第 36 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题与解答

2019 年 9 月 26 日

一、新型号汽车在出厂前都要通过破坏性试验. 在某次汽车测试中，一个汽车轮子的三根辐条被撞掉了其中一根，轮子的横截面如图所示．该轮子可视为内、外半径分别为 $R_1=\frac{4}{5}R_0$、R_0 的轮盘和两根辐条组成（假设轮盘可视为匀质环形圆盘，辐条可视为匀质细杆，每根辐条的质量为 m．轮盘的质量为 $M=8m$，轮子从图 a 所示位置由静止开始释放，释放时轮子上两辐条所张角的平分线恰好水平，此后该轮子在水平地面上做纯滚动．求

1）刚释放时轮子的角加速度；

2）释放后辐条 OB 首次转到竖直位置时，轮子的角加速度、地面对轮子的摩擦力和支持力．

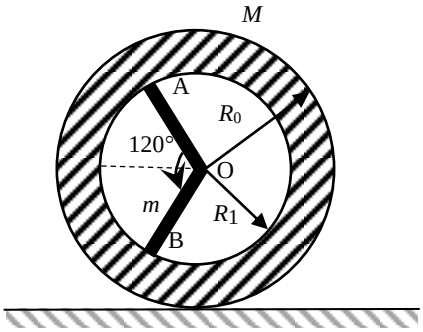


图 a

参考解答:

轮盘对过 O 点且与轮面垂直的轴的转动惯量为

$$J_{O1}=\int_{R_1}^{R_0}\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot r^2=\frac{1}{2}\sigma\pi\left(R_0^4-R_1^4\right)=\frac{1}{2}M\left(R_0^2+R_1^2\right)$$

式中 σ 是轮环面单位面积上的质量. 两根辐条对该 O 轴的转动惯量为

$$J_{O2}=\frac{1}{3}mR_1^2\times 2$$

轮子对 O 轴的总转动惯量为

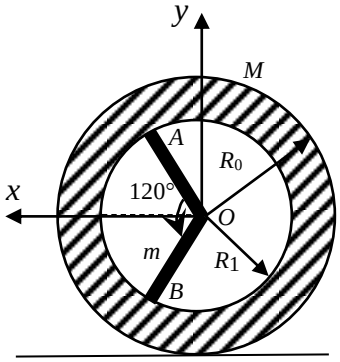
$$J_O=J_{O1}+J_{O2}=\frac{1}{6}\left(3M+4m\right)R_1^2+\frac{1}{2}MR_0^2=\frac{524}{75}mR_0^2 \quad (1)$$

以轮子中心O为坐标原点，建立如解题图a所示的坐标系. 令

$$M'=M+2m=10m$$

轮子质心C的x-坐标为

$$x_C=\frac{\left(M'+m\right)\cdot 0+\left(-m\right)\cdot\left(-R_1/2\right)}{M'}=\frac{mR_1}{2M'}=\frac{R_0}{25} \quad (2)$$



解题图 a

由平行轴定理，求得轮子对过质心 C 且与轮面垂直的轴的转动惯量为

$$J_C=J_O-M'x_C^2=\frac{2614}{375}mR_0^2 \quad (3)$$

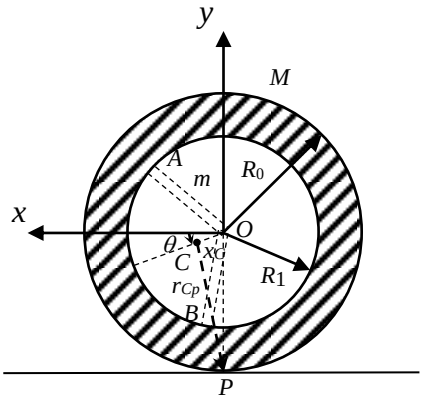
在辐条 OB 从初始位置转到竖直位置的过程中，任一位置对轮子在地面做纯滚动的瞬时轴 P 的转动惯量为

$$J_P=J_C+M'r_{CP}^2$$

$$=J_C+M'[R_0^2+x_C^2-2R_0x_C\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)] \quad (4)$$

$$=J_C+M'(R_0^2+x_C^2-2R_0x_C\sin\theta)$$

其中θ为质心 C 从起始位置到当前位置所转过的角度，如解题图 b 所示.



解题图 b

由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}J_{\mathrm{P}}\omega^2 = M'g\,x_{\mathrm{C}}\sin\theta \qquad (5)$$

由此得

$$\omega^2 = \frac{2M'g\,x_{\mathrm{C}}\sin\theta}{J_{\mathrm{P}}}$$

将 (4)式代入(5)式后，方程两边对 t 求导，可求得转动角加速度 α

$$\frac{1}{2}\omega^2(-M'2R_0x_{\mathrm{C}}\cos\theta\cdot\omega)+J_{\mathrm{P}}\omega\alpha = M'gx_{\mathrm{C}}\cos\theta\cdot\omega$$

结果为

$$\alpha = \frac{M'x_{\mathrm{C}}\cos\theta(g+\omega^2R_0)}{J_{\mathrm{P}}} \qquad (6)$$

1）轮子从图 a 所示位置由静止开始释放时，$\theta=0$，由(4)式得，轮子对瞬时轴 P 的转动惯量为

$$J_{P,\theta=0} = J_C + M'\left(R_0^2+x_C^2\right) = \frac{2614}{375}mR_0^2 + 10m\left(R_0^2+x_C^2\right) = \frac{1274}{75}mR_0^2$$

此时 $\omega=0$，由(6)式得

$$\alpha_{\theta=0} = \frac{M'g\,x_{\mathrm{C}}}{J_{P,\theta=0}} = \frac{15}{637}\frac{g}{R_0} \qquad (7)$$

[

或者直接用对任意瞬时轴 P 的转动定律求解

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_P}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_P + \boldsymbol{r}_{PC}\times(-M'\boldsymbol{\alpha}_p)$$

但此时轮子刚开始转动，角速度为零，相对于地面接触点的加速度 $\boldsymbol{\alpha}_p$（ω^2R_0）为零，故

$$J_{P,\theta=0}\alpha = M'g\cdot x_C$$

则此时的转动角加速度

$$\alpha_{\theta=0} = \frac{M'g\,x_{\mathrm{C}}}{J_{P,\theta=0}} = \frac{15}{637}\frac{g}{R_0} \qquad (7)$$

]

2）当辐条 OB 转到竖直位置时，$\theta=30°$，由(4)式得

$$J_{P,\theta=30°} = J_C + M'\left(R_0^2+x_C^2-2R_0x_C\sin 30°\right) = \frac{1244}{75}mR_0^2$$

由(5)式得

$$\omega^2_{\theta=30°} = \frac{2M'g\,x_C\sin 30°}{J_{P,\theta=30°}} = \frac{15}{622}\frac{g}{R_0} \qquad (8)$$

由(6)式得

$$\alpha_{\theta=30°} = \frac{M'x_C\cos 30°\left(g+\omega^2_{\theta=30°}R_0\right)}{J_{P,\theta=30°}} = \frac{9555\sqrt{3}}{773768}\frac{g}{R_0} \qquad (9)$$

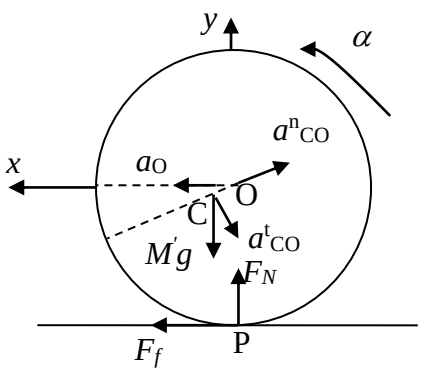
据题意，轮子中心 O 相对于地面的加速度 a_{O} 和质心 C 相对于轮子中心 O 的切向加速度 a^t_{CO} 与法向加速度 a^n_{CO} 分别为

$$a_{\mathrm{O}} = \alpha R_0,\quad a^t_{\mathrm{CO}} = \alpha x_C,\quad a^n_{\mathrm{CO}} = \omega^2 x_{\mathrm{C}} \qquad (10)$$

质心 C 相对地面参考系的加速度（见解题图 c）

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= a_O - a^t_{CO}\sin\theta - a^n_{CO}\cos\theta \\ a_{Cy} &= a^n_{CO}\sin\theta - a^t_{CO}\cos\theta \end{aligned} \qquad (11)$$

根据质心运动定理可求此时的摩擦力 F_f 和支持力 F_N



解题图 c

$$\begin{aligned} M'a_{Cx} &= F_f \\ M'a_{Cy} &= F_N - M'g \end{aligned} \tag{12}$$

联立以上各式可解得

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{89907\sqrt{3}}{773768}mg \\ F_N &= \frac{7735679}{773768}mg \end{aligned} \tag{13}$$

上述结果可以用

$J_C\alpha = F_N x_C \cos\theta - F_f (R_0 - x_C \sin\theta)$ 来验证.

二、一个长为 l、内外半径分别为 a 和 b 的半圆柱体由两种不同的耗损电介质构成，它们的相对介电常数和电导率分别为：ε_{r1} 和σ_1（$0\le\varphi<\theta_0$ 区域），ε_{r2} 和σ_2（$\theta_0<\varphi\le\pi$ 区域），其横截面如图 a 所示；在半圆柱两侧底部镀有金属膜，两金属膜间加有直流电压 V_0，并达到稳定．已知真空介电常量为ε_0，两种介质的相对介电常数大、电导率小．忽略边缘效应．

1）求介质内电场强度和电势的分布；

2）求$\varphi=\theta_0$ 界面处的总电荷；

3）分别计算 $0\le\varphi<\theta_0$ 和 $\theta_0<\varphi\le\pi$ 两介质区域的电阻和电容；

4）在 $t=0$ 时刻断开电源，求随后的两金属膜间电压随时间的变化（该过程可视为似稳过程），并画出相应的等效电路图．

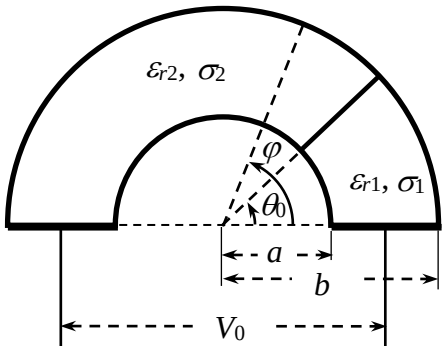


图 a

参考解答：

1）考虑某一半径为 r 的半圆周，如解题图 a 所示．设 $0\le\varphi<\theta_0$ 区域、$\theta_0<\varphi\le\pi$ 区域的电场强度与电位移矢量大小分别为 E_1 和 D_1、E_2 和 D_2，方向均沿角向．由电流的连续性和欧姆定律有

$$J_1=J_2,\quad \sigma_1E_1=\sigma_2E_2 \tag{1}$$

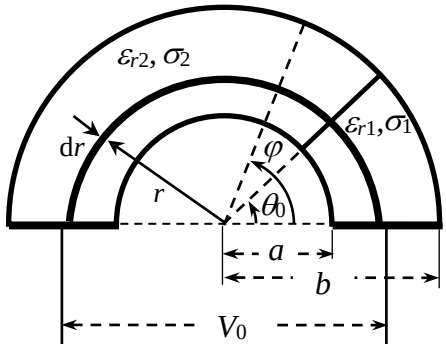
两介质上的电压之和为

$$E_1r\theta_0+E_2r(\pi-\theta_0)=V_0 \tag{2}$$

由(1)(2)式得

$$E_1=\frac{V_0}{[\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)]r} \tag{3}$$

$$E_2=\frac{V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)]r} \tag{4}$$



解题图 a

假设负极板电势为零，由电势和电场强度之间的关系得：

对于 $0\le\varphi<\theta_0$ 区域，

$$V_\varphi=V_0-E_1r\varphi=[1-\frac{\varphi}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}]V_0=\frac{(\theta_0-\varphi)+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}V_0 \tag{5}$$

