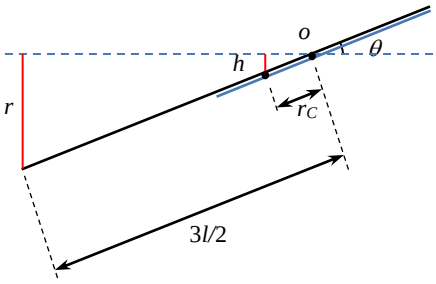
把手和平板整体的质心位置到车轴的距离 r_C（见解题图 a）为

$$r_C = \frac{2m\frac{l}{2}}{4m} = \frac{l}{4} \qquad (2)$$

设把手与地面碰撞前的瞬间的角速度为ω，由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = 4mgh \qquad (3)$$

式中 h 是把手和平板整体的质心下降的距离（见解题图 b）



解题图 b

$$\frac{h}{r_C} = \frac{r}{3l/2}$$

将(2)式代入上式得

$$h = \frac{2r}{3l}\frac{l}{4} = \frac{r}{6}$$

由上式和(1)(3)式得

$$\omega = \frac{\sqrt{gr}}{l} \qquad (4)$$

2）在把手与地面碰撞前的瞬间，把手和平板整体的质心的速度大小为

$$v_{C1} = \omega r_C = \frac{\sqrt{gr}}{l}\frac{l}{4} = \frac{\sqrt{gr}}{4}$$

由几何关系有

$$\sin\theta=\frac{2r}{3l},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{9l^2-4r^2}}{3l}$$

碰前瞬间把手和平板质心速度的水平与竖直分量（从把手末端朝向把手前端为正）分别为

$$v_{C1x}=v_{C1}\sin\theta \tag{5}$$

$$v_{C1y}=-v_{C1}\cos\theta \tag{6}$$

记碰撞时间间隔为 Δt，由题设，把手、平板与车轮组成的系统在碰撞过程中可视为一个物体. 刚碰时，由于把手末端与地面之间有相对速度，把手末端与地面之间在碰撞过程中水平方向的相互作用力是滑动摩擦力. 设碰撞过程中地面对系统在竖直方向上总的支持力为 N'，在碰撞后的瞬间系统的水平速度为 v_0（$v_0\geq 0$）. 在水平和竖直方向上分别对此系统应用动量定理有

$$\int_0^{\Delta t}(-\mu N')\,\mathrm{d}t=6mv_0-4mv_{C1x} \tag{7}$$

$$\int_0^{\Delta t}N'\mathrm{d}t=0-(-4mv_{C1y}) \tag{8}$$

值得注意的是，(8)式左端的冲量不可能等于零，因而(7)式左端的冲量也不可能等于零. 由(7)(8)式得

$$6mv_0=4mv_{C1x}-\mu 4mv_{C1y}=4mv_{C1}\sin\theta-\mu 4mv_{C1}\cos\theta$$

由此解得

$$v_0=\frac{2}{3}(\sin\theta-\mu\cos\theta)v_{C1}=(\sin\theta-\mu\cos\theta)\frac{\sqrt{gr}}{6}$$

当

$$\mu\geq\tan\theta=\frac{2r}{\sqrt{9l^2-4r^2}}$$

系统静止，故

$$s=0 \tag{9}$$

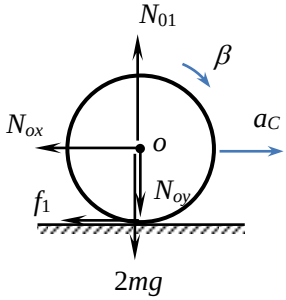
当

$$\mu<\tan\theta=\frac{2r}{\sqrt{9l^2-4r^2}}$$

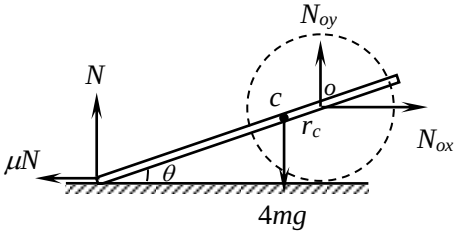
系统开始运动. 下面分两阶段讨论系统开始运动后直至停止的过程：

阶段 I. 车轮又滑又滚阶段

两车轮的受力如解题图 c 所示，图中 N_{01} 是地面对两车轮的正压力，N_{ox} 和 N_{oy} 是把手和平板通过轴对两车轮分别在水平方向和竖直方向的作用力，地面对车轮的滑动摩擦力 $f_1=\mu N_{01}$. 把手和平板作为一个整体的受力解题图 d 所示，图中 N 是地面对把手末端的正压力.



解题图 c



解题图 d

地面与车之间的总滑动摩擦力为

$$f=-\mu(N+N_{01})=-\mu(6mg) \tag{10}$$

把手、平板和车轮组成的系统的质心加速度 a_C 为

$$a_C=\frac{f}{6m}=-\mu g \tag{11}$$

对把手和平板系统应用质心运动定理有

$$N_{ox}-\mu N=4ma_C \tag{12}$$

$$N+N_{oy}-4mg=0 \tag{13}$$

对把手和平板系统应用相对于过质心的水平轴的转动定理有

$$\mu N\frac{5l}{4}\sin\theta+N\frac{5l}{4}\cos\theta+N_{ox}\frac{l}{4}\sin\theta-N_{oy}\frac{l}{4}\cos\theta=0 \qquad (14)$$

由(11) (12) (13)式得

$$N_{ox}=\mu N+4m(-\mu g)=\mu N-4\mu mg$$

$$N_{oy}=4mg-N$$

将以上两式代入(14)式得

$$\mu N\frac{5l}{4}\sin\theta+N\frac{5l}{4}\cos\theta+(\mu N-4\mu mg)\frac{l}{4}\sin\theta-(4mg-N)\frac{l}{4}\cos\theta=0$$

于是

$$N=\frac{2}{3}mg$$

因而

$$N_{ox}=\mu\frac{2}{3}mg-4\mu mg=-\frac{10}{3}\mu mg$$

$$N_{oy}=4mg-\frac{2}{3}mg=\frac{10}{3}mg$$

对两车轮在竖直方向上应用质心运动定理有

$$N_0-2mg-N_{oy}=0 \qquad (15)$$

对两车轮应运用转动定理有

$$\mu N_0 r=2mr^2\beta \qquad (16)$$

由(15)式得

$$N_0=2mg+N_{oy}=2mg+\frac{10}{3}mg=\frac{16}{3}mg$$

再由(16)式得

$$\beta=\frac{\mu N_0 r}{2mr^2}=\frac{\mu}{2mr}\frac{16}{3}mg=\frac{8\mu g}{3r}$$

设车轮经历时间间隔t后开始纯滚动，由纯滚动条件有

$$\omega r=\beta tr=v=v_0+a_C t \qquad (17)$$

此即

$$(\beta r-a_C)t=v_0$$

由此得

$$t=\frac{v_0}{(\beta r-a_C)}=\frac{(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{22\mu}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

车轮开始做纯滚动时的速度为

$$v_1=v_0+a_C t=\frac{4\sqrt{gr}}{33}(\sin\theta-\mu\cos\theta) \qquad (18)$$

在整个又滑又滚阶段，车轴移动的距离s_1为

$$v_1^2-v_0^2=2a_C s_1$$

于是有

$$s_1=\frac{v_1^2-v_0^2}{2a_C}=\frac{57r}{78408\mu l^2}(2r-\mu\sqrt{9l^2-4r^2})^2 \qquad (19)$$

阶段 II. 车轮纯滚动阶段

两车轮的受力如解题图 e 所示，图中N_{02}是地面对两车轮的正压力，N_{ox2}和N_{oy2}分别是把手和平板通过轴对两车轮在水平方向和竖直方向的作用力，f_2是地面对车轮的作用力

（静摩擦力）。把手和平板作为一个整体的受力解题图 f 所示，图中 N_2 是地面对把手末端的正压力.

