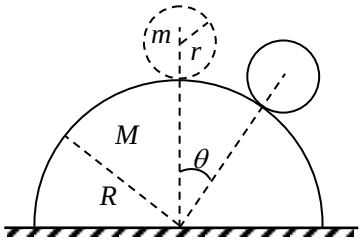
第 35 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题参考答案

一、如图，半径为R、质量为M的半球静置于光滑水平桌面上，在半球顶点上有一质量为m、半径为r的匀质小球。某时刻，小球受到微小的扰动后由静止开始沿半球表面运动。在运动过程中，小球相对于半球的位置由角位置θ描述，θ为两球心的连线与竖直方向之间的夹角。已知小球绕其对称轴的转动惯量为$\frac{2}{5}mr^2$，小球与半球之间的动摩擦因数为μ，假定最大静摩擦力等于滑动摩擦力。重力加速度大小为g。



（1）小球开始运动后在一段时间内做纯滚动，求在此过程中，当小球的角位置为θ_1时，半球运动的速度大小$V_M(\theta_1)$和加速度大小$a_M(\theta_1)$；

（2）当小球纯滚动到角位置θ_2时开始相对于半球滑动，求θ_2所满足的方程（可用半球速度大小$V_M(\theta_2)$和加速度大小$a_M(\theta_2)$以及题给条件表示）；

（3）当小球刚好运动到角位置θ_3时脱离半球，求此时小球质心相对于半球运动速度的大小$v_m(\theta_3)$。

参考解答：

（1）（解法一）

半球和小球组成的系统在水平方向上没有受到外力作用，系统在水平方向上动量守恒

$$-MV_M+m[(R+r)\dot{\theta}\cos\theta-V_M]=0 \qquad ①$$

设小球转动角速度大小为ω，小球做纯滚动，故有

$$r\omega=(R+r)\dot{\theta} \qquad ②$$

无耗散力做功，系统的机械能守恒

$$\begin{aligned}&mg(R+r)(1-\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}MV_M^2+\frac{1}{2}m\left\{\left[(R+r)\dot{\theta}\cos\theta-V_M\right]^2+\left[(R+r)\dot{\theta}\sin\theta\right]^2\right\}+\frac{1}{2}I\omega^2\end{aligned} \qquad ③$$

式中$I=\frac{2}{5}mr^2$。联立①②③式得，小球运动到角位置θ_1时半球速度大小

$$V_M=\sqrt{\frac{10m^2(R+r)g(1-\cos\theta_1)\cos^2\theta_1}{\left[7(M+m)-5m\cos^2\theta_1\right](M+m)}} \qquad ④$$

或

$$V_M^2=\frac{10m^2g(R+r)(1-\cos\theta_1)\cos^2\theta_1}{[7M+(5\sin^2\theta_1+2)m](m+M)}$$

将上式两边对时间t微商得

$$2V_M a_M=\frac{10mg\left(-2\cos\theta+3\cos^2\theta\right)\left[7\left(M+m\right)-5m\cos^2\theta\right]-100m^2g\left(1-\cos\theta\right)\cos^3\theta}{\left[7\left(M+m\right)-5m\cos^2\theta\right]^2}$$

$$\cdot\frac{m\left(R+r\right)\sin\theta\cdot\dot{\theta}}{M+m}$$

由①式可知

$$\frac{m\left(R+r\right)\dot{\theta}}{M+m}=\frac{V_M}{\cos\theta}$$

由以上两式得，小球运动到角位置θ_1时，半球的加速度大小为

$$a_M(\theta_1)=-\frac{5mg\sin\theta_1\left[14\left(M+m\right)-21\left(M+m\right)\cos\theta_1+5m\cos^3\theta_1\right]}{\left[7\left(M+m\right)-5m\cos^2\theta_1\right]^2}\qquad⑤$$

[（解法二）

见下面第（2）问解答，列出动力学方程和运动学约束，也可以解得半球的加速度大小$a_M(\theta_1)$。**]**

（2）当小球纯滚动到角位置θ（$\theta\le\theta_2$）时，设小球对半球的正压力和摩擦力大小分别为N和f，由牛顿第二定律有

$$N\sin\theta-f\cos\theta=Ma_M\qquad⑥$$

在半球参考系中，对小球利用质心运动定理得

$$mg\cos\theta-N-ma_M\sin\theta=m\frac{v_{\mathrm{C}}^2}{R+r}\qquad⑦$$

$$mg\sin\theta+ma_M\cos\theta-f=m\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}\qquad⑧$$

式中v_{C}为半球参考系中小球质心速度的大小

$$v_{\mathrm{C}}=r\omega=\left(R+r\right)\dot{\theta}=\frac{M+m}{m\cos\theta}V_M\qquad⑨$$