对于 $\theta_0<\varphi\le\pi$ 区域，

$$\begin{aligned}V_\varphi&=V_0-E_1r\theta_0-E_2r(\varphi-\theta_0)\\&=[1-\frac{\theta_0}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}-\frac{\varphi-\theta_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)}]V_0=\frac{\pi-\varphi}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)}V_0\end{aligned} \tag{6}$$

2）在$\varphi=\theta_0$的界面上的总电荷密度为

$$\sigma_e=\varepsilon_0(E_2-E_1)=\frac{\varepsilon_0V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)]r}-\frac{\varepsilon_0V_0}{[\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)]r}=\frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-1}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)r}\varepsilon_0V_0 \tag{7}$$

在$\varphi=\theta_0$的界面上的总电荷为

$$Q=\int_a^b \sigma_e l dr=\frac{\varepsilon_0(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-1)l\ln\frac{b}{a}}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}V_0 \qquad (8)$$

3）计算介质区域$\varphi=0\sim\theta_0$的电容 C_1. 设半圆柱体的右极板上 r 处的自由电荷密度为σ_{e01},，有

$$\sigma_{e01}=D_1=\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 E_1=\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0}{[\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)]r} \qquad (9)$$

右极板上总的自由电荷

$$Q_{01}=\int_a^b \sigma_{e01} l dr=\int_a^b \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0 l}{[\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)]r}dr=\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0 l}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}\ln\frac{b}{a} \qquad (10)$$

$\varphi=0$与$\varphi=\theta_0$之间电势差

$$V_{10}=E_1\theta_0 r=\frac{\theta_0 V_0}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)} \qquad (11)$$

介质区域$\varphi=0\sim\theta_0$的电容 C_1为

$$C_1=\frac{Q_{01}}{V_{10}}=\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 l}{\theta_0}\ln\frac{b}{a} \qquad (12)$$

计算介质区域$\varphi=\theta_0\sim\pi$的电容 C_2. 设半圆柱体左极板上 r 处的自由电荷密度为σ_{e02}，有

$$\sigma_{e02}=D_2=\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 E_2=\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 V_0}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)]r} \qquad (13)$$

左极板上的自由电荷为

$$Q_{02}=\int_a^b \sigma_{e02} l dr=\int_a^b \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 V_0 l}{[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)]r}dr=\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 V_0 l}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)}\ln\frac{b}{a} \qquad (14)$$

$\varphi=\theta_0$与$\varphi=\pi$之间电势差为

$$V_{20}=E_2(\pi-\theta_0)r=\frac{(\pi-\theta_0)V_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+(\pi-\theta_0)} \qquad (15)$$

介质区域$\varphi=\theta_0\sim\pi$区域的电容 C_2为

$$C_2=\frac{Q_{02}}{V_{20}}=\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 l}{\pi-\theta_0}\ln\frac{b}{a} \qquad (16)$$

计算介质区域$\varphi=0\sim\theta_0$的电阻 R_1：考虑 r 处厚度为 dr 的半圆柱壳（见解题图 a）. 该半圆柱壳在介质区域$\varphi=0\sim\theta_0$中的部分的电导为

$$dG_1=\sigma_1\frac{l dr}{\theta_0 r}$$

介质区域$\varphi=0\sim\theta_0$的电导为

$$G_1=\int_a^b \sigma_1\frac{l dr}{\theta_0 r}=\frac{\sigma_1 l}{\theta_0}\ln\frac{b}{a}$$

相应的电阻为

$$R_1=\frac{1}{G}=\frac{\theta_0}{\sigma_1 l\ln\frac{b}{a}} \qquad (17)$$

计算介质区域$\varphi=\theta_0\sim\pi$的电阻R_2. 所考虑的半圆柱壳在介质区域$\varphi=\theta_0\sim\pi$中的部分的电导为

$$dG_2=\sigma_2\frac{ldr}{(\pi-\theta_0)r}$$

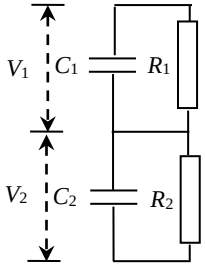
介质区域$\varphi=\theta_0\sim\pi$的电导为

$$G_2=\int_a^b\sigma_2\frac{ldr}{(\pi-\theta_0)r}=\frac{\sigma_2 l}{\pi-\theta_0}\ln\frac{b}{a}$$

相应的电阻为

$$R_2=\frac{1}{G_2}=\frac{\pi-\theta_0}{\sigma_2 l\ln\frac{b}{a}} \tag{18}$$

4）当断开电源后，形成两个相互独立的 *RC* 回路，其等效电路如解题图 b 所示，其电势差从V_{10}和V_{20}分别衰减到零.



解题图 b

$$iR_i+\frac{q_i}{C_i}=0$$

式中下标$i=1,2$分别对应于第一、二个 *RC* 回路，而q_i是断开电源后t时刻电容C_i正极板上所到的电量. 上式即

$$\frac{dq_i}{q_i}=-\frac{1}{R_iC_i}$$

解为

$$q_i=q_0e^{-\frac{1}{R_iC_i}t}$$

式中q_0是断开电源时电容C_i正极板上所到的电量，或

$$V_i=\frac{q_i}{C_i}=\frac{q_0}{C_i}e^{-\frac{1}{R_iC_i}t}=V_{i0}e^{-\frac{1}{R_iC_i}t} \tag{19}$$

式中

$$R_1C_1=\frac{\theta_0}{\sigma_1 l\ln\frac{b}{a}}\times\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 l}{\theta_0}\ln\frac{b}{a}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1},\qquad\frac{1}{R_1C_1}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \tag{20}$$

$$R_2C_2=\frac{\pi-\theta_0}{\sigma_2 l\ln\frac{b}{a}}\times\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 l}{\pi-\theta_0}\ln\frac{b}{a}=\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}{\sigma_2},\qquad\frac{1}{R_2C_2}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \tag{21}$$

于是

$$V_1(t)=\frac{\theta_0V_0}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}e^{-\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0}t} \tag{22}$$

$$V_2(t)=\frac{(\pi-\theta_0)V_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+\pi-\theta_0}e^{-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}t} \tag{23}$$

两金属膜之间的电压为

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)=\frac{\theta_0V_0}{\theta_0+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi-\theta_0)}e^{-\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0}t}+\frac{(\pi-\theta_0)V_0}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0+\pi-\theta_0}e^{-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}t} \tag{24}$$

三、 用超导重力仪对地球表面重力加速度的微小变化及其分布进行长期高精度观测，可获得地幔运动、质量分布、固体潮汐、地下水和矿产分布等地球内部结构信息，以及海洋潮汐、气候变化等外部数据. 超导重力仪灵敏度高（可达地表重力加速度的10^{-9}）、稳定性强，是目前地球科学领域广泛采用的重力观测装置. 随着分布于全球的超导重力仪数目的增加、观测网络的建立和数据共享，为地球科学的发展、万有引力规律的精确检验等等提供了新的机遇. 试就有关地下水分布引起的重力变化、超导重力仪原理等问题给出回答.

1）假设地球可视为一个半径为 6370 km 的均匀球体，其表面重力加速度 g_0=9.80 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$（不考虑地球自转）. 现某处地下有一个直径为 20 km 充满水的球形地下湖，其球心离地面 15 km. 求地下湖正上方地表处重力加速度的微小变化Δg. 已知万有引力常量$G=6.67\times10^{-11}$ $\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$，水的密度$\rho_{水}=1.0\times10^3$ $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

2）超导重力仪的核心部件是悬浮在磁场中、由金属铌（Nb）制成的超导球壳，为计算方便起见，这里简化为超导细环（见图 a）. 悬浮磁场由准亥姆霍兹（Helmholtz）线圈提供，它由匝数分别为αN 和 N 的上、下两个同轴细超导线圈（ α < 1）串联而成，两线圈的半径及其中心之间的距离均为 R. 超导重力仪调试前，亥姆霍兹线圈和超导细环中的电流均为零，超导细环处在下线圈平面内（z = 0），且与线圈同轴. 调试开始后，外电源对准亥姆霍兹线圈缓慢加上电流 i_0，在此过程中超导细环内会产生感应电流. 调节 i_0 的大小，使超导细环正好悬浮在上线圈平面内（z = R），如图 a 所示. 由于超导线圈和超导细环的电阻均为零（其所在处的温度为 4.2 K），超导环被稳定悬浮后，移去提供超导线圈电流的电源，超导线圈中的电流 i_0 以及由此产生的磁场均能长期保持稳定. 已知超导细环的质量为 m、直径为 D (D << 2R)、自感系数为 L；在上线圈平面附近，由准亥姆霍兹线圈产生的磁感应强度 B 的 z 方向分量和径向分量可分别近似表示为：

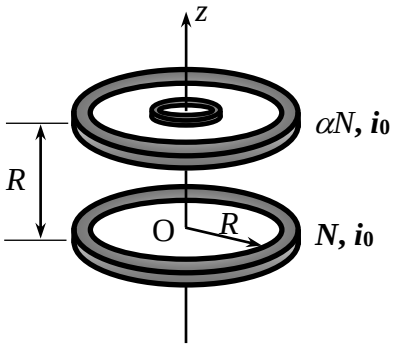


图 a

$$\begin{cases} B_z = B_0[1-\beta(z-R)] \\ B_r = \dfrac{1}{2}\beta B_0 r \end{cases}$$

其中 B_0 为上线圈中心处的磁感应强度，β为径向系数， r 是到轴线的距离. 利用上述线圈和超导细环的已知参数、以及线圈中的外加电流 i_0，求

i）B_0 和β 的表达式；

ii）超导细环在平衡处（z = R）感应电流 I_0 的表达式；

iii）超导重力仪放置地的重力加速度 g_0 的表达式.