对两车轮运用质心运动定理有

$$f_2 - N_{ox2} = 2ma_{C2} \qquad (20)$$

对两车轮运用转动定理有

$$-f_2 r = 2mr^2\beta_2 \qquad (21)$$

由纯滚动条件有

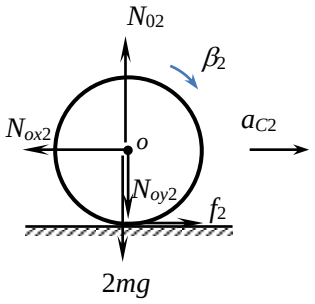
$$a_{C2} = \beta_2 r \qquad (22)$$

由(20)(21)(22)式得

$$N_{ox2} = -4ma_{C2}$$

对把手和平板系统在水平方向上应用质心运动定理有

$$N_{ox2} - \mu N_2 = 4ma_{C2}$$



解题图 e

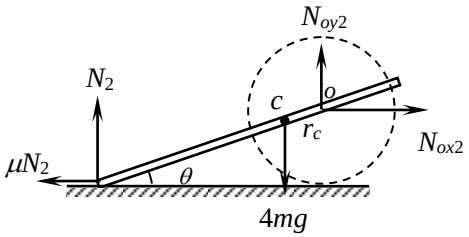
联立以上两式有

$$a_{C2} = -\frac{\mu N_2}{8m}$$

$$N_{ox2} = \frac{\mu N_2}{2}$$

对把手和平板系统在竖直方向上应用质心运动定理有

$$N_{oy2} = 4mg - N_2$$



解题图 f

对把手和平板系统应用相对于过质心 C 的水平轴的转动定理有

$$\mu N_2 \frac{5l}{4}\sin\theta + N_2 \frac{5l}{4}\cos\theta + N_{ox2}\frac{l}{4}\sin\theta - N_{oy2}\frac{l}{4}\cos\theta = 0$$

联立以上三式消去 N_{ox2} 和 N_{oy2} 得

$$\mu N_2 \frac{5l}{4}\sin\theta + N_2 \frac{5l}{4}\cos\theta + \frac{\mu N_2}{2}\frac{l}{4}\sin\theta - (4mg - N_2)\frac{l}{4}\cos\theta = 0$$

解得

$$N_2 = \frac{8mg}{11\mu\tan\theta + 12}$$

于是

$$N_{ox2} = \frac{4\mu mg}{11\mu\tan\theta + 12}$$

$$N_{oy2} = \frac{4(11\mu\tan\theta + 10)mg}{11\mu\tan\theta + 12}$$

$$a_{C2} = -\frac{\mu N_2}{8m} = -\frac{\mu g}{11\mu\tan\theta + 12} \qquad (23)$$

在整个纯滚动阶段，车轴移动的距离 s_2 满足

$$0 - v_1^2 = 2a_{C2}s_2$$

于是

$$s_2 = \frac{-v_1^2}{2a_{C2}} = \frac{16r}{9801\mu l^3}(2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2})^2 \frac{11\mu r + 6\sqrt{9l^2 - 4r^2}}{\sqrt{9l^2 - 4r^2}} \qquad (24)$$

在车轮从开始运动直至静止的整个过程中，车轴移动的距离为

$$s = s_1 + s_2 = \left[\frac{57}{78408} + \frac{16(11\mu r + 6\sqrt{9l^2 - 4r^2})}{9801\sqrt{9l^2 - 4r^2}} \right] \frac{(2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2})^2 r}{\mu l^2} \qquad (25)$$

三、某电磁轨道炮的简化模型如图 a 所示，两圆柱形固定导轨相互平行，其对称轴所在平面与水平面的夹角为θ，两导轨的长均为 L、半径均为 b、每单位长度的电阻均为λ，两导轨之间的最近距离为 d（d 很小）．一质量为 m（m 较小）的金属弹丸（可视为薄片）置于两导轨之间，弹丸直径为 d、电阻为 R，与导轨保持良好接触．两导轨下端横截面共面，下端（通过两根与相应导轨同轴的、较长的硬导线）与一电流为 I 的理想恒流源（恒流源内部的能量损耗可不计）相连．不考虑空气阻力和摩擦阻力，重力加速度大小为 g，真空磁导率为 μ_0．考虑一弹丸自导轨下端从静止开始被磁场加速直至射出的过程．

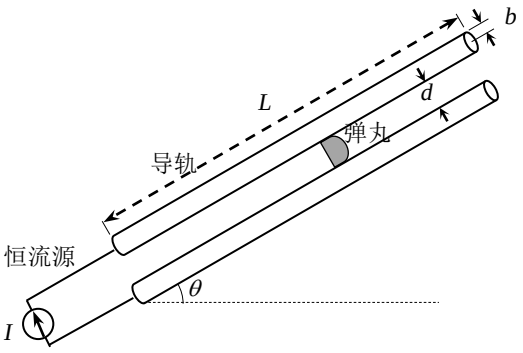


图 a. 某电磁轨道炮的简化模型

1）求弹丸在加速过程中所受到的磁场作用力；
2）求弹丸的出射速度；
3）求在弹丸加速过程中任意时刻、以及弹丸出射时刻理想恒流源两端的电压；
4）求在弹丸的整个加速过程中理想恒流源所做的功；
5）在$\theta = 0°$的条件下，若导轨和弹丸的电阻均可忽略，求弹丸出射时的动能与理想恒流源所做的功之比．

参考解答：

1）由于弹丸直径 d 很小，每根载流导轨均可视为半无限长载流直导线，弹丸上离某导轨轴线距离为 r' 处的磁场的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r'} + \frac{\mu_0 I}{4\pi(d + 2b - r')} \tag{1}$$

方向垂直于两导轨对称轴所在平面斜向下。弹丸长为 $\mathrm{d}r'$ 的一段所受到的磁场作用力（安培力）为

$$\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}r' \tag{2}$$

方向平行于导轨轴线斜向上．弹丸所受到的安培力大小为

$$\begin{aligned} F &= \int \mathrm{d}F = \int_b^{b+d} \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi r'} + \frac{\mu_0 I}{4\pi(d + 2b - r')} \right] I\mathrm{d}r' \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b+d}{b} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{(d + 2b - b)}{(d + 2b - b - d)} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{b+d}{b} \end{aligned} \tag{3}$$

方向平行于导轨轴线斜向上．

2）设弹丸的加速度大小为 a．由牛顿第二定律有

$$F - mg\sin\theta = ma \tag{4}$$

由(3)(4)式得，弹丸的加速度大小为

$$a = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi m} \ln \frac{d+b}{b} - g\sin\theta \tag{5}$$

方向平行于导轨轴线斜向上．

弹丸作匀加速直线运动，弹丸的出射速度 $v_{\max}$ 满足

$$v_{\max}^2 - v_0^2 = 2aL \tag{6}$$

由(5)(6)式得

$$v_{\max}=\sqrt{2L\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)} \tag{7}$$

方向平行于导轨轴线斜向上.