⑨式的最后等式已应用了①式。在小球质心参考系中对小球利用转动定理有

$$fr=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\qquad⑩$$

由⑥⑦⑧⑨⑩式得

$$f=\frac{2m}{7}\left(g\sin\theta+a_M\cos\theta\right)\qquad⑪$$

$$N=mg\cos\theta-ma_M\sin\theta-m\frac{v_{\mathrm{C}}^2}{R+r}\qquad⑫$$

按照纯滚动条件，要求

$$f\le\mu N$$

当小球纯滚动到角位置θ_2时开始相对于半球滑动，上式中等号成立。将⑪⑫式代入$f=\mu N$得

$$\frac{2m}{7}\left[g\sin\theta_2+a_M\left(\theta_2\right)\cos\theta_2\right]=\mu\left[mg\cos\theta_2-ma_M\left(\theta_2\right)\sin\theta_2-m\frac{v_{\mathrm{C}}^2\left(\theta_2\right)}{R+r}\right]$$

将⑨式代入上式得θ_2所满足的方程为

$$\frac{2}{7}g\sin\theta_2-\mu g\cos\theta_2+a_M\left(\theta_2\right)\left(\frac{2}{7}\cos\theta_2+\mu\sin\theta_2\right)+\frac{\mu\left(M+m\right)^2V_M^2\left(\theta_2\right)}{\left(R+r\right)m^2\cos^2\theta_2}=0\qquad⑬$$

式中$V_M\left(\theta_2\right)$和$a_M\left(\theta_2\right)$如④⑤式（$\theta_1\to\theta_2$）所示。

（3）在小球刚好运动到角位置θ_3处脱离半球的瞬间，

$$N=0\qquad⑭$$

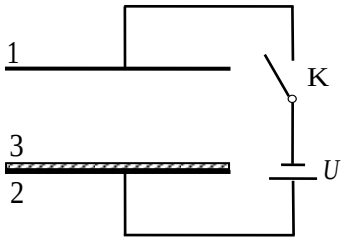
此时半球的加速度为零。因此，在小球脱离半球的瞬间，小球质心相对于半球运动速度的大小$v_m\left(\theta_3\right)$满足

$$mg\cos\theta_3 = m\frac{v_C'^2}{R+r} \qquad ⑮$$

由此得

$$v_C' = \sqrt{(R+r)g\cos\theta_3} \qquad ⑯$$

二、平行板电容器极板 1 和 2 的面积均为S，水平固定放置，它们之间的距离为d，接入如图所示的电路中，电源的电动势记为U。不带电的导体薄平板 3 的质量为m、尺寸与电容器极板相同。平板 3 平放在极板 2 的正上方，且与极板 2 有良好的电接触。整个系统置于真空室内，真空的介电常量为ε_0。闭合电键K后，平板 3 与极板 1 和 2 相继碰撞，上下往复运动。假设导体板之间的电场均可视为匀强电场；导线电阻和电源内阻足够小，充放电时间可忽略不计；平板 3 与极板 1 或 2 碰撞后立即在极短时间内达到静电平衡；所有碰撞都是完全非弹性的。重力加速度大小为g。



（1）电源电动势U至少为多大？

（2）求平板3运动的周期（用U和题给条件表示）。

已知积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx}\right)+C$$，其中$a>0$，C为积分常数。

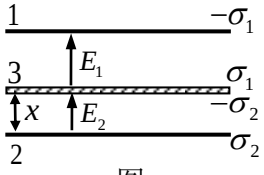
参考解答：

（1）在平板3离开极板2之前，平板3的带电量为

$$Q = C_0U = \frac{\varepsilon_0 S}{d}U$$

设平板3离开极板2之后，各板电荷面密度如图a所示。由电荷守恒有

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma \equiv \frac{Q}{S} = \frac{\varepsilon_0}{d}U \qquad ①$$



图a

设上、下两电容器各自两极板间电场的场强分别为E_1、E_2（见图a），有

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}，\quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

将上式代入①式得

$$\varepsilon_0 E_1 - \varepsilon_0 E_2 = \frac{\varepsilon_0}{d}U$$

即

$$E_1 - E_2 = \frac{U}{d} \qquad ②$$

另外，两个串联电容器的总电势差为U，故

$$E_2 x + E_1(d-x) = U \qquad ③$$

联立②③式得

$$E_1=\frac{U}{d}\frac{d+x}{d} \qquad ④$$

$$E_2=\frac{U}{d}\frac{x}{d} \qquad ⑤$$

由④⑤式得，极板1、2上电荷面密度分别为

$$\sigma_1=\varepsilon_0E_1,\quad \sigma_2=\varepsilon_0E_2$$

平板3受到的电场力（向上为正方向，下同）为

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{e}}&=-\sigma_2S\cdot\frac{E_2}{2}+\sigma_1S\cdot\frac{E_1}{2}=\frac{\varepsilon_0S}{2}(E_1^2-E_2^2)=\varepsilon_0S(E_1-E_2)\left(\frac{E_1+E_2}{2}\right)\\&=\varepsilon_0S\frac{U}{d}\cdot(E_1+E_2)/2=\varepsilon_0S\frac{U}{d}\cdot\frac{U}{d}\left(\frac{2x+d}{2d}\right)=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d^3}(2x+d)\end{aligned} \qquad ⑥$$