3）为了精确测量重力加速度的微小变化，在超导重力仪中采用了交流电桥平衡法.为了理解其原理并便于计算，将超导细环视为面积为 A 的薄“平板”，并在超导细环的上下对称位置，即 $R+d/2$ 和 $R-d/2$ 处，分别固定两个形状相同、面积也为 A 的金属平板，构成上极板与超导“平板”、下极板与超导“平板”两个电容器 C_1 和 C_2，如图 b 所示. 再将 C_1 和 C_2 与两组完全相同的电感 L_0 和电容 C_0 连接成电桥，并接在交流电源（频率远高于重力加速度的变化的快慢）上，如图 c 所示. 假设某时刻超导重力仪所在地的重力加速度为 g，超导细环（超导“平板”）处在其平衡位置 z = R 处，交流电桥处于平衡，这时 C_1 和 C_2 上加有相同的直流电压 V_C；当重力加速度改变Δg，导致电桥失衡，将 C_1 上的直流电压增加ΔV，同时在 C_2 上减少 ΔV，电桥又重新达到平衡. 试给出Δg 与ΔV 的关系式（不计电容器的边缘效应）.

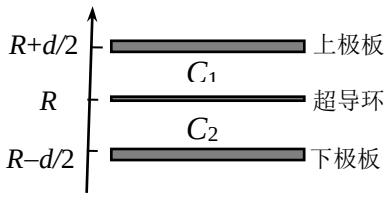


图 b

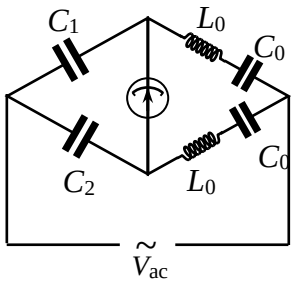
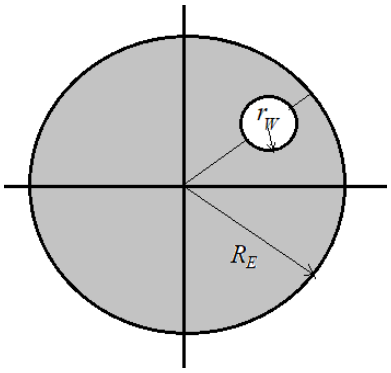


图 c

参考解答:

1）如解题图 a，地下湖在地面下深度 d 处. 设地球的平均密度为ρ_0，水的密度为 ρ_{W}，地球质量 M_{E} 和地下湖中水的质量 M_{W} 分别为



解题图 a

$$M_{\mathrm{E}}=\frac{4}{3}\pi R_{\mathrm{E}}^3\rho_0,\quad M_{\mathrm{W}}=\frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{W}}^3\rho_{\mathrm{W}}$$

设地下湖中没有水时，地面重力加速度大小为 g_0，由引力定律有

$$mg_0=mG\frac{M_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}^2} \qquad (1)$$

由 $M_{\mathrm{E}}=\frac{4}{3}\pi R_{\mathrm{E}}^3\rho_0$ 和(1)式得

$$\rho_0=\frac{3g_0}{4\pi R_E G}=5.51\times10^3\,\mathrm{kg/m^3} \qquad (2)$$

设地下湖中充满水时，重力加速度大小的改变为 Δg，同样有

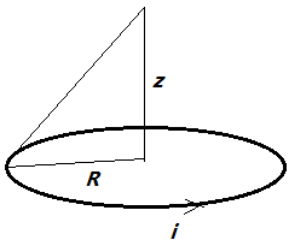
$$m(g_0-\Delta g)=mG\left(\frac{M_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}^2}-\frac{m_{\mathrm{E}}}{d^2}+\frac{M_{\mathrm{W}}}{d^2}\right) \qquad (3)$$

由 $M_{\mathrm{E}}=\frac{4}{3}\pi R_{\mathrm{E}}^3\rho_0$、$M_{\mathrm{W}}=\frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{W}}^3\rho_{\mathrm{W}}$ 和 (1)(2)(3)式得

$$\Delta g=G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3[\rho_0-\rho_{\mathrm{W}}]}{d^2}=5.60\times10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}=5.71\times10^{-4}g_0 \qquad (4)$$

由此可见地下湖水的存在对当地重力加速度的影响很小.

2）i）通有电流 i 的单匝线圈（见解题图 b）在过线圈中心的轴上产生的磁场的磁感应强度大小为



解题图 b

$$B_z=\frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (5)\ 4\text{ 分}$$

方向沿 z 轴正向（按电流 i 的流向）.

在上线圈平面中心附近磁场的磁感应强度 z 分量为上、下两线圈（见题图 a）产生磁场的叠加

$$B_z=B_{1z}+B_{2z}$$

$$=\frac{\mu_0\alpha Ni_0R^2}{2[R^2+(z-R)^2]^{3/2}}+\frac{\mu_0Ni_0R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad (6)$$

$$=\frac{\mu_0Ni_0R^2}{2}\{f_1(z)+f_2(z)\}$$

上式中 $z-R$ 是一个小量，仅保留在一阶项有

$$f_1(z)=\frac{\alpha}{[R^2+(z-R)^2]^{3/2}}\approx\frac{\alpha}{R^3} \qquad (7)$$

$$f_2(z)=\frac{1}{[R^2+z^2]^{3/2}}\approx\frac{1}{[2(z-R)R+2R^2]^{3/2}}\approx\frac{1}{2\sqrt{2}R^3}\left[1-\frac{3}{2R}(z-R)\right] \qquad (8)$$

于是

$$B_z=\frac{\mu_0NiR^2}{2}\{\frac{\alpha}{R^3}+\frac{1}{2\sqrt{2}R^3}[1-\frac{3}{2R}(z-R)]\}=\frac{\mu_0Ni}{2R}[(\alpha+\frac{1}{2\sqrt{2}})-\frac{3}{4\sqrt{2}R}(z-R)]$$

$$=\frac{\mu_0Ni}{2R}[(\alpha+\frac{1}{2\sqrt{2}})][1-\frac{3}{4\sqrt{2}R(\alpha+\frac{1}{2\sqrt{2}})}(z-R)]=B_0[1-\beta(z-R)] \qquad (9)$$

式中

$$B_0=\frac{\mu_0 N i_0}{2R}(\alpha+\frac{1}{2\sqrt{2}})=\frac{\sqrt{2}\mu_0 N i_0}{8R}(2\sqrt{2}\alpha+1) \qquad (10)$$

$$\beta=\frac{3}{2R(2\sqrt{2}\alpha+1)} \qquad (11)$$

ii）由于超导细环的电阻为零，超导细环向上悬浮过程中，直至平衡在上线圈平面内，其磁通量总是保持不变. 设超导细环在平衡位置时的感应电流为 I_0，有

$$\varepsilon=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=0 \qquad (12)$$

因而

$$\Phi=(B_z)_{z=R}\pi(\frac{D}{2})^2+LI_0=\text{const.} \qquad (13)$$

由初始条件

$$t=0,\ z=0,\ I=0,\ \ \Phi=0$$

和(9)式可知

$$LI_0=-B_0\pi(\frac{D}{2})^2 \qquad (14)$$

由(17)式得

$$I_0=-\frac{1}{4L}\pi D^2 B_0=-\frac{\mu_0 N i_0\pi D^2}{8RL}[\alpha+\frac{1}{2\sqrt{2}}] \qquad (15)$$

负号表示超导细环中电流与超导线圈电流方向相反.

iii）当超导细环在上线圈平面（$z=R$）内静止时，径向磁场对其施加的向上的安培力正好与其重力平衡，即

$$mg=|I_0|B_r\pi D \qquad (16)$$

由题给条件和(19)(20)式得

$$\begin{aligned} g&=\frac{\frac{1}{4L}\pi D^2 B_0\cdot\frac{1}{2}B_0\cdot\beta\frac{D}{2}\cdot\pi D}{m}=\frac{\beta\pi^2 D^4 B_0^2}{16Lm}\\ &=\frac{\frac{3}{2R(2\sqrt{2}\alpha+1)}\pi^2 D^4\frac{\mu_0^2 N^2 i_0^2}{4R^2}(\alpha+\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}{16Lm}\\ &=\frac{3\pi^2 D^4\mu_0^2 N^2 i_0^2}{256\sqrt{2}LmR^3}(\alpha+\frac{1}{2\sqrt{2}}) \end{aligned} \qquad (17)$$

由此可见，只要已知准 Helmhotz 超导线圈和悬浮的超导环参数，通过测量 i_0 就可测得该地的重力加速度 g_0.

3）当地面重力加速度大小为 g 时，磁悬浮力与超导细环重力 mg 平衡，超导细环处在上线圈平面内 ($z_0=R$). 上极板对超导“平板”、下极板对超导“平板”的吸引力相互抵消，此时加在两个电容上的电压均为 V_C. 假设上极板与下极板之间的距离为 d，超导“平板”与下极板之间距离为 x，超导“平板”受到上下两极板的吸引力之差为

$$F=\frac{1}{2}\varepsilon_0 A V_C^2[\frac{1}{(d-x)^2}-\frac{1}{x^2}]$$

当 $x=\frac{d}{2}$ 时，有

$$F_{x=d/2}=0 \qquad (18)$$

当重力加速度变化 Δg 时，超导“平板”会受到一个多余的向下的重力 $m\Delta g$，为了使超导“平板”在交流电桥平衡位置（$x=\frac{d}{2}$）重新达到力学平衡，在两个电容器 C_1 和 C_2 上反向施加电压 ΔV，使超导“平板”受到上极板的吸引力大于下极板吸引力，其差值为

$$F=\frac{1}{2}\varepsilon_0 A[\frac{(V_C+\Delta V)^2}{(d-x)^2}-\frac{(V_C-\Delta V)^2}{x^2}] \tag{19}$$

在 $x=\frac{d}{2}$，超导“平板”重新达到力学平衡时有

$$F=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{(\frac{d}{2})^2}4V_C\Delta V=\frac{8\varepsilon_0 A}{d^2}V_C\Delta V=m\Delta g \tag{20}$$

于是

$$\Delta g=\frac{8\varepsilon_0 A}{md^2}V_C\Delta V \tag{21}$$

通过测量 V_C 和ΔV 即可获得重力加速度的微小变化Δg**.**

四、汽车以发动机气缸中的空气与汽油发生燃烧产生动力，发动机的输出功率与进入气缸中的空气质量成正比．为了提高动力，很多汽车加装了涡轮增压器，在空气进入发动机气缸之前对它进行压缩，以增加空气密度；为了进一步提高空气密度，还通过一个中间冷却器，使空气温度降低后再进入气缸．在一个典型的装置中，进入涡轮增压器的初始空气压强为一个大气压 $p_0 = 1.01\times10^5$ Pa，温度 $T_0 = 15$°C；通过涡轮增压器后，空气绝热压缩至 $p_1 = 1.45\times10^5$ Pa；然后又通过中间冷却器，让空气等压地降至初始温度 T_0 并充满气缸. 假设空气为理想气体，已知气缸容积 $V_0 = 400$ cm^3，空气摩尔质量 $M = 29.0$ g·mol^{-1}，摩尔热容比 $\gamma = 7/5$；普适气体常量 $R = 8.31$ J·K^{-1}·mol^{-1}.