3）两导轨之间离某导轨轴线距离为 r 处（不一定是弹丸上一点）的磁场为

$$B_r=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+2b-r)} \tag{8}$$

通过两导轨各自从下端开始长为 l 的一段以及弹丸长为 $\mathrm{d}r$ 的一段组成平面回路的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi=B_r l\mathrm{d}r=\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+2b-r)}\right)l\mathrm{d}r \tag{9}$$

通过两导轨各自从下端开始长为 l 的一段以及弹丸组成平面回路的磁通量为

$$\Phi=\int_b^{b+d}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+2b-r)}\right)l\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{b+d}{b} \tag{10}$$

根据法拉第电磁感应定律，回路中的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 Iv}{\pi}\ln\frac{d+b}{b} \tag{11}$$

式中 $v=\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ 是弹丸沿导轨的运动速度. 由全电路欧姆定律得

$$U+\varepsilon=2\lambda lI+IR \tag{12}$$

式中 U 为恒流源两端的电压。弹丸做匀加速直线运动，在通电后任意时刻 t 有

$$v=at \tag{13}$$

$$l=\frac{1}{2}at^2 \tag{14}$$

由(11)(12)(13)(14)式得，在时刻 t 恒流源两端的电压为

$$U=2\lambda I\frac{1}{2}at^2+IR+\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d+b}{b}at$$

即

$$U=\lambda I\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)t^2+IR+\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d+b}{b}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)t \tag{15}$$

由(7)(13)式得，弹丸的加速时间为

$$T=\frac{v_{\max}}{a}=\sqrt{2L}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)^{-1/2} \tag{16}$$

由(15)(16)式得，弹丸出射时电源两端的电压

$$U_T=2\lambda IL+IR+\frac{\sqrt{2L}\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d+b}{b}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)^{1/2} \tag{17}$$

4）在弹丸的整个加速过程中，恒流源所做的功为

$$\begin{aligned}W&=\int_0^T UI\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\lambda I^2\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)t^2\mathrm{d}t+\int_0^T I^2R\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^T\frac{\mu_0 I^2}{\pi}\ln\frac{d+b}{b}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)t\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{18}$$

下面依次计算(18)式右端的第一项 W_1、第二项 W_2 和第三项 W_3：

$$W_1=\int_0^T \lambda I^2\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)t^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\lambda I^2}{3}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)T^3$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\lambda I^2}{3}L^{3/2}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)^{-1/2}$$

$$W_2=I^2RT=I^2R\sqrt{2L}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)^{-1/2}$$

$$W_3=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d+b}{b}\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)T^2=\frac{\mu_0 I^2 L}{\pi}\ln\frac{d+b}{b}$$

于是

$$W=W_1+W_2+W_3$$

$$=\sqrt{2L}I^2\left(\frac{2\lambda L}{3}+R\right)\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)^{-1/2}+\frac{\mu_0 I^2 L}{\pi}\ln\frac{d+b}{b} \tag{19}$$

5）弹丸出射时的动能为：

$$E_{k\max}=\frac{1}{2}mv_{\max}^2=mL\left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi m}\ln\frac{d+b}{b}-g\sin\theta\right)=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi}\ln\frac{d+b}{b}-mgL\sin\theta \tag{20}$$

在θ=0°的条件下，弹丸出射时的动能为

$$E_{k\max}=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi}\ln\frac{d+b}{b} \tag{21}$$

若导轨和弹丸的电阻可忽略，恒流源所做的功为

$$W=\frac{\mu_0 I^2 L}{\pi}\ln\frac{d+b}{b} \tag{22}$$

弹丸出射时的动能与恒流源所做的功之比

$$\eta=\frac{E_{k\max}}{W}=50\% \tag{23}$$

四、2016 年 9 月，G20 峰会在杭州隆重召开，其会议厅的装饰设计既展示出中国建筑的节能环保理念，又体现了浙江的竹文化特色. 图 a 给出了其部分墙面采用的微孔竹板装饰的局部放大照片，该装饰同时又实现了对声波的共振吸收. 竹板上有一系列不同面积、周期性排列的长方形微孔，声波进入微孔后导致微孔中的空气柱做简谐振动. 单个微孔和竹板后的空气层，可简化成一个亥姆霍兹共振器，如图 b 所示. 假设微孔深度均为 l、单个微孔后的空气腔体体积均为 V_0、微孔横截面积记为 S. 声波在空气层中传播可视为绝热过程，声波传播速度 v_s 与空气密度 ρ 及体积弹性模量 κ 的关系为

$$v_s = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

其中 κ 是气体压强的增加量 Δp 与其体积 V 相对变化量之比

$$\kappa = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} = -V\frac{\Delta p}{\Delta V}$$

已知标准状态（273K，$1\text{atm} = 1.01\times10^5\ \text{Pa}$）下空气 (可视为理想气体) 的摩尔质量 M_{mol} = 29.0 g/mol，热容比 $\gamma = \frac{7}{5}$，气体普适常量 $R = 8.31\ \text{J/(K}\cdot\text{mol)}$.

1）求标准状态下空气的密度和声波在空气中的传播速度 v_s；

2）求上述亥姆霍兹共振器吸收声波的频率（用 v_s、S、l、V_0 表示）；

3）为了吸收频率分别为 120 Hz 和 200 Hz 的声波，相应的两种微孔横截面积之比应为多少？

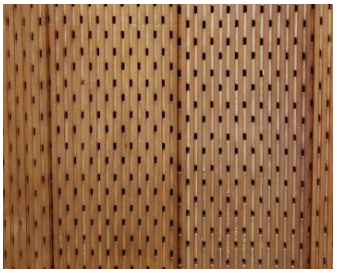


图 a. 微孔竹板墙照片(局部)

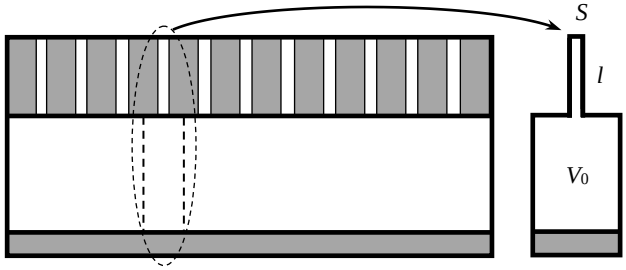


图 b. 微孔竹板装置简化图及对应的亥姆霍兹共振器模型

参考解答：

1）由理想气体状态方程有

$$pV = \frac{M}{M_{\text{mol}}}RT \qquad (1)$$

式中，p、V 和 T 分别为空气的压强、体积和（绝对）温度，M 和 M_{mol} 分别为空气总质量和摩尔质量。由(1)式得空气密度为

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_{\text{mol}}p}{RT}$$

在标准状态下（以下标“标”表示）有

$$\rho_{\text{标}} = \frac{M_{\text{mol}}p_{\text{标}}}{RT_{\text{标}}} = 1.29\ \text{kg/m}^3 \qquad (2)$$

理想气体的绝热过程满足

$$pV^{\gamma} = \text{常量}$$

式中 γ 是热容比。对上式两边微分得

$$\Delta pV^{\gamma} + \gamma pV^{\gamma-1}\Delta V = 0 \qquad (3)$$

由(3)式可得，空气的体积弹性模量为

$$\kappa = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} = \gamma p \tag{4}$$

声波在空气中的传播速度为

$$v_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

在标准状态下有

$$v_{\mathrm{s标}} = \sqrt{\frac{\gamma p_{标}}{\rho_{标}}} = 331\ \mathrm{m/s} \tag{5}$$

2）细管内的空气柱的质量为

$$m = \rho Sl \tag{6}$$

细管中的空气柱的运动是由外界压力与容器内的压力之差所引起的. 设这部分空气柱运动的位移为 x（向外为正），容器内的空气体积的改变为

$$\Delta V = Sx \tag{7}$$

容器内气体压力的变化满足绝热过程，由(3)式有

$$\Delta p = -\frac{\gamma p \Delta V}{V} \tag{8}$$

相应地，对于细管内运动着的空气柱的作用力为

$$F = S\Delta p = -\frac{\gamma p S^2 x}{V} \tag{9}$$

从而，细管内空气柱的运动方程可写为

$$-\frac{\gamma p S^2}{V}x = m\ddot{x} = \rho Sl\ddot{x} \tag{10}$$

(10)式可写成

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{11}$$

这是简谐振动的方程，ω是简谐振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p S}{\rho l V}} \tag{12}$$

将 $v_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ 代入(10)式得，所述亥姆霍兹共振器吸收声波的频率为

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_{\mathrm{s}}}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV}} = \frac{v_{\mathrm{s}}}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV_0}} \tag{13}$$

上式最后一步利用了单个微孔后的空气腔体体积为$V = V_0$.