平板3受到的竖直方向的合力为

$$F_{\mathrm{total}}=F_{\mathrm{e}}-mg=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d^3}(2x+d)-mg=\left(\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d^2}-mg\right)+\frac{\varepsilon_0SU^2}{d^3}x$$

由此得，平板3在图a所示位置的加速度为

$$a=\frac{F_{\mathrm{total}}}{m}=\left(\frac{\varepsilon_0SU^2}{2md^2}-g\right)+\frac{\varepsilon_0SU^2}{md^3}x \qquad ⑦$$

为使平板 3 向上运动，应有条件

$$\frac{\varepsilon_0SU^2}{2md^2}\geq g$$

且开始运动之后加速度始终为正，因此最终将撞到极板 2 上。上述条件意味着电源电动势U 至少应为

$$U_{\min}=\sqrt{\frac{2md^2g}{\varepsilon_0S}} \qquad ⑧$$

（2）由⑦式可知

$$a=a_0+Bx$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2}Bd-g,\quad B=\frac{\varepsilon_0SU^2}{md^3}$$

于是

$$a=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a_0+Bx$$

即

$$v\mathrm{d}v=(a_0+Bx)\mathrm{d}x$$

对上式两边作积分

$$\int_0^v v'\mathrm{d}v'=\int_0^x(a_0+Bx')\mathrm{d}x'$$

完成积分得

$$\frac{1}{2}v^2=a_0x+\frac{1}{2}Bx^2$$

或

$$v=\sqrt{2a_0x+Bx^2}$$

其中 v 为平板3与极板2相距 x 时速度的大小。上式即

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a_0x+Bx^2}} \qquad ⑨$$

两边积分，可得平板 3 从极板 2 运动到极板 1（位移为 d ）的时间间隔为

$$t_1=\int_0^{t_1}\mathrm{d}t=\int_0^{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a_0x+Bx^2}}$$

完成上述积分得

$$t_1=\sqrt{\frac{1}{B}}\ln\left[\frac{(3Bd-2g)+\sqrt{8Bd(Bd-g)}}{Bd-2g}\right]$$

将 $B=\dfrac{\varepsilon_0SU^2}{md^3}$ 代入上式得

$$t_1=\frac{d}{U}\sqrt{\frac{md}{\varepsilon_0S}}\ln\left[\frac{(3\varepsilon_0SU^2-2mgd^2)+2U\sqrt{2\varepsilon_0S(\varepsilon_0SU^2-mgd^2)}}{\varepsilon_0SU^2-2mgd^2}\right] \qquad ⑩$$

平板 3 到达极板 1 时，其上表面所带的正电荷与极板 1 所带负电荷交换后相互抵消；下表面所带电荷为

$$-Q_2=-\varepsilon_0E_2S=-Q=-\frac{\varepsilon_0S}{d}U$$

极板 2 带电为

$$Q_2=\varepsilon_0E_2S=Q=\frac{\varepsilon_0S}{d}U$$

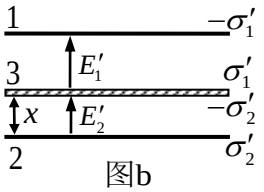
平板 3 与极板 1 碰撞后，速度为零，在重力和电场力的作用下又向下运动，并与极板 2 发生完全非弹性碰撞。

在平板3向下运动过程中，其总带电量为

$$-Q=-\frac{\varepsilon_0S}{d}U$$

设平板3离开极板1后，各板电荷面密度如图b所示。由电荷守恒有

$$\sigma_1'-\sigma_2'=-\frac{\varepsilon_0}{d}U \qquad ⑪$$



图b

上、下两个电容器各自两极板间的场强 E_1' 和 E_2'（见图b）分别为

$$E_1'=\frac{\sigma_1'}{\varepsilon_0},\quad E_2'=\frac{\sigma_2'}{\varepsilon_0}$$