1）求此时气缸内空气的质量；与未经增压和冷却的情形相比，发动机的输出功率增加到多少倍？

2）如果没有中间冷却器，仅经过涡轮增压器把空气压缩后输入到气缸中，相应的空气质量为多少？与未经增压的情形相比，发动机输出功率增加到多少倍？

3）在经过涡轮增压器和中间冷却器的热力学过程中，求外界对进入气缸的气体所做的功、及气缸中的气体在上述两个过程中各自的熵变.

参考解答：

1）按题设，假设空气可视为理想气体，由理想气体状态方程有

$$PV = \nu RT \tag{1}$$

其中，(p,V,T) 为气体的一组状态参量，分别表示气体的压强、体积和温度；m 和 M 分别为气体的质量和摩尔质量，$\nu = \dfrac{m}{M}$ 是气体的摩尔数. 此状态下气体的密度为

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \tag{2}$$

由(2)式可算得空气处于初始状态 (p_0,V_0',T_0) 的密度

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} = \frac{1.01\times10^5\times29.0\times10^{-3}}{8.31\times288.15} = 1.22\ \text{kg/m}^3 \tag{3}$$

初始状态 (p_0,V_0',T_0) 的空气经过涡轮增压器后，状态变为 (p_1,V_1,T_1)，密度变为 ρ_1；经中间冷却器等压降温后，状态变为 $(p_2 = p_1, V_2 = V_0, T_2 = T_0)$．气缸中空气的质量为

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho_1 V_1 = \frac{p_1 M}{RT_1}V_1 = \frac{p_1 M}{RT_0}V_0 = \frac{p_1}{p_0}\rho_0 V_0 \\ &= \frac{1.45\times10^5}{1.01\times10^5}\times1.22\times400\times10^{-6}\ \text{kg} = 0.703\times10^{-3}\ \text{kg} \end{aligned} \tag{4}$$

推导中应用了等压过程方程 $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_0}{T_0}$ 和(3)式. 若不经过涡轮增压器和中间冷却器两个步骤，直接把外界空气压入气缸中，

$$m_0 = \rho_0 V_0 = 1.22\times400\times10^{-6}\ \text{kg} = 0.490\times10^{-3}\ \text{kg} \tag{5}$$

气缸的输出功率增加到的倍数为

$$R_1 = \frac{\dfrac{m_1}{V_0}}{\dfrac{m_0}{V_0}} = \frac{m_1}{m_0} = \frac{0.703\times10^{-3}}{0.490\times10^{-3}} = 1.43 \tag{6}$$

2）不经过中间冷却器，直接使用经涡轮增压器压缩后的空气. 此时，空气的温度已经升高

至 T_1，相应的体积为变为 V_1，利用绝热过程方程，

$$PV^{\gamma}=\text{const.} \tag{7}$$

和(1)式，可求出气体在此状态 (p_1,V_1,T_1) 下的温度和体积

$$T_1 = T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{8}$$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1}=\frac{nR}{p_1}T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{9}$$

再利用(2)式，该状态下的空气密度 ρ_1 为

$$\rho_1=\rho_0\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_0}\right)=\rho_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)=\rho_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\gamma} \tag{10}$$

相应地，输入到气缸中的空气质量为

$$m_1'=\rho_1 V_0=1.22\times\left(\frac{1.45\times10^5}{1.01\times10^5}\right)^{5/7}\times400\times10^{-6}\ \text{kg}=0.632\times10^{-3}\ \text{kg} \tag{11}$$

气缸的输出功率增加到的倍数为

$$R_2=\frac{\rho_1}{\rho_0}=\frac{m_1'}{m_0}=\left(\frac{1.45\times10^5}{1.01\times10^5}\right)^{5/7}=1.295=1.30 \tag{12}$$

3）分别考虑气体经过涡轮增压器和中间冷却器两个过程中外界对气体所做的功. 涡轮增压为绝热压缩过程，从(4)式得,进入涡轮增压器的空气摩尔数为，

$$\nu=\frac{m_1}{M}=\frac{0.703}{29.0}=0.02424\text{mol} \tag{13}$$

据题设，$\gamma=\frac{7}{5}$，故

$$\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{C_V+R}{C_V}=\frac{7}{5}\ ,\quad C_V=\frac{5}{2}R \tag{14}$$

式中 C_V 和 C_p 分别表示气体的定容摩尔热容量和定压摩尔热容量. 由(14)式可知，空气为双原子分子混合物. 对于绝热过程，由热力学第一定律有

$$\Delta Q=\Delta U+A=0\ , \tag{15}$$

此绝热压缩过程中外界做功 W_1 为

$$W_1=-A=\Delta U=\nu C_{\text{V}}(T_1-T_0) \tag{16}$$

由(8)(16)式和相关数据得

$$W_1=0.02424\times\frac{5}{2}\times8.31\times288.00\times\left(\left(\frac{1.45\times10^5}{1.01\times10^5}\right)^{0.40/1.40}-1\right)\text{J}=15.78\ \text{J} \tag{17}$$

[另一种解法：

直接由功的定义式 $\int P\text{d}V$ 和绝热过程方程 $pV^{\gamma}=\text{const.}$，得

$$W_1=-\int_{p_0}^{p_1}p\mathrm{d}V=\frac{1}{\gamma}\int_{p_0}^{p_1}V\mathrm{d}p=\frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}}V_1}{\gamma}\int_{p_0}^{p_1}p^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}p$$

$$=\frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}}V_1}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)=\frac{p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}nRT_1}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma\text{-}1}\right)\left(p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

将(8)式的 T_1 代入上式得

$$W_1=\left(\frac{\nu RT_0}{\gamma-1}\right)\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)=\left(\frac{\nu RT_0}{\gamma-1}\right)\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right] \qquad (16)$$

代入相关数据得

$$W_1=\frac{0.02424\times8.31\times288.0}{0.4}\left(\left(\frac{1.45\times10^5}{1.01\times10^5}\right)^{0.40/1.40}-1\right)\text{ J}=15.78\text{ J} \qquad (17)$$

]

气体经过中间冷却器的过程是等压降温过程，外界对气体的做功为

$$W_2=-p_1(V_0-V_1) \qquad (18)$$

其中，V_1 由(9)式确定

$$V_1=\frac{\nu R}{p_1}T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\frac{0.02424\times8.31\times288.0}{1.45\times10^5}\times1.1088\text{ m}^3=4.436\times10^{-4}\text{ m}^3 \qquad (19)$$

将(19)式代入(18)式，并利用相关数据得

$$W_2=-1.45\times10^5\times(4.000\times10^{-4}-4.436\times10^{-4})\text{ J}=6.32\text{ J} \qquad (20)$$

从而，经过涡轮增压器（绝热压缩过程）和中间冷却器（等压降温过程）两个过程，外界对气体做的总功为，

$$W=W_1+W_2=15.78\text{ J}+6.32\text{ J}=22.1\text{ J} \qquad (21)$$

气体经过涡轮增压器（绝热压缩过程）的熵变为

$$\Delta S_1=\int_{\text{绝热}}\frac{\mathrm{d}Q}{T}=0 \qquad (22)$$

气体经过中间冷却器（等压降温过程）的熵变为

$$\Delta S_2=\int_{\text{冷却}}\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\int_{T_1}^{T_0}\frac{\nu C_\mathrm{p}\mathrm{d}T}{T}=\nu C_\mathrm{p}\ln\frac{T_0}{T_1}=-\frac{7\nu R}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\ln\frac{p_1}{p_0}=-\nu R\ln\frac{p_1}{p_0}=-0.07284\text{ J/K} \qquad (23)$$

［另一种算法：

$$\Delta S_2=\int_{\text{绝热+冷却}}\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\int_{\text{等温}}\frac{p\mathrm{d}V}{T}=\int_{V_0'}^{V_0}\frac{\nu R\mathrm{d}V}{V}=-\nu R\ln\frac{V_0'}{V_0}=-\nu R\ln\frac{p_1}{p_0}=-0.07284\text{ J/K}$$

推导中应用了等温过程方程 $p_0V_0'=p_2V_2=p_1V_0$ ．

]

五、2018 年诺贝尔物理学奖的一部分授予美国科学家阿瑟·阿什金对光捕获（光镊）所做的开创性工作. 光镊是用聚焦的激光束实现对微小颗粒的捕获，图 a 所示为一种光镊实验装置示意图. He-Ne 激光器输出波长 $\lambda = 632.8\ \text{nm}$ 的激光，光束直径 $D_1 = 1.5\ \text{mm}$，输出功率 $P = 30\ \text{mW}$. 为了使得捕获效果更好，可在输出的激光束后加一个扩束镜. 激光束经反射镜反射后入射到一个焦距 $f = 4.0\ \text{mm}$ 的聚焦物镜，聚焦物镜将光束汇聚于样品池内蒸馏水液体中，样品池内液体中有一定数量的聚苯乙烯小球，聚苯乙烯小球经过激光聚焦光斑时有可能被光捕获. 已知小球的直径 $D_\text{b} = 2.0\ \mu\text{m}$，密度为 $\rho_\text{b} = 1.0\times10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，样品池光学玻璃材料折射率 $n_\text{g} = 1.46$，池内蒸馏水折射率 $n_\text{w} = 1.33$，样品池底部玻璃厚度 $d = 1.0\ \text{mm}$，池底部外表面到聚焦物镜中心的距离 $a = 2.0\ \text{mm}$ 实验时温度 $T = 300\ \text{K}$，空气折射率 $n_\text{a} = 1.0$，重力加速度 $g = 9.80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，玻尔兹曼常量 $k_\text{B} = 1.38\times10^{-23}\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

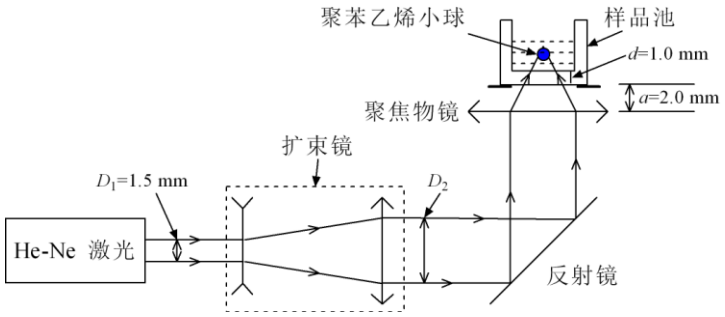


图 a

1）求不加扩束镜时激光束在空气中经聚焦物镜聚焦后聚焦光斑的直径；

2）为了提高捕获效果，对输出激光束进行扩束，采用的扩束镜由一个焦距 $f_1 = -6.3\ \text{mm}$ 的凹透镜和焦距 $f_2 = 25.2\ \text{mm}$ 的凸透镜组成，求两个透镜之间的距离和扩束后的平行激光束的直径 D_2；