3）按题设，两种需要通过所述亥姆霍兹共振器吸收声波的频率 f_{01} 和 f_{02} 之比为

$$\frac{f_{01}}{f_{02}} = \frac{120\mathrm{Hz}}{200\mathrm{Hz}} = 0.60 \tag{14}$$

由(13)式可得

$$f_{01} = \frac{v_{\mathrm{s}}}{2\pi}\sqrt{\frac{S_1}{lV_0}},\quad f_{02} = \frac{v_{\mathrm{s}}}{2\pi}\sqrt{\frac{S_2}{lV_0}} \tag{15}$$

式中，S_1 和 S_2 是相应的上述亥姆霍兹共振器的微孔的横截面积. 由(15)式有

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{f_{01}}{f_{02}} \tag{16}$$

即

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{f_{01}}{f_{02}} \right)^2 = 0.36 \qquad (17)$$

五、图 a 是基于全内反射原理制备的折射率阶跃型光纤及其耦合光路示意图. 光纤内芯直径 50 μm，折射率 n_1=1.46；它的玻璃外包层的外径为 125 μm，折射率 n_2=1.45. 氦氖激光器输出一圆柱形平行光束，为了将该激光束有效地耦合进入光纤传输，可以在光纤前端放置一微球透镜进行聚焦和耦合，微球透镜的直径 D=3.00 mm，折射率 n=1.50. 已知激光束中心轴通过微球透镜中心，且与光纤对称轴重合. 空气折射率 n_0=1.00.

1）为了使光线能在光纤内长距离传输，在光纤端面处光线的最大入射角θ应为多大？

2）若光束在透镜聚焦过程中满足近轴条件，为了使平行激光束刚好聚焦于光纤端面（与光纤对称轴垂直）处，微球透镜后表面中心顶点 O 与光纤端面距离应为多大？

3）为了使进入光纤的全部光束能在光纤内长距离传输，平行入射激光束的直径最大不能超过多少？

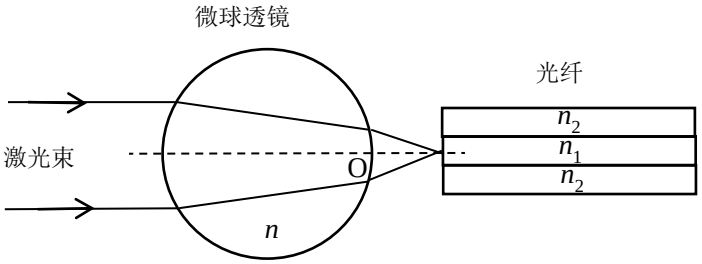
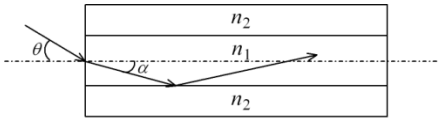


图 a. 激光束经微球透镜耦合进入光纤示意图

参考解答：

1）进入光纤芯的光束只有在光纤芯与包层界面满足全反射条件，才能使得光束在光纤中长距离传输. 设光线最大入射角为θ，相应的折射角为α，如解题图 a 所示. 由折射定律和全反射条件有



解题图 a

$$n_0\sin\theta = n_1\sin\alpha \qquad (1)$$

$$n_1\sin(90°-\alpha) = n_2 \qquad (2)$$

由(1)(2)式得

$$\sin\theta = \frac{n_1\sin\alpha}{n_0} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2} = \sqrt{1.46^2 - 1.45^2} = 0.17 \qquad (3)$$

由(3)式得

$$\theta = \arcsin 0.17 = 9.8° \qquad (4)$$

2）平行激光束首先在微球透镜前表面一次成像，其成像位置i_1（相对于微球透镜前表面顶点）可利用球面镜折射成像公式得到

$$\frac{n_0}{o_1} + \frac{n}{i_1} = \frac{n-n_0}{r} \qquad (5)$$

式中，o_1为物距，由于是平行光束$o_1 = \infty$，i_1是一次成像位置，n 是微球透镜玻璃材料折射率$n = 1.50$，r 是微球前表面曲率半径，$r = \frac{D}{2}$. 由(5)式得

$$i_1 = \frac{nD}{2(n-n_0)} = \frac{1.50\times 3.00\ \text{mm}}{2(1.50-1.00)} = 4.5\ \text{mm} \qquad (6)$$

光束在微球透镜后表面第二次成像位置i_2（相对于微球透镜后表面顶点 O）可由球面镜折射成像公式得到

$$\frac{n}{o_2} + \frac{n_0}{i_2} = \frac{n_0-n}{r_2} \qquad (7)$$

式中，o_2为相对于微球透镜后表面顶点 O 的物距

$$o_2 = i_1 - D = \frac{(2n_0 - n)D}{2(n - n_0)} = \frac{(2\times 1.00 - 1.50)\times 3.00\ \text{mm}}{2(1.50 - 1.00)} = 1.50\ \text{mm} \qquad (8)$$

由于此时是虚物，o_2 应取负值，即

$$o_2 = \frac{(n - 2n_0)D}{2(n - n_0)} = -1.50\text{mm}$$

而 r_2 是微球后表面曲率半径

$$r_2 = -\frac{D}{2}$$

将以上数据代入(7)式可得二次成像位置 i_2 为

$$i_2 = \frac{(2n_0 - n)D}{4(n - n_0)} = 0.75\ \text{mm} \qquad (9)$$

即微球透镜后表面中心顶点 O 与光纤端面距离应为 0.75mm.

3）微球透镜的等效主点与球心重合，而等效焦距为

$$f_e = \frac{(2n_0 - n)D}{4(n - n_0)} + \frac{D}{2} = \frac{nD}{4(n - n_0)} = \frac{1.50\times 3.00\ \text{mm}}{4(1.50 - 1.00)} = 2.25\ \text{mm} \qquad (10)$$

为了使进入光纤的全部光束能在光纤内长距离传输，平行入射激光束的直径 d 最大时，光束在光纤端面上的入射角应满足最大入射角条件：

$$\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{nD}{4(n - n_0)}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{nD}{2d\,(n - n_0)}\right)^2}} = \sin\theta \qquad (11)$$

注意到

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{nD}{2(n - n_0)d}\right)^2}} = \frac{2(n - n_0)}{n}\frac{d}{D}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2(n - n_0)}{n}\frac{d}{D}\right)^2}}$$

$$\approx \frac{2(n - n_0)}{n}\frac{d}{D}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2(n - n_0)}{n}\frac{d}{D}\right)^2\right] \approx \frac{2(n - n_0)}{n}\frac{d}{D}$$

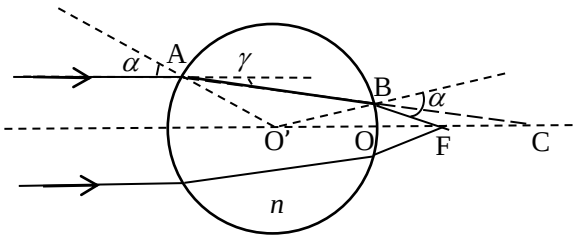
上式已略去 $\left(\frac{d}{D}\right)^3$ 项，将上式结果代入(11)式，结合(3)式和题给数据得

$$d = \frac{n}{2(n - n_0)} D\sin\theta = 0.76\ \text{mm} \qquad (12)$$

平行入射激光束的直径最大不能超过 $0.76\ \text{mm}$.

[解法二

2）如解题图 b，O′ 是微球球心，入射光束边缘的一根光线入射到微球面上的 A 点，入射角为 α，折射角为 $\angle \text{O}'\text{AB} \equiv \beta$；在微球的大圆内射到微球面上的 B 点，由于 O′A=O′B，光线在 B 点的入射角 $\angle \text{O}'\text{BA} = \beta$，折射角必定为 α；折射出的光线与光轴交于 F 点（按题意，F 点恰好在光纤端面上），而 AB 的延长线与光轴交于 C 点.