3）将扩束后的激光束经图 a 所示聚焦物镜聚焦于样品池内蒸馏水中，求在傍轴近似下聚焦光斑中心到样品池底部内表面距离和聚焦光斑的直径；

4）图 b 为浸没在蒸馏水中的小球在梯度光强（简化成强度不同的两束光）中受力的几何光学模型，入射光线 L_1 和 L_2 沿 x 轴方向，其光功率分别为 $p_1 = 1.0\ \text{mW}$ 和 $p_2 = 2.0\ \text{mW}$，光线经小球折射后其方向与 x 轴的夹角如图 b 所示，不考虑光线在传播过程中的吸收和反射损耗，求小球在 x 方向和 y 方向所受到的力，并分别求其与小球重力之比；

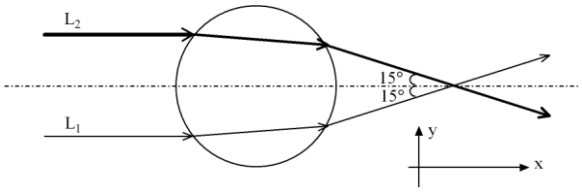


图 b. 小球在梯度光强中的受力分析简化模型

5）求室温（300 K）下蒸馏水中小球的方均根速率；

6）光镊也可以通过光势阱模型理解，平行激光束经透镜聚焦后在径向 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 的光势阱分布为

$$U(r)=\begin{cases}-U_0\left(1-\dfrac{r^2}{b^2}\right), & \text{当} r\le b\\ 0, & \text{当} r>b\end{cases}$$

上式中，$U_0=0.078\ \text{eV}$，b 是常量，r 是到对称轴的距离. 试问速率不超过多大的小球才能被光势阱捕获？

7）已知聚苯乙烯小球的速率分布函数可表示为：

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_{\text{B}}T}\right)^{\frac{3}{2}}v^2e^{-\frac{mv^2}{2k_{\text{B}}T}}$$

式中，m 和 v 分别是小球的质量和速率，T 是绝对温度；试分析比较质量分别为 m 和 $2m$ 的聚苯乙烯小球被光势阱捕获的概率大小.

参考答案：

1）He-Ne 激光器输出激光的波长 $\lambda=632.8\ \text{nm}$；聚焦物镜焦距 $f=4.00\ \text{mm}$. 当输出激光束截面直径 $D_1=1.50\ \text{mm}$ 时，聚焦光斑大小受到圆孔衍射限制，其光斑大小为

$$D_{\text{o1}}=\frac{2\times1.22\lambda}{R_1}f=\frac{2\times1.22\times0.6328\mu\text{m}}{1.50\text{mm}}\times4.00\text{mm}=4.12\mu\text{m}\quad(1)$$

2）扩束镜由一个焦距 $f_1=-6.3\ \text{mm}$ 的凹透镜和焦距 $f_2=25.2\ \text{mm}$ 的凸透镜组成，两个透镜距离为：

$$l=f_1+f_2=-6.3\ \text{mm}+25.2\ \text{mm}=18.9\ \text{mm}\quad(2)$$

扩束后，激光束得直径为：

$$R_2=\frac{f_2}{-f_1}R_1=\frac{25.2}{6.3}\times1.5\ \text{mm}=6.0\ \text{mm}\quad(3)$$

3）在傍轴近似下，样品池中聚焦点位置可以通过二次折射成像公式求得. 利用折射成像公式，扩束后的激光束经聚焦物镜进入样品池底部玻璃表面时，首先在样品池底部外表面一次成像，其成像位置 i_1 满足

$$\frac{n_{\text{a}}}{o_1}+\frac{n_{\text{g}}}{i_1}=\frac{n_{\text{g}}-n_{\text{a}}}{r_1}\quad(4)$$

式中，o_1 为物距，由于底部外表面距离聚焦物镜 $x=2\ \text{mm}$，聚焦物镜焦距 $f=4.0\ \text{mm}$，所以 $o_1=-2\ \text{mm}$，$r_1=\infty$，由此得

$$i_1=-\frac{n_{\text{g}}}{n_{\text{a}}}o_1=1.46\times2\ \text{mm}=2.92\ \text{mm}\quad(5)$$

激光束在样品池底部内表面二次折射成像的位置 i_2 满足

$$\frac{n_{\text{g}}}{o_2}+\frac{n_{\text{w}}}{i_2}=\frac{n_{\text{w}}-n_{\text{g}}}{r_2}\quad(6)$$

式中，o_2 为物距，在这里相对于底部内表面，$o_2=o_1-h=2.92-1=1.92\ \text{mm}$，由于此时物是虚的，所以 o_2 取负值，也就是 $o_2=-1.92\ \text{mm}$，$r_2=\infty$，由此得

$$i_1=-\frac{n_{\text{w}}}{n_{\text{g}}}o_2=\frac{1.33}{1.46}\times1.92\ \text{mm}=1.75\ \text{mm}\quad(7)$$

样品池中聚焦点位置到样品池底部内表面的距离为 1.75 mm.

扩束后激光束直径 $D_2 = 6.0$ mm，经聚焦透镜聚焦于样品池内蒸馏水中时，由几何关系可知，在样品池底部外表面光束直径等于 $D_2/2$，在样品内表面光束直径可以表示为

$$D_{\mathrm{W}} = \frac{D_2}{2}\frac{2n_{\mathrm{g}}-1}{2n_{\mathrm{g}}} = 1.97\ \mathrm{mm} \tag{8}$$

液体中激光焦点处光斑的直径为

$$D_{o2} = \frac{2\times 1.22\lambda}{n_{\mathrm{W}} D_{\mathrm{W}}} i_2 = \frac{2\times 1.22\times 0.6328\mu\mathrm{m}}{1.33\times 1.97\ \mathrm{mm}} \times 1.75\ \mathrm{mm} = 1.03\ \mu\mathrm{m} \tag{9}$$

[或

$$D_{o2} = \frac{2\times 1.22\lambda}{n_{\mathrm{a}} D_2} f = \frac{2\times 1.22\times 0.6328\mu\mathrm{m}}{1.0\times 6.0\ \mathrm{mm}} \times 4.0\mathrm{mm} = 1.03\ \mu\mathrm{m} \tag{9}$$

实际上，

$$D_{o2} = \frac{2\times 1.22\lambda}{D_{\mathrm{W}}}\frac{i_2}{n_{\mathrm{W}}} = \frac{2\times 1.22\lambda}{\left(\frac{-o_1}{f}D_2\right)\frac{n_{\mathrm{a}} i_2}{n_{\mathrm{W}}(-o_1)}}\frac{i_2}{n_{\mathrm{W}}} = \frac{2\times 1.22\lambda}{n_{\mathrm{a}} D_2} f$$

]

分别考虑光线在样品池底部内外表面折射对光斑大小影响，光在样品池内外表面的放大倍数分别为

$$V_1 = -\frac{n_a i_1}{n_g o_1} = \frac{2.92}{1.46\times 2} = 1 \tag{9}$$

$$V_2 = -\frac{n_g i_2}{n_w o_2} = \frac{1.46\times 1.75}{1.33\times 1.92} = 1 \tag{10}$$

所以样品池底部内外表面折射对聚焦光斑大小的影响实际上可忽略**.**

4）在蒸馏水中，功率为 P 的光束在 Δt 时间内携带的动量可以表示为：

$$p = N\frac{h}{\lambda_{\mathrm{W}}} = \frac{p\Delta t}{h\nu}\frac{n_{\mathrm{W}} h}{\lambda} = \frac{p n_{\mathrm{W}}\Delta t}{c} \tag{11}$$

式中 N 是在 Δt 时间内通过光束横截面的光子数. 光束 L_1 的初始动量为：

$$\boldsymbol{p}_{1i} = \frac{p_1 n_{\mathrm{W}}\Delta t}{c}\boldsymbol{i} \tag{12}$$

这里 $\boldsymbol{i}$ 是 x 轴方向的单位矢量. 光束 L_2 的初始动量为：

$$\boldsymbol{p}_{2i} = \frac{p_2 n_{\mathrm{W}}\Delta t}{c}\boldsymbol{i} \tag{13}$$

经小球两次折射后，光束 L_1 的动量为：

$$\boldsymbol{p}_{1f} = \frac{p_1 n_{\mathrm{W}}\Delta t}{c}\cos 15°\boldsymbol{i} + \frac{p_1 n_{\mathrm{W}}\Delta t}{c}\sin 15°\boldsymbol{j} \tag{14}$$

经小球两次折射后，光束 L_2 的动量为：

$$\boldsymbol{p}_{2f} = \frac{p_2 n_{\mathrm{W}}\Delta t}{c}\cos 15°\boldsymbol{i} - \frac{p_2 n_{\mathrm{W}}\Delta t}{c}\sin 15°\boldsymbol{j} \tag{15}$$

经小球折射后，光束动量的改变为

$$\Delta \boldsymbol{p}_l = (\boldsymbol{p}_{1f} + \boldsymbol{p}_{2f}) - (\boldsymbol{p}_{1i} + \boldsymbol{p}_{2i})$$
$$= \frac{(p_1 + p_2)(\cos 15° - 1) n_{\mathrm{W}} \Delta t}{c} \boldsymbol{i} + \frac{(p_1 - p_2) \sin 15° n_{\mathrm{W}} \Delta t}{c} \boldsymbol{j} \tag{16}$$

小球动量的改变为

$$\Delta \boldsymbol{p}_{\mathrm{b}} = -\Delta \boldsymbol{p}_l = \frac{(p_1 + p_2)(1 - \cos 15°) n_{\mathrm{W}} \Delta t}{c} \boldsymbol{i} + \frac{(p_2 - p_1) \sin 15° n_{\mathrm{W}} \Delta t}{c} \boldsymbol{j} \tag{17}$$

小球受到的光力（光强梯度力）作用：

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}_{\mathrm{b}}}{\Delta t} = \frac{(p_1 + p_2)(1 - \cos 15°) n_{\mathrm{W}}}{c} \boldsymbol{i} + \frac{(p_2 - p_1) \sin 15° n_{\mathrm{W}}}{c} \boldsymbol{j} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} = (0.45\boldsymbol{i} + 1.15\boldsymbol{j}) \times 10^{-12}\ \mathrm{N} \tag{19}$$

在光强梯度力作用下，小球分别受到一个沿 x 正方向和 y 正方向的力.

小球重力大小为

$$mg = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D_{\mathrm{b}}}{2} \right)^3 \rho_{\mathrm{b}} = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 1.0 \times 10^{-18} \times 10^3 \times 9.8 = 4.11 \times 10^{-14}\ \mathrm{N} \tag{20}$$

小球在 x 方向和 y 方向所受到的光力与其重力之比分别为：

$$\eta_x = \frac{0.45 \times 10^{-12}}{4.11 \times 10^{-14}} = 10.9 \tag{21}$$

$$\eta_y = \frac{1.15 \times 10^{-12}}{4.11 \times 10^{-14}} = 28.0 \tag{22}$$

5）在水中，常温（300 K ）下，小球的平均动能为

$$E_k = \frac{3}{2} kT = 1.5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21}\mathrm{J} \tag{23}$$

小球的方均根速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{4.19 \times 10^{-15}}} = \sqrt{\frac{12.42 \times 10^{-6}}{4.19}} = 1.72 \times 10^{-3}\mathrm{m/s} \tag{24}$$

6）设速率不超过 v_m 的小球才能被光势阱捕获，由能量守恒有

$$\frac{1}{2} m v_m^2 + U_{\min} = 0 \tag{25}$$

式中

$$U_{\min} = -U_0 \left(1 - \frac{y^2}{4} \right)_{y=0} = -U_0 \tag{27}$$

由(25)(26)式得，最大捕获速度为

$$v_m = \sqrt{\frac{2U_0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 78 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19}}{4.19 \times 10^{-15}}} = \sqrt{\frac{24.96 \times 10^{-6}}{4.19}} = 2.44 \times 10^{-3}\mathrm{m/s} \tag{28}$$

7）聚苯乙烯小球能够被捕获的概率可表示为

$$P = \int_0^{v_m} f(v)\mathrm{d}v = \int_0^{v_m} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}} \mathrm{d}v \tag{29}$$

设

$$v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m}} \tag{30}$$

有

$$P=\int_0^{v_m}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{v_{\mathrm{p}}}\right)^2 e^{-\frac{v^2}{v_{\mathrm{p}}^2}}\mathrm{d}\left(\frac{v}{v_{\mathrm{p}}}\right) \tag{31}$$

令

$$x=\frac{v}{v_{\mathrm{p}}}$$

聚苯乙烯小球被被光势阱捕获的概率可表示为

$$P=\int_0^{\sqrt{U_0/kT}}\frac{4}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{32}$$

由(31)式可知，概率 P 与 U_0 和温度 T 有关，而与 m 无关. 因此，质量为 m 的聚苯乙烯小球和质量为 $2m$ 的聚苯乙烯小球被光势阱捕获的概率 P_m 和 P_{2m} 相等，即

$$P_m=P_{2m} \tag{33}$$

六、仰望星空可以激发人们无限的想象. 随着科学与技术的进步，人们对宇宙的认识不断加深，随着中微子丢失之谜的破解，引力波的直接探测，以及近期黑洞照片的拍摄，引起了大众对探索宇宙的广泛兴趣. 人类是如何利用有限设备观察研究浩瀚的宇宙以及宇宙重要组成部分——恒星的呢？具有高中物理基础的公众是否有可能定量理解恒星的内外性质，如大小、质量、年龄、寿命、组成部分、产能机制等等？本题以我们赖以生存的恒星——太阳为例，按照历史脉络，试从简单到复杂构建起太阳模型. 由于不能直接观察太阳内部，所建的模型需要多角度的检验，如年龄、半径、表面温度、能量输出、中微子通量等等，都需要在同一个模型下相互自洽.

已知地球半径为 6370 km，万有引力常量 $G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$，斯忒藩-玻尔兹曼常量 $\sigma = 5.67\times10^{-8}\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$，玻尔兹曼常量 $k_\mathrm{B} = 1.38\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$，电子电量 $e = 1.602\times10^{-19}$ C，电子质量 $m_\mathrm{e} = 0.51\ \mathrm{MeV}/c^2$， 质子质量 $m_\mathrm{p} = 938.3\ \mathrm{MeV}/c^2$，氘核质量 $m_\mathrm{D} = 1875.6\ \mathrm{MeV}/c^2$， ^{3}He 核质量 $m_{^3\mathrm{He}} = 2808.4\ \mathrm{MeV}/c^2$，^{4}He 核质量 $m_{^4\mathrm{He}} = 3727.5\ \mathrm{MeV}/c$，光在真空中的速度 $c = 3.00\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1）成书于两千多年前的《周髀算经》（原名《周髀》）介绍了测量太阳直径 D 与日地距离 $S_{日地}$（也称 1 个天文单位）比值的方法：取一根长竹竿，凿去竹节使其内部贯通，竹竿的内直径为 d. 用这根竹竿对准太阳，改变竹竿长度 L，使太阳盘面刚好充满竹竿内管.

i）给出太阳视角（$\Phi = D / S_{日地}$）与 d 和 L 的关系；

ii）为了减少误差需要 L 足够长，此外还有哪些方法可以减少误差？

iii）测得 $d = 1$寸， $L = 8$尺 (10 寸为一尺)，试估算 Φ 的值.

2）在某些特殊时间（如 2012 年 6 月 6 日），地球、金星和太阳几乎在一条直线上，这时从地球上观测，金星就像一个小黑点镶嵌在太阳盘面上，并缓慢移动，这称为金星凌日，如图 a 所示. 英国天文学家哈雷曾在 1716 年建议在世界各地联合观察金星凌日以测量太阳视角和日地距离. 已知地球和金星同向绕日公转周期分别为 365.256 天和 224.701 天，各自的轨道平面之间的倾角很小. 不考虑地球自转.

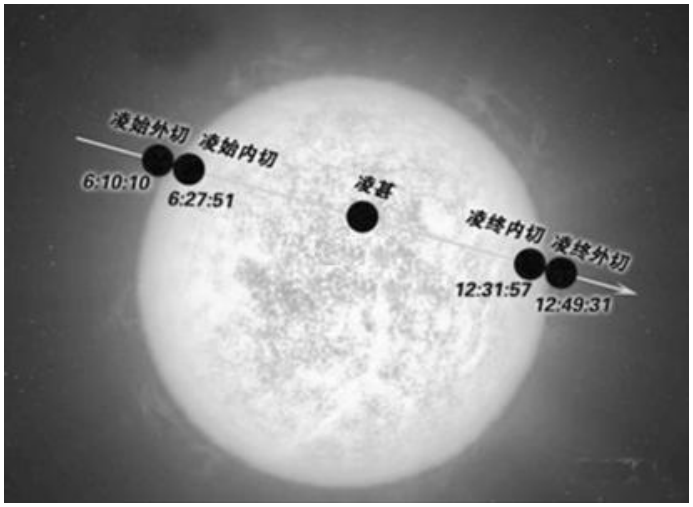


图 a. 2012 年 6 月 6 日金星凌日过程示意图

i）地球和金星的公转轨道均可视为圆，求日金距离 $S_{日金}$ 与日地距离 $S_{日地}$ 之比 r_VE；

ii）2012 年 6 月 6 日，某地观察到金星凌日现象如图 a，试计算金星凌日扫过太阳盘面弦长 D_P 与日地距离 $S_{日地}$ 的比值；若此弦与盘面圆心之间的距离是 h_p=5D/16，则太阳视角 Φ 为多少？

iii）为了测量日地距离需要在地球表面不同地点分别观察金星凌日现象，如图 b 所示. 假设在地面同一经度上直线距离（在垂直于观测方向上的投影）为 H 的两位观察者 P 和 P'同时观察金星凌日现象，对于 P 而言，金星在太阳盘面上的运动轨迹为 AB，观察到的金星凌日时间（金星中心扫过太阳盘面的时间间隔）为 t_{p}；而对于 P'而言，金星在太阳盘面上的运动轨迹为 A'B'，观察到的金星凌日时间为 $t_{\mathrm{p}'}$. 试求日地距离 $S_{\text{日地}}$ 的表达式（用 Φ、r_{VE}、$T_{\text{地}}$、$T_{\text{金}}$、t_{p}、$t_{\mathrm{p}'}$ 和 H 等表示）.

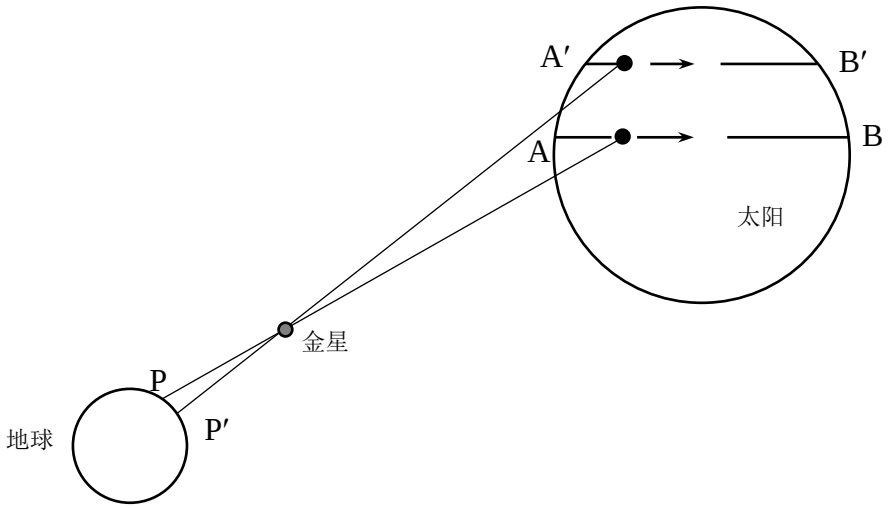


图 b. 金星凌日示意图

iv）已知北京和香港的纬度分别为 39.5° 和 22.5°， 2012 年 6 月 6 日北京和香港的金星凌日时间分别为 $t_{\mathrm{p}}=6:21:57$ 和 $t_{\mathrm{p}'}=6:19:31$，试以此数据，利用 iii）小题的结论，计算日地距离 $S_{\text{日地}}$

3）1882 年的金星凌日观测结果得出平均日地距离 $S_{\text{日地}}=1.5\times10^{8}\,\mathrm{km}$，太阳直径 D=1.4×10^{6} km. 地球在垂直于太阳辐射方向上接收到的太阳辐射照度 $I=1.37\ \mathrm{kW\cdot m^{-2}}$. 求

i）单位时间内，地球从太阳接收到的总能量；

ii）全球 70 亿人口消耗掉的能源与地球接收到的太阳能量之比（按人均年消耗能源 3 吨标准煤，1kg 标准煤可以发电 4 度电计算）；

iii）太阳单位时间辐射的总能量；

iv）估算太阳表面温度 .

4）i） 计算太阳的总质量与平均密度；

ii）若太阳能源来自化学反应，设单位质量放出的能量与煤相当，则以太阳现在单位时间辐射的能量计算，可以持续多久？太阳作为恒星存在约 50 亿年以上，那么其产能效率应该是化学反应效率的多少倍？

5）通过光谱分析可知太阳的主要成分是氢，涉及氢的基本核聚变反应式如下

$$\mathrm{P + P \rightarrow D + e^{+} + \nu_e} \qquad \text{（a）}$$

$$\mathrm{D + P \rightarrow {}^{3}He + \gamma} \qquad \text{（b）}$$

$$\mathrm{{}^{3}He + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He + P + P} \qquad \text{（c）}$$

上述核聚变反应过程中产生的正电子将会湮灭，中微子将逃逸；原子核均带正电，相互排斥，只有温度很高时，其动能有可能克服库仑排斥力，从而实现聚变反应. 当温度足够高时，所有原子均电离成了原子核和电子，处于等离子体状态.（在此不考虑中微子带走的能量，也不考虑由于太阳风带走的未聚变的氢. ）

i）要维持太阳的辐射，单位时间需要消耗多少个质子（氢核）？

ii）现在太阳质量的 71%是氢，按照此消耗速率，最多还可以维持多少年？并计算单位时间质子-质子的反应概率（单位时间反应的粒子数与总粒子数之比）P_{PP}；

iii）逃逸出的中微子的数目在传播过程中不会减少，单位时间在垂直于太阳辐射方向

上单位面积内有多少中微子到达地球？（实际到达地球的电子中微子数量只有理论值的35%，但加上另外二类中微子的数量，则与理论值相符，表明有部分电子中微子在传播过程中转换成为其他类中微子，这与中微子振荡有关，相关成果获 2002 年和 2015 年诺贝尔物理学奖. ）

iv）单位时间太阳由于辐射减少多少质量？

6）聚变反应的概率 P 与等离子体的温度 T 有关，且粒子数密度（单位体积中的粒子数）n 越高反应概率越高，有关系式 $P=nR(T)$，其中 $R(T)$ 称为反应率. 图 c 给出了三种聚变的反应率与温度的关系，试估算能够产生核聚变反应的太阳核心区域（其半径约为太阳半径的四分之一）温度下限.