解题图 b.

由题给条件有

$$n_0 = 1.00, \quad n = 1.50$$

由折射定律有

$$n_0\alpha = n\beta$$

即

$$\beta = \frac{2}{3}\alpha \tag{5}$$

于是

$$\gamma = \frac{1}{3}\alpha,\ \theta' = 2\gamma \tag{6}$$

式中，$\theta' = \angle \mathrm{BFO}'$ 是光线在光纤端面上的入射角．而

$$\angle \mathrm{CBF} = \gamma = \angle \mathrm{FCB} \tag{7}$$

$$\angle \mathrm{BO'C} = \alpha - \theta' = \gamma \tag{8}$$

因而，$\Delta \mathrm{BO'C}$ 和 $\Delta \mathrm{FCB}$ 均为等腰三角形．于是

$$\overline{\mathrm{O'O}} = \overline{\mathrm{OC}}$$

$$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{FC}} = \frac{D}{4} = 0.75\ \mathrm{mm} \tag{9}$$

这里由于小角度近似，可近似认为 O 点为线段 $\mathrm{O'C}$ 的中点．

3）为了使进入光纤的全部光束能在光纤内长距离传输，平行入射激光束的直径取最大值 d 时，光束在光纤端面上的入射角 $\angle \mathrm{BFO}'$ 应满足最大入射角条件，即

$$\theta' = \theta = 0.17 \tag{10}$$

由几何关系和(6)(10)式得

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{3}{2}\theta \tag{11}$$

由(10)(11)式得

$$d = \frac{3}{2}D \times 0.17 = 0.76\ \mathrm{mm} \tag{12}$$

平行入射激光束的直径最大不能超过 $0.76\ \mathrm{mm}$．

]

[解法三：

2）如解题图 b，O' 是微球球心，入射光束边缘的一根光线入射到微球面上的 A 点，入射角为 α，折射角为 $\angle \mathrm{O'AB} \equiv \beta$；在微球的大圆内入射到微球面上的 B 点，由于 $\mathrm{O'A=O'B}$，光线在 B 点的入射角 $\angle \mathrm{O'BA} = \beta$，折射角必定为 α；折射出的光线与光轴交于 F 点（按题意，F 点恰好在光纤端面上），而 AB 的延长线与光轴交于 C 点．

由折射定律有

$$n_0 \sin\alpha = n \sin\beta \tag{5}$$

在 $\Delta \mathrm{BO'F}$ 中，由正弦定理有

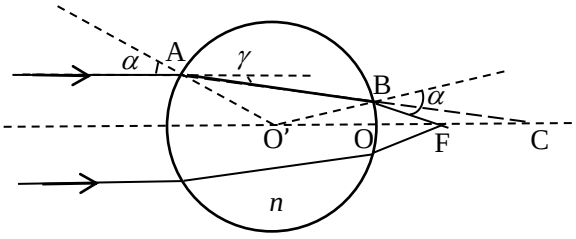
$$\frac{\overline{\mathrm{O'F}}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{\mathrm{O'B}}}{\sin\theta'} \tag{6}$$

式中，$\theta' = \angle \mathrm{BFO}'$ 是光线在光纤端面上的入射角．记 $\angle \mathrm{BO'C} = \gamma$，由几何关系有

$$\alpha + \gamma = 2\beta \tag{7}$$

$$\theta' = \alpha - \gamma = 2(\alpha - \beta) \tag{8}$$

由(6)(8)式得



解题图 b.

$$\overline{\mathrm{O'F}}=\frac{\sin\alpha}{\sin[2(\alpha-\beta)]}\frac{D}{2}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{2n_0^2}-\frac{1}{n_0}+\frac{1}{2n_0}\sin^2\alpha\right)\left((1-\frac{\sin^2\alpha}{2})(1-\frac{\sin^2\alpha}{2n_0^2})+\frac{\sin^2\alpha}{n_0}\right)}\frac{D}{4}$$

于是

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OF}}&=\overline{\mathrm{O'F}}-\frac{D}{2}=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin[2(\alpha-\beta)]}-1\right)\frac{D}{2}\\&\approx\left[\frac{n}{2(n-n_0)}-1\right]\frac{D}{2}=\frac{(2n_0-n)D}{4(n-n_0)}=0.75\mathrm{mm}\end{aligned}\tag{9}$$

式中第三步利用了近轴近似，略去了$\mathrm{O}(\alpha^2)$项.

3）为了使进入光纤的全部光束能在光纤内长距离传输，平行入射激光束的直径取最大值 d 时，光束在光纤端面上的入射角$\angle\mathrm{BFO'}$应满足最大入射角条件，即

$$\theta'=\theta\tag{10}$$

由(8)(10)式得

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sin 2(\alpha-\beta)=2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\\&=2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2(\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta}-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sin\beta)(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{1-\sin^2\beta}+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2\left(\sin\alpha\sqrt{1-\frac{n_0^2\sin^2\alpha}{n^2}}-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\frac{n_0\sin\alpha}{n}\right)\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{1-\frac{n_0^2\sin^2\alpha}{n^2}}+\frac{n_0\sin^2\alpha}{n}\right)\\&=2\sin\alpha\left(1-\frac{n_0^2\sin^2\alpha}{2n^2}-\frac{n_0}{n}+\frac{n_0}{2n}\sin^2\alpha\right)\left((1-\frac{\sin^2\alpha}{2})(1-\frac{\sin^2\alpha}{2n_0^2})+\frac{\sin^2\alpha}{n_0}\right)\end{aligned}$$

在(10)式右端略去了$\mathrm{O}(\alpha^3)$项后得

$$\sin\theta=2\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\sin\alpha\tag{11}$$

由几何关系得

$$\sin\alpha=\frac{d}{D}$$

由上式、(11)式和题给数据得

$$d=\frac{1}{2\left(1-\frac{n_0}{n}\right)}D\sin\theta=0.76\ \mathrm{mm}\tag{12}$$

平行入射激光束的直径最大不能超过$0.76\ \mathrm{mm}$.

]

六、宇宙射线中有大量高速飞行的 π 介子，它们会衰变成 μ 子和 μ 型反中微子 $\bar{\nu}_\mu$

$$\pi \to \mu + \bar{\nu}_\mu$$

已知 π 介子和 μ 子的静止质量分别为 m_π=139.57061 MeV/c^2 和 m_μ=105.65837 MeV/c^2，反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 的静止质量近似为零. 在实验室参照系中测得 π 介子的飞行速度大小为 v = 0.965c（$c = 3.00\times10^8$ m/s 为真空中的光速）.

1）求上述衰变过程产生的 μ 子的最大速率和最小速率；

2）上述衰变产生的 μ 子从距离地面 10000 m 的高空竖直向下飞行，已知静止的 μ 子的半衰期 $T_{\frac{1}{2}}^{(0)}$=1.523 μs，求地面观察者能够观测到的 μ 子的最大概率.