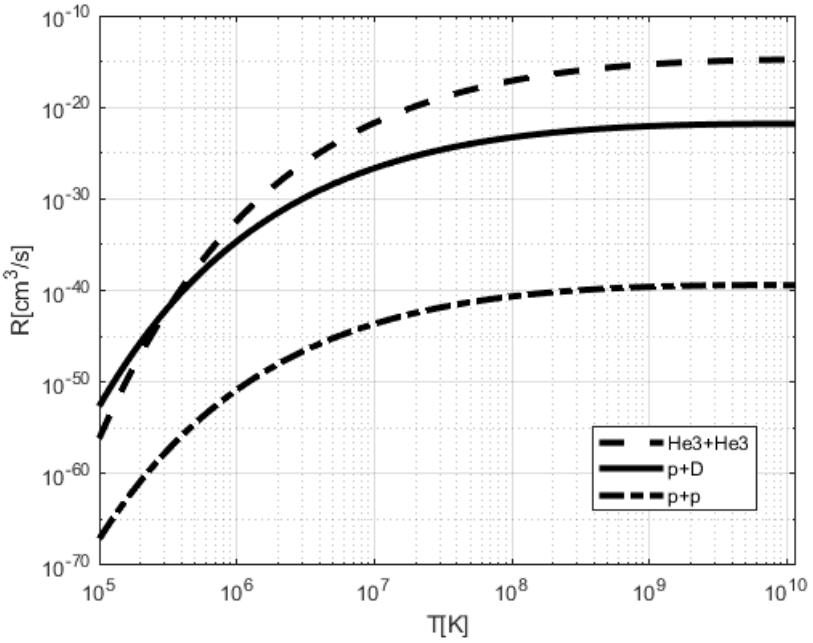


图 c. 反应率与温度的关系曲线

7）估算单个中微子带走的最大能量，并估计第 5）小题由于忽略中微子带走的能量所造成的辐射能量计算的最大相对误差？

8）从前面的计算可知，太阳的质量逐渐减少，那么地球绕太阳公转的周期和平均轨道半径也将变化，试计算

i）一亿年内由于辐射引起的质量减少量 ΔM；

ii）由此引起的地球公转周期的变化量.

参考解答:

1） i） $\Phi = \dfrac{D}{S_{\text{日地}}} = \dfrac{d}{L}$ (1)

ii）主要误差来自于是否刚好充满竹竿内管，可以在竹竿圆孔前加一半径可调的遮挡圆盘，原理类似于日冕仪.

iii） $\Phi = \dfrac{1}{80}$ （目前准确值为 $\dfrac{1}{109}$ ） (2)

2） i）由万有引力定律

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \qquad (3)$$

（或直接由开普勒第三定律得）可得

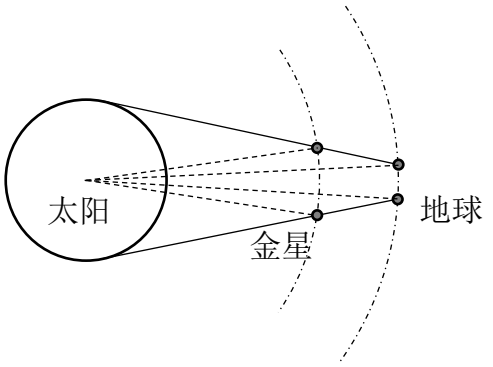
$$r_{\text{VE}} = \frac{S_{\text{日金}}}{S_{\text{日地}}} = \left(\frac{T_{\text{金}}}{T_{\text{地}}}\right)^{2/3} = 0.72 \qquad (4)$$

ii）凌日开始时，即在凌始点，地球与金星的连线相切于太阳盘面，经过凌日时间 t_{P} 后，即在凌终点，地球与金星的连线相切于太阳盘面的另一边，如解题图 a 所示. 忽略地球和金星各自的轨道平面相互之间成很小的倾角，并利用小角度近似，有

$$\frac{D_{\text{P}}}{S_{\text{日金}}} = \frac{D_{\text{P}}}{S_{\text{日地}}} + 2\pi\left(\frac{t_{\text{P}}}{T_{\text{金}}} - \frac{t_{\text{P}}}{T_{\text{地}}}\right) \qquad (5)$$

由此得

$$\frac{D_{\text{P}}}{S_{\text{日地}}} = \frac{r_{\text{VE}}}{1-r_{\text{VE}}} 2\pi t_{\text{P}}\left(\frac{1}{T_{\text{金}}} - \frac{1}{T_{\text{地}}}\right) \qquad (6)$$



解题图 a

由图 a 可读出

$$t_{\text{P}} = 6{:}21{:}47 = 6.36\text{h} = 0.265\text{d}$$

将(4)式和上述数据代入(6)式得

$$\frac{D_{\text{P}}}{S_{\text{日地}}} = \frac{1.44}{0.28}\pi\left(1.18\times10^{-3} - 0.72\times10^{-3}\right) = 7.4\times10^{-3} = \frac{1}{135}$$

设弦离圆心的距离为 h_{P}，由几何关系得

$$h_{\text{P}} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - D_{\text{P}}^2} \qquad (7)$$

已知 $h_{\text{P}} = 5D/16$，由(7)式得

$$D = 1.28D_{\text{P}}$$

太阳视角为

$$\Phi = \frac{D}{S_{\text{日地}}} = \frac{1.28}{135} = \frac{1}{105} \qquad (8)$$

iii）从(6)式可知， 凌日扫过的弦长 D_{P} 正比于凌日时间 t_{P}

$$\frac{D_{\mathrm{P}}}{S_{\text{日地}}}=\frac{r_{\mathrm{VE}}}{1-r_{\mathrm{VE}}}2\pi\left(\frac{1}{T_{\text{金}}}-\frac{1}{T_{\text{地}}}\right)t_{\mathrm{P}}=2.57\mathrm{s}^{-1}\times t_{\mathrm{P}} \qquad (9)$$

由(7)式得， D_{P} 与 $D_{\mathrm{P}'}$ 对金星所张的角为

$$\Theta=\frac{h_{\mathrm{P}}-h_{\mathrm{P}'}}{S_{\text{日金}}}=\frac{1}{2r_{\mathrm{VE}}}\left(\sqrt{\frac{D^2}{S_{\text{日地}}^2}-\frac{D_{\mathrm{P}}^2}{S_{\text{日地}}^2}}-\sqrt{\frac{D^2}{S_{\text{日地}}^2}-\frac{D_{\mathrm{P}'}^2}{S_{\text{日地}}^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2r_{\mathrm{VE}}}\left(\sqrt{\Phi^2-\left(\frac{2\pi r_{\mathrm{VE}}t_{\mathrm{P}}}{1-r_{\mathrm{VE}}}\right)^2\left(\frac{1}{T_{\text{金}}}-\frac{1}{T_{\text{地}}}\right)^2}-\sqrt{\Phi^2-\left(\frac{2\pi r_{\mathrm{VE}}t_{\mathrm{P}'}}{1-r_{\mathrm{VE}}}\right)^2\left(\frac{1}{T_{\text{金}}}-\frac{1}{T_{\text{地}}}\right)^2}\right)$$

由小角度（见解题图 b）近似得

$$\Theta=\frac{H}{S_{\text{日地}}-S_{\text{日金}}}=\frac{H}{S_{\text{日地}}(1-r_{\mathrm{VE}})}$$

式中 H 是地面同一经度上两位观察者 P 和 P'之间的直线距离（在垂直于观测方向上的投影）. 上述两式右边相等，可得

$$S_{\text{日地}}=\frac{2r_{\mathrm{VE}}H}{1-r_{\mathrm{VE}}}\left(\sqrt{\Phi^2-\left(\frac{2\pi r_{\mathrm{VE}}t_{\mathrm{P}}}{1-r_{\mathrm{VE}}}\right)^2\left(\frac{1}{T_{\text{金}}}-\frac{1}{T_{\text{地}}}\right)^2}-\sqrt{\Phi^2-\left(\frac{2\pi r_{\mathrm{VE}}t_{\mathrm{P}'}}{1-r_{\mathrm{VE}}}\right)^2\left(\frac{1}{T_{\text{金}}}-\frac{1}{T_{\text{地}}}\right)^2}\right)^{-1} \qquad (10)$$

iv）北京的纬度为39.5°，香港的纬度为22.5°， 对应的地面两纬线之间最短距离为

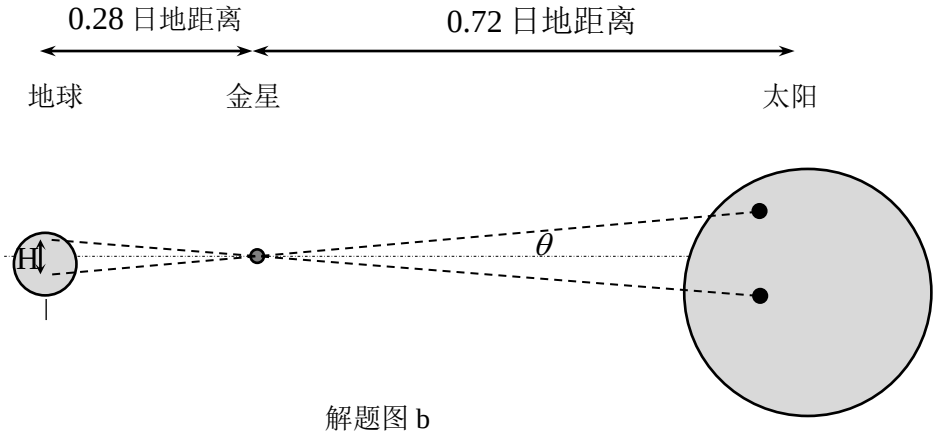
$$H=\frac{17^\circ}{180^\circ}\times\pi\times 6370\mathrm{km}=1900\mathrm{km} \qquad (11)$$