参考解答：

1）在相对于 π 介子静止的参照系 S′（π 介子的质心系）中，由动量守恒有

$$p'_\mu + p'_\nu = 0 \tag{1}$$

式中 p'_μ 和 p'_ν 分别是 μ 子和 μ 型反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 在 S′ 系中的动量

$$p'_\mu = \frac{m_\mu u'_\mu}{\sqrt{1-\left(\frac{u'_\mu}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

由能量守恒有

$$E'_\mu + E'_\nu = m_\pi c^2 \tag{3}$$

式中 E'_μ 和 E'_ν 分别是 μ 子和 μ 型反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 在 S′ 系中的能量

$$E'_\mu = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u'_\mu}{c}\right)^2}}, \quad E'_\nu = (-p'_\nu)c \tag{4}$$

将(2)(4)式代入(1)(3)式得

$$\frac{1+\frac{u'_\mu}{c}}{1-\frac{u'_\mu}{c}} = \frac{m_\pi^2}{m_\mu^2} \tag{5}$$

即

$$u'_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}c = 0.2714c \tag{6}$$

[另一解法：

在相对于 π 介子静止的参照系 S′（π 介子的质心系）中，由动量守恒有

$$p'_\mu + p'_\nu = 0 \tag{1}$$

式中 p'_μ 和 p'_ν 分别是 μ 子和 μ 型反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 在 S′ 系中的动量；由能量守恒有

$$(E'_{k\mu} + m_\mu c^2) + E'_\nu = m_\pi c^2 \tag{2}$$

式中 $E'_{k\mu}$ 和 E'_ν 分别是在 S′ 系中 μ 子和 μ 型反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 的动能。自由粒子的能量与动量满足

$$E'^2_\mu = (p'_\mu c)^2 + (m_\mu c^2)^2, \quad E'_\nu = p'_\nu c \tag{3}$$

利用 $E'_\mu = \gamma'_\mu m_\mu c^2$，(2)式即

$$E'_\nu = m_\pi c^2 - \gamma'_\mu m_\mu c^2 \tag{4}$$

式中

$$\gamma'_{\mu}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^{2}_{\mu}}{c^{2}}}}$$

而u'_{μ}是μ子在S'系中的运行速度。利用(1)(3)(4)式得

$$E'_{\nu}=p'_{\nu}c=p'_{\mu}c=\sqrt{E'^{2}_{\mu}-(m_{\mu}c^{2})^{2}}$$
$$=m_{\pi}c^{2}-\gamma'_{\mu}m_{\mu}c^{2}=(m_{\pi}-m_{\mu})c^{2}-m_{\mu}c^{2}(\gamma'_{\mu}-1)$$

上式两边平方得

$$E'^{2}_{\mu}-(m_{\mu}c^{2})^{2}=[(m_{\pi}-m_{\mu})c^{2}]^{2}-2(m_{\pi}-m_{\mu})m_{\mu}c^{4}(\gamma'_{\mu}-1)+[m_{\mu}c^{2}(\gamma'_{\mu}-1)]^{2}$$

即

$$(m_{\mu}c^{2})^{2}(\gamma'^{2}_{\mu}-1)=[(m_{\pi}-m_{\mu})c^{2}]^{2}-2(m_{\pi}-m_{\mu})m_{\mu}c^{4}(\gamma'_{\mu}-1)+[m_{\mu}c^{2}(\gamma'_{\mu}-1)]^{2}$$

解得

$$\gamma'_{\mu}=1+\frac{(m_{\pi}-m_{\mu})^{2}}{2m_{\pi}m_{\mu}}=1.0390 \tag{5}$$

由此可导出μ子在S'系中的速度为：

$$u'_{\mu}=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma'^{2}_{\mu}}}=0.2714c \tag{6}$$

]

假设在实验室系 S 中，π 介子以及衰变后的μ子的飞行方向之间的夹角为θ，这一夹角在S'系中对应于夹角θ'. 按相对论速度变换规则，在实验室系 S 中，μ 子的飞行速度的大小u满足

$$u_{\mu}=\frac{\sqrt{u'^{2}_{\mu}+v^{2}+2u'_{\mu}v\cos\theta'-\left(\frac{u'_{\mu}v}{c}\right)^{2}\sin^{2}\theta'}}{1+\frac{u'_{\mu}v}{c^{2}}\cos\theta'}$$

此即

$$u_{\mu}=c\sqrt{1-\frac{\left(1-\frac{u'^{2}_{\mu}}{c^{2}}\right)\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)}{\left(1+\frac{u'_{\mu}v}{c^{2}}\cos\theta'\right)^{2}}}$$

由上式可知，从π介子衰变得到的μ子的最大速率$u_{\min}$和最小速率$u_{\max}$分别出现在$\theta'=0$和$\theta'=\pi$的情形，正好分别相应于$\theta=0$和$\theta=\pi$的情形. 于是由

$$u_{\mu}\cos\theta=\frac{u'_{\mu}\cos\theta'+v}{1+\frac{u'_{\mu}v}{c^{2}}\cos\theta'}$$

可知，从π介子衰变得到的μ子的最大速率$u_{\min}$和最小速率$u_{\max}$分别为

$$u_{\mu\min}=\frac{-u'_{\mu}+v}{1+\frac{(-u'_{\mu})v}{c^{2}}}=0.940c=2.82\times10^{8}\,\mathrm{m/s} \tag{7}$$

$$u_{\mu\max}=\frac{u'_{\mu}+v}{1+\frac{u'_{\mu}v}{c^{2}}}=0.980c=2.94\times10^{8}\,\mathrm{m/s} \tag{8}$$

2）根据放射性衰变规律，μ子的衰变率ρ满足

$$\rho = \frac{N_{\mathrm{t}}}{N_0} = 2^{-\frac{\Delta t}{T_{1/2}}} \tag{9}$$

式中，N_0 为初始 μ 子数，N_{t} 为 t 时刻的 μ 子数，Δt 为 μ 子走完 $h = 10000\mathrm{m}$ 路程所需的时间间隔．Δt 在 $u_{\mu} = u_{\mu\,\max}$ 情形下最短，从而在地面附近出现的概率最大，即

$$(\Delta t)_{\min} = \frac{h}{u_{\mu\,\max}} = 3.40 \times 10^{-5}\ \mathrm{s} \tag{10}$$

由于时间膨胀效应，其半衰期在地面参照系中为

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{T_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u_{\mu}^2}{c^2}}} = 0.765 \times 10^{-5}\ \mathrm{s} \tag{11}$$

从而，在地面上观测到这个 μ 子的概率为

$$\rho_{\max} = 2^{-\frac{(\Delta t)_{\min}}{T_{1/2}}} = 4.59\% \tag{12}$$

[另一解法：

根据放射性衰变规律，μ 子的衰变率 $\boldsymbol{\rho}$ 满足

$$\rho = \frac{N_{\mathrm{t}}}{N_0} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \tag{9}$$

式中，N_0 为初始 μ 子数，N_{t} 为 t 时刻的 μ 子数，τ 为 μ 子的平均寿命．Δt 为 μ 子走完 10000 m 路程所需的时间间隔在 $u_{\mu} = u_{\mu\,\max}$ 情形下最短，因而在地面附近出现的概率最大，即

$$(\Delta t)_{\min} = \frac{h}{u_{\mu\,\max}} = 3.40 \times 10^{-5}\mathrm{s} \tag{10}$$

静止的 μ 子的平均寿命 τ_0 可从静止的 μ 子半衰期 $T_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ 求得

$$\tau_0 = \frac{T_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{\ln 2} = 2.197 \times 10^{-6}\mathrm{s}$$

由于时间膨胀效应，其平均寿命在地面参照系下，

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u_{\mu}^2}{c^2}}} = 1.10 \times 10^{-5}\mathrm{s}(\text{或 } 1.104 \times 10^{-5}\mathrm{s}) \tag{11}$$

从而，在地面上观测到这个 μ 子的概率为，

$$\rho_{\max} = \exp\left(-\frac{(\Delta t)_{\min}}{\tau}\right) = 4.55\%$$

或 (12)

$$\rho_{\max} = \exp\left(-\frac{(\Delta t)_{\min}}{\tau}\right) = 4.59\%$$

]

七、闪电是地球上最壮丽的自然现象之一. 人们对闪电进行了大量研究，近年来还观测到闪电导致的瞬间发光和伽玛射线暴等新现象. 闪电通常由雷电云（离地 6-12km）放电产生，多数闪电发生在云内，少数到达地面. 由于云内冰状颗粒相互碰撞，小颗粒冰晶带正电，随气流上浮到云上端；较大颗粒带负电，下坠到云底端（见图 a）. 云中闪电中和了云内的正负电荷，而云地闪电则把负电荷释放到地面.

1）利用高空气球携带的电场测量仪测量高空中某圆柱形空域雷电云内的电场，其强度可视为均匀分布，大小为 0.15MV/m. 该圆柱区域的中轴线垂直于地面，半径为 2.5km，高度为 1.0km. 求该区域上下两端的电势差、正电荷总量以及携带的总电能. 已知真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$.

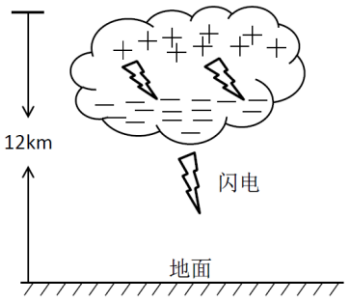


图 a. 雷电云的电荷分布

2）在起电过程中，雷电云上下两端电荷会随时间指数增加. 当地表电场大于 1.0kV/m 时，就会发生云地闪电，因此地表电场很少超过 10kV/m. 假定 1）中所述的雷电云从高空缓慢整体下移，直至其负电荷层离地高度为 6.0km 时暂时保持稳定，地面为良导体，试估算此雷电云正下方产生的地表电场强度.

3）云地闪电通常由带电云底端带负电的冰晶颗粒尖端放电触发，先形成一条指向地面的放电细路径（直径为厘米量级），该细路径随时间向下延伸，并导致周围空气不断电离，逐渐形成以原细路径（横截面大小可视为不变）为轴的粗圆柱形**带电体**，最后接近地面形成云地闪电通道. 该闪电通道垂直于地面，所带负电荷总量为 2.5C（原细放电路径内所带电量相对很小），闪电通道（中心放电细路径除外）内部电场强度大小相等. 假设闪电通道的长度远大于其直径，闪电通道的直径远大于中心放电细路径的直径，且在闪电通道连通云地前的极短时间内，闪电通道内部的电荷分布可视为稳定分布. 已知大气的电场击穿阈值为 3.0MV/m，试估算该云地闪电通道的直径，并导出闪电通道（中心放电细路径除外）内的电荷密度径向分布的表达式.

4）闪电通道连通云地后，云底和通道内部的负电荷迅速流向地面；闪电区域的温度骤然上升到数万摄氏度，导致其中的空气电离，形成等离子体，放出强光，同时通道会剧烈膨胀，产生雷声，闪电的放电电流经过约 10 μs 时间即可达数万安培. 在通道底部（接近地面）向四周辐射出频率约为 30kHz 的很强的无线电波. 由于频率低于 20MHz（此即所谓电离层截止频率）的电磁波不能进入电离层内部，该无线电波会加热电离层底部（离地约 80km）的等离子体，闪电电流一旦超过某阈值将导致该电离层底部瞬间发光，形成一个以强无线电波波源（通道底部）正上方对应的电离层底部为中心的光环，最大直径可延伸到数百公里. 试画出电离层底部光环产生与扩展的物理过程示意图，并计算光环半径为 100km 时光环扩张的径向速度.

5）球形闪电（球闪）的微波空泡模型认为球闪是一个球形等离子体微波空腔（空泡）. 当闪电微波较弱时，不足以形成微波空泡，会向太空辐射，穿透电离层，可被卫星观测到. 实际上，卫星确实观测到了这种微波辐射. 但卫星观测信号易受电离层色散的干扰，携带探测器的高空气球可到达雷电云上方观测，以避免此类干扰. 为了在离地 12km 的高空观测闪电发出的微波信号，需要在该区域悬浮一个载荷（包括气球材料和探测器）为 $50\,\mathrm{kg}$ 的高空氦气球，求此气球在高空该区域悬浮时的体积. 已知在离地 12km 的高度以下，大气温度随高度每升高 1km 下降 5.0 K，地面温度 $T_0 = 290\,\mathrm{K}$，地面压强 $p_0 = 1.01\times10^5\,\mathrm{pa}$，空气摩尔质量 $M = 29\,\mathrm{g/mol}$；气球内氦气密度（在离地高度 12km 处的值）$\rho_{\mathrm{He}} = 0.18\,\mathrm{kg/m^3}$. 重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，气体普适常量 $R = 8.31\ \mathrm{J/(K\cdot mol)}$.

参考解答：

1）该圆柱形雷电云空域的电荷分布可近似认为是一个平行板电容器，其电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{1}$$

式中 $S = \pi r^2$，$r = 2.5\ \mathrm{km}$，$d = 1.0\ \mathrm{km}$. 该区域上下两端的电势差为

$$U = Ed = 150\text{MV} \tag{2}$$

式中 $E = 0.15\text{MV/m}$．所带正电荷总量为

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2 U}{d} = 26\ \text{C} \tag{3}$$

携带的总电能为

$$W = \frac{1}{2}QU = 2.0 \times 10^9\,\text{J} \tag{4}$$

2）将地面考虑为平面导体．应用镜像电荷法，可得高度为 h 的点电荷 Q 产生的地面电场为

$$E = 2 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{h^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h^2} \tag{5}$$

雷电云正负电荷产生的总地表电场为

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 (h+d)^2} + \frac{(-Q)}{2\pi\varepsilon_0 h^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(h+d)^2} - \frac{1}{h^2}\right] = -3.5\ \text{kV/m} \tag{6}$$

已利用(3)式和题给数据 $h = 6.0\ \text{km}$，$d = 1.0\ \text{km}$，$r = 2.5\ \text{km}$．结果为负，说明电场方向垂直于地面朝上．

[另一解法（较为精确的计算）：

考虑圆盘上一圆环形的电荷微元

$$dq = \sigma 2\pi r' \mathrm{d}r'$$

其中 r' 为圆盘半径，$\sigma = Q/(\pi r^2)$ 为圆盘面电荷密度．该电荷微元在圆盘中轴线（过圆盘中心且与圆盘垂直的轴线）上与盘相距 x 处产生的电势为

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r'^2 + x^2}} = \frac{\sigma r' \mathrm{d}r'}{2\varepsilon_0\sqrt{r'^2 + x^2}}$$

整个带电圆盘在圆盘中轴线上与盘相距 x 处产生的电势为

$$U = \int_0^r \mathrm{d}U = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^r \frac{r'\,\mathrm{d}\,r'}{\sqrt{r'^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2 + x^2} - x\right)$$

整个带电圆盘在圆盘中轴线上与盘相距 x 处产生的电场为

$$E = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right)$$

雷电云负电荷圆盘在 $x = h$ 产生的电场为

$$E_- = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right)$$

式中 h 为负电荷的高度．正电荷圆盘在 $x = h + d$ 产生的电场为

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h+d}{\sqrt{r^2 + (h+d)^2}}\right)$$

将地面考虑为平面导体．应用镜像电荷法，得到正负电荷产生的地面电场为

$$\begin{aligned} E_{\text{地面}} &= 2(E_+ + E_-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \frac{h+d}{\sqrt{r^2 + (h+d)^2}}\right] \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi r^2}\left[\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \frac{h+d}{\sqrt{r^2 + (h+d)^2}}\right] \end{aligned} \tag{5}$$

已利用了(3)式．代入题给数据 $h = 6.0\ \text{km}$，$d = 1.0\ \text{km}$，$r = 2.5\ \text{km}$，得

$$E_{\text{地面}} = -2.8\ \text{kV/m} \tag{6}$$

结果为负，说明电场方向垂直于地面朝上．

]

3）闪电通道的线电荷密度为

$$\eta=\frac{Q}{h}=4.2\times10^{-4}\text{C/m} \tag{7}$$

式中$Q=2.5$ C，$h=6.0$ km．利用高斯定理得，圆柱电荷体系外的电场为

$$E_{r'}=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r'} \tag{8}$$

式中r'为到圆柱中轴线的距离．闪电通道的表面（柱面）电场应为击穿电场，故其直径为

$$D\approx\frac{\eta}{\pi\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}}=5.0\text{ m} \tag{9}$$