北京: 凌始外切 6:10:00, 凌终内切 12：31:57，因而

$$t_{\mathrm{P}}=6\text{:}21\text{:}57$$

香港：凌始外切 6:11:48, 凌终内切 12：31:19，因而

$$t_{\mathrm{P}'}=6\text{:}19\text{:}31$$



解题图 b

将相关数据代入(10)式得

$$S_{\text{日地}}=1.6\times10^8\ \mathrm{km} \qquad (12)$$

太阳直径为

$$D=\frac{D}{S_{日地}}S_{日地}=\frac{1}{105}\times1.5\times10^{6}\ \text{km}=1.5\times10^{6}\ \text{km}$$

3） i）地球接收到的太阳光辐射功率为

$$W_{总}=\pi R_{地}^{2}I=3.14\times6.4^{2}\times10^{12}\times1.37\times10^{3}W=1.76\times10^{17}W \qquad (13)$$

ii）全球每年消耗的总能量为

$$E_{消耗}=70\times10^{8}\times3\times10^{3}\times4\times3.6\times10^{6}\text{J}=3\times10^{20}\text{J}$$

地球 一年接受到的太阳辐射能量为

$$E_{辐射}=365\times24\times3600\times W_{总}=5.5\times10^{24}\text{J}$$

能耗占比为

$$E_{消耗}:\ E_{辐射}=1:1.6\times10^{4} \qquad (14)$$

不到万分之一，表明我们利用太阳能源的潜力还很大.

iii）太阳单位时间辐射的总能量

$$W_{太阳}=4\pi S_{日地}^{2}I=3.87\times10^{26}W \qquad (15)$$

iv）太阳单位时间单位面积辐射的能量

$$I_{太阳}=\frac{W_{太阳}}{4\pi R_{太阳}^{2}}=\frac{S_{日地}^{2}}{R_{太阳}^{2}}I=6.5\times10^{7}\text{W/m}^{2}$$

太阳表面温度为

$$T_{表面}=\left(\frac{I_{太阳}}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}=5.8\times10^{3}\ \text{K} \qquad (16)$$

4） i）由万有引力定律有

$$G\frac{M_{日}m}{S_{日地}^{2}}=m\frac{4\pi^{2}}{T_{地球}^{2}}S_{日地}$$

太阳质量为

$$\begin{aligned}M_{日}&=\frac{4\pi^{2}}{GT_{地球}^{2}}S_{日地}^{3}\\&=\frac{4\pi^{2}}{6.67\times10^{-11}\times(365\times24\times3600)^{2}}\times(1.5\times10^{11})^{3}\text{kg} \qquad (17)\\&=2.0\times10^{30}\text{kg}\end{aligned}$$

太阳 平均密度

$$\rho=\frac{M_{日}}{\frac{4}{3}\pi R_{日}^{3}}=1.4\times10^{3}\text{kg/m}^{3} \qquad (18)$$

是水的密度的 1.4 倍.

ii）若太阳能源来自化学反应，假设来自煤的燃烧，那么每秒钟需要烧煤的质量为

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{W_{\text{太阳}}}{4\times 3.6\times 10^{6}}=2.7\times 10^{19}\text{kg/s}$$

可持续燃烧的时间

$$t_{\text{总}}=\frac{M}{\frac{\Delta m}{\Delta t}}=7.4\times 10^{10}\text{s}=2400\text{y} \tag{19}$$

达尔文当年从生物进化的角度认为，地球至少要存在一亿年以上，若太阳作为恒星存在 50 亿年以上，那么太阳产能效率至少是燃煤效率 200 万倍以上，因此太阳的能源不可能来自化学能，只能来自于核能.

5） i）整个核聚变过程相当于消耗掉了 4 个质子，产生了一个氦原子核，并有 2 个正电子与两个等离子体中的电子淹灭成光子，不考虑中微子带走的能量，放出的能量为

$$\begin{aligned}&1\text{MeV}=1.60217733(49)\times 10^{-13}\text{J}\\&\Delta E=(4M_{\text{p}}-M_{^4\text{He}}-2m_{\text{e}}+4m_{\text{e}})c^2\\&\quad=938.3\times 4-3727.5+0.51\times 2=26.7\text{ MeV}=4.27\times 10^{-12}\text{ J}\end{aligned} \tag{20}$$

单位时间需要消耗质子数为

$$\frac{\Delta N_{\text{P}}}{\Delta t}=\frac{3.87\times 10^{26}}{4.27\times 10^{-12}/4}=3.62\times 10^{38}\text{s}^{-1} \tag{21}$$

ii）太阳总的质子数为

$$N_{\text{P}}=\frac{0.71\times 2.0\times 10^{30}\text{kg}}{1.67\times 10^{-27}\text{kg}}=8.5\times 10^{56}$$

假设所有质子最后均参与核聚变反应（实际上太阳外层由于温度太低，不会产生聚变），则能维持聚变的时间为

$$\Delta t=\frac{8.5\times 10^{56}}{3.62\times 10^{38}}\text{s}=2.3\times 10^{18}\text{s}=7.3\times 10^{10}\text{y} \tag{22}$$

单位时间的反应概率为

$$P_{\text{PP}}=\frac{3.62\times 10^{38}}{8.5\times 10^{56}}\text{s}^{-1}=4.2\times 10^{-19}\text{s}^{-1} \tag{23}$$

iii）2 个质子反应产生一个中微子，因此每秒产生的中微子数为

$$\frac{\Delta N_{\nu_e}}{\Delta t}=1.81\times 10^{38}\text{s}^{-1}$$

地球上单位时间单位面积能接受到的中微子数为

$$\frac{\Delta N_{\nu_e}}{\Delta t}\frac{1}{4\pi S_{\text{日地}}^2}=6.4\times 10^{14}\text{ s}^{-1}\text{m}^{-2} \tag{24}$$

iv） $\dfrac{\Delta M_{\text{太阳}}}{\Delta t}=\dfrac{W_{\text{太阳}}}{c^2}=\dfrac{3.87\times 10^{26}\text{kg}}{9\times 10^{16}\text{s}}=4.3\times 10^{9}\text{kg/s}=1.3\times 10^{17}\text{kg/y}$ (25)

6）核心区的平均密度 $\bar{\rho}_{\text{核心区}}$ 高于平均密度 $\bar{\rho}$，但小于平均密度 $\bar{\rho}$ 的 64 倍

$$\bar{\rho}=\frac{M_{日}}{\frac{4}{3}\pi R^3}<\bar{\rho}_{核心区}=\frac{M_{日核心区}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3}=64\frac{M_{日核心区}}{\frac{4}{3}\pi R^3}<64\frac{M_{日}}{\frac{4}{3}\pi R^3}=64\bar{\rho}$$

即小于

$$64\bar{\rho}=9\times10^4\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$$

质子数密度满足

$$8.4\times10^{23}\mathrm{cm^{-3}}=\frac{9\times10^4\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}{64\times1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}}<n_{\mathrm{P}}<\frac{9\times10^4\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}{1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}}=5.4\times10^{25}\mathrm{cm^{-3}}$$

于是

$$5.4\times10^{-45}\mathrm{cm^3/s}=\frac{2.9\times10^{-19}\mathrm{s^{-1}}}{5.4\times10^{25}\mathrm{cm^{-3}}}<R(T)=\frac{P_{\mathrm{PP}}}{n_{\mathrm{P}}}<\frac{64\times2.9\times10^{-19}\mathrm{s^{-1}}}{5.4\times10^{25}\mathrm{cm^{-3}}}=3.5\times10^{-43}\mathrm{cm^3/s}\qquad(26)$$

由于质子-质子的反应率远低于另外两个反应，因此决定总体的反应概率是质子-质子的概率，过上述反应率的横坐标平行线与 PP 反应率相交，可得反应温度为

$$T\approx1.0\times10^7\mathrm{K}\qquad(27)$$

7） 聚变过程(a)的质量亏损为 0.49 MeV, 远大于质子的动能 (1.5 keV) ，因此可以将质子看作静止，反应后总动量为零，总动能为质量亏损乘以光速度平方；

对于三体问题，根据能动量守恒计算各粒子的能量和动量有不确定性，但中微子的最大动能对应于氘与正电子没有相对运动（即具有相同速度）时其所具有的能量. 由于氘的动能远小于其静止质量乘以光速平方，因此可以用非相对论表达式，而中微子静止质量近似为零，需要用相对论表达式. 因此有

$$(m_{\mathrm{D}}+m_{\mathrm{e}})v-p_{\mathrm{v}}=0\qquad(28)$$

$$\frac{p_{\mathrm{D}}^2}{2m_{\mathrm{D}}}+\frac{p_{\mathrm{e}}^2}{2m_{\mathrm{e}}}+p_{\mathrm{v}}c=0.49\ \mathrm{MeV}\qquad(29)$$

又

$$p_{\mathrm{e}}=\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{D}}}p_{\mathrm{D}}$$

故

$$\frac{p_{\mathrm{e}}^2}{2m_{\mathrm{e}}}=\frac{m_{\mathrm{e}}p_{\mathrm{D}}^2}{2m_{\mathrm{D}}^2}<<\frac{p_{\mathrm{D}}^2}{2m_{\mathrm{D}}}$$

再由(28)(29)式得

$$\frac{p_{\mathrm{v}}^2c^2}{2m_{\mathrm{D}}c^2}+p_{\mathrm{v}}c=0.49\ \mathrm{MeV}$$

略去小量$\frac{p_{\mathrm{v}}^2c^2}{2m_{\mathrm{D}}c^2}$得

$$E_{\mathrm{v\,max}}=0.49\ \mathrm{MeV}\qquad(30)$$

中微子总能量占聚变放出的能量之比小于

$$\frac{0.49\times 2}{26.7}=3.7\% \qquad (31)$$

8） i）一亿年内由于辐射引起的质量减少量 ΔM 为

$$\Delta M=\frac{\Delta M_{日}}{\Delta t}\times\Delta t=(1.3\times10^{17}\,\mathrm{kg/y})\times(1.0\times10^{8}\,\mathrm{y})=1.3\times10^{25}\,\mathrm{kg} \qquad (32)$$

ii）万有引力提供向心力，有

$$G\frac{Mm}{r_1^2}=m\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 r_1 \ ，\ G\frac{(M-\Delta M)m}{r_2^2}=m\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 r_2$$

因此

$$\frac{MT_1^2}{r_1^3}=\frac{(M-\Delta M)T_2^2}{r_2^3} \qquad (33)$$

由于是太阳的径向辐射引起其质量减少，因此地球相对于太阳的角动量守恒，有

$$mv_1r_1=mv_2r_2$$

或

$$m\frac{2\pi r_1}{T_1}r_1=m\frac{2\pi r_2}{T_2}r_2$$

即

$$\frac{r_1^2}{T_1}=\frac{r_2^2}{T_2} \qquad (34)$$

由(32)(33)(34)式得

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(1-\frac{\Delta M}{M}\right)^{-2}=1+2\frac{\Delta M}{M} \qquad (35)$$

地球公转周期的变化量为

$$T_2-T_1=1.3\times10^{-5}T_1 \qquad (36)$$