式中$E_{\text{击穿}}=3.0$ MV/m．

由题设，闪电通道的长度远大于其直径，闪电通道的直径远大于中心放电细路径的直径，闪电通道可视为无穷长的直圆柱体．在该直圆柱体上下两端面的电场通量（边缘效应）可忽略．在闪电通道内部，取与闪电通道同轴的圆柱形封闭面（包含中心放电细路径），应用高斯定理得

$$2\pi rLE_{\text{击穿}}=\frac{\int_0^r 2\pi r'L\mathrm{d}r'\rho(r')}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

此即

$$r\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}=\int_0^r r'\mathrm{d}r'\rho(r')$$

将上式两边对 *r* 求导得

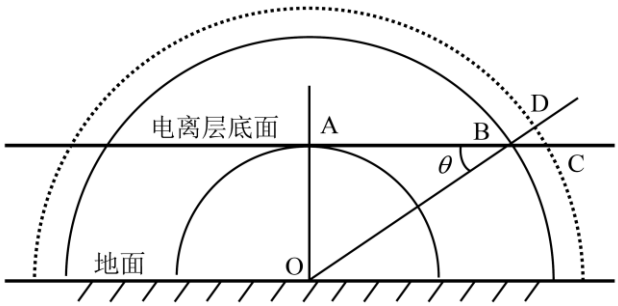
$$\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}=r\rho(r) \tag{11}$$

于是，闪电通道内（中心放电细路径除外）电荷密度分布为

$$\rho(r)=\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}r^{-1} \tag{12}$$

4）电离层底部光环产生与扩展的物理过程示意图如解题图 a 所示．

图中，无线电波从闪电 O 点在$t=0$时刻以球面波形式辐射出来，波前在$t=t_{\text{A}}$时刻到达电离层底面 A 处时开始加热该电离层底部的 A 处，这对应光环的出现时刻．由于频率低于电离层截止频率（30kHz<<20MHz），无线电波不能进入电离层，无线电波的波前会掠过电离层底面．当波前在$t=t_{\text{B}}$时刻到达 B 点时，对应的光环的半径就为$\overline{\text{AB}}=r$．



解题图 a. 电离层底部光环产生与扩展的物理过程

假设在较短的时间Δt内，光环外径从 B 传播到 C；对应的无线电波的波前从 B 点传播到了 D 点．由于无线电波的传播速度为c，故

$$\overline{\text{BD}}=c\Delta t \tag{13}$$

其中 *c* 是光速．光环从 B 到 C 的移动速度为

$$v=\frac{\overline{\text{BC}}}{\Delta t}=\frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{BD}}}c=\frac{c}{\cos\theta} \tag{14}$$

由几何关系有

$$\cos\theta=\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{OB}}}=\frac{\overline{\text{AB}}}{\sqrt{\overline{\text{OA}}^2+\overline{\text{AB}}^2}} \tag{15}$$

由(14)(15)式得

$$v = c\frac{\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2}}{\overline{\mathrm{AB}}} \tag{16}$$

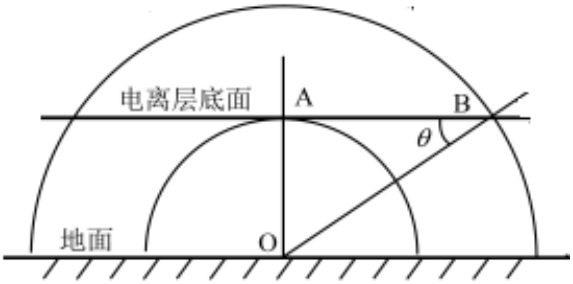
代入题给数据$\overline{OA} = 80\ \mathrm{km}$，$\overline{AB} = 100\ \mathrm{km}$，得

$$v = 1.28c = 3.8\times10^8\ \mathrm{m/s} \tag{17}$$

[另一解法：

电离层底部光环产生与扩展的物理过程示意图如解题图 a 所示. 8 分

图中，无线电波从闪电 O 点在$t = 0$ 时刻以球面波形式辐射出来，波前在$t = t_\mathrm{A}$时刻到达电离层底面 A 处时开始加热该电离层底部的 A 处，这对应光环的出现时刻. 由于频率低于电离层截止频率（30kHz<<20MHz），无线电波不能进入电离层，无线电波的波前会掠过电离层底面. 当波前在$t = t_\mathrm{B}$时刻到达 B 点时，对应的光环的半径就为$\overline{\mathrm{AB}} = r$.



解题图 a. 电离层底部光环产生与扩展的物理过程

由于无线电波的传播速度为c，故

$$\overline{\mathrm{OA}} = ct_\mathrm{A}，\ \overline{\mathrm{OB}} = c(t_\mathrm{A} + t) \tag{13}$$

式中t是光环从 A 扩展至 B 所用时间. 由几何关系

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2}$$

得

$$r = \sqrt{c^2(t_\mathrm{A} + t)^2 - h^2} \tag{14}$$

将(14)式两边对t微商得

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2(t_\mathrm{A} + t)}{\sqrt{c^2(t_\mathrm{A} + t)^2 - h^2}} = c\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{c}{\cos\theta} \tag{15}$$

由几何关系有

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2}}$$

由上式和(15)式得

$$v = c\frac{\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2}}{\overline{\mathrm{AB}}} \tag{16}$$

代入题给数据$\overline{\mathrm{OA}} = 80\ \mathrm{km}$，$\overline{\mathrm{AB}} = 100\ \mathrm{km}$，得

$$v = 1.28c = 3.8\times10^8\ \mathrm{m/s} \tag{17}$$

]

（5）气球在高空悬浮的条件是

$$m_{\text{负载}}g + \rho_\mathrm{He}V_0g = \rho_1V_0g \tag{18}$$

式中$m_{\text{负载}}$为气球及载荷的总质量，ρ_1为高空的大气密度，V_0是此气球在此高度悬浮时的体积. 由(18)式得

$$V_0 = \frac{m_{\text{负载}}}{\rho_1 - \rho_\mathrm{He}} \tag{19}$$

求出ρ_1即可得气球体积.

按题意，空气温度随高度的变化关系为

$$T = T_0 - \alpha z \tag{20}$$

其中 $\alpha = 5.0\times10^{-3}\,\mathrm{K/m}$．空气压强随高度的变化满足

$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z \tag{21}$$

由理想气体状态方程

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

可得空气密度

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} \tag{22}$$

式中 m 和 V 分别为空气质量和体积，M 为空气摩尔质量，ρ 为空气密度，R 为普适气体常量. 将(22)式代入(21)式得

$$\mathrm{d}p = -\frac{Mg}{RT}p\mathrm{d}z = -\frac{Mg}{R}\frac{p}{T_0 - \alpha z}\mathrm{d}z \tag{23}$$

由(23)式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \alpha z} = \frac{Mg}{\alpha R}\frac{\mathrm{d}(T_0 - \alpha z)}{T_0 - \alpha z} \tag{24}$$

两边积分得

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{Mg}{\alpha R}\ln\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right) \tag{25}$$

于是

$$p = p_0\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}} \tag{26}$$

相应的空气密度为

$$\rho = \frac{Mp_0}{RT}\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}} = \rho_0\frac{T_0}{T}\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}} = \rho_0\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}-1} \tag{27}$$

推导中用到了

$$\rho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0} \tag{28}$$

由(27)式和题给数据得，离地高度 $z = 12\ \mathrm{km}$ 处的空气密度为

$$\rho_1 = 0.31\ \mathrm{kg/m^3} \tag{29}$$

将(29)式代入(19)式得

$$V_0 = 3.8\times10^2\,\mathrm{m^3} \tag{30}$$