将上式代入⑪式得

$$E_1'-E_2'=-\frac{U}{d} \qquad ⑫$$

另外，两个串联电容器的总电势差为 U ，故

$$E_2'x+E_1'(d-x)=U \qquad ⑬$$

联立⑫⑬式得

$$E_1' = \frac{U}{d}\frac{(d-x)}{d} \tag{14}$$

$$E_2' = \frac{U}{d}\frac{2d-x}{d} \tag{15}$$

由此可得电荷面密度

$$\sigma_1' = \varepsilon_0 E_1',\quad \sigma_2' = \varepsilon_0 E_2'$$

以及平板3受到的电场力

$$\begin{aligned} F_e' &= -\sigma_2' S\frac{E_2'}{2} + \sigma_1' S\frac{E_1'}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2}(E_1'^2 - E_2'^2) = \varepsilon_0 S(E_1' - E_2')\frac{E_1' + E_2'}{2} \\ &= \varepsilon_0 S(-\frac{U}{d})\cdot\frac{E_1' + E_2'}{2} = \varepsilon_0 S(-\frac{U}{d})\frac{U}{d}\left(\frac{3d-2x}{2d}\right) = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^3}(3d-2x) \end{aligned} \tag{16}$$

平板3受到竖直方向的合力为

$$F_{\text{total}}' = F_e' - mg = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^3}(3d-2x) - mg = -\left(\frac{3\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} + mg\right) + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{d^3}x$$

由此得，平板3在图b所示位置的加速度

$$a' = \frac{F_{\text{total}}'}{m} = -\left(\frac{3\varepsilon_0 S U^2}{2md^2} + g\right) + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3}x \tag{17}$$

因为 $\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2md^2} + g \geq 0$，则 $a' < 0$，平板3能一直向下加速运动。令

$$a' = -a_0' - B'(d-x)$$

其中

$$a_0' = \frac{1}{2}B'd + g,\quad B' = B = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3}$$

重复前述关于平板 3 上升过程的类似处理，可得

$$\frac{1}{2}v^2 = [a_0'(d-x) + \frac{1}{2}B(d-x)^2]$$

其中 v 为平板3离开极板1后坐标为 x（原点在极板2）时的速度。上式即

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a_0'(d-x) + B(d-x)^2}} \tag{18}$$

两边积分得，平板3从极板1运动到极板2（位移为 $-d$ ）的时间 t_2 为

$$t_2 = \int_0^{t_2}\mathrm{d}t = -\int_d^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a_0'(d-x) + B(d-x)^2}}$$

完成上述积分得

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{B}}\ln\left[\frac{(3Bd+2g) + \sqrt{8Bd(Bd+g)}}{Bd+2g}\right]$$

将 $B = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{md^3}$ 代入上式得

$$t_2=\frac{d}{U}\sqrt{\frac{md}{\varepsilon_0 S}}\ln\left[\frac{(3\varepsilon_0 SU^2+2mgd^2)+2U\sqrt{\varepsilon_0 S(2\varepsilon_0 SU^2+mgd^2)}}{\varepsilon_0 SU^2+2mgd^2}\right] \qquad ⑲$$

平板 3 从极板 1 运动到极板 2 后，与极板 2 发生完全非弹性碰撞，速度变为零。其下表面所带的负电荷与极板 2 所带正电荷交换后相互抵消，上表面所带电荷为

$$Q_1'=\varepsilon_0 E_1' S=Q=\frac{\varepsilon_0 S}{d}U$$

极板 1 所带电荷为

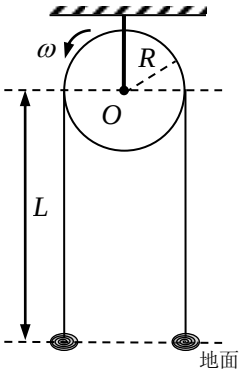
$$-Q_1'=-\varepsilon_0 E_1' S=-Q=-\frac{\varepsilon_0 S}{d}U$$

这时系统状态与初始状态完全相同，平板 3 完成一个完整的周期运动，此后平板 3 重复以上的上下往复运动过程。导体平板 3 的运动周期为

$$\begin{aligned}T&=t_1+t_2\\&=\frac{d}{U}\sqrt{\frac{md}{\varepsilon_0 S}}\left\{\ln\left[\frac{(3\varepsilon_0 SU^2-2mgd^2)+2U\sqrt{2\varepsilon_0 S(\varepsilon_0 SU^2-mgd^2)}}{\varepsilon_0 SU^2-2mgd^2}\right]\right.\\&\quad\left.+\ln\left[\frac{(3\varepsilon_0 SU^2+2mgd^2)+2U\sqrt{\varepsilon_0 S(2\varepsilon_0 SU^2+mgd^2)}}{\varepsilon_0 SU^2+2mgd^2}\right]\right\}\end{aligned} \qquad ⑳$$

已利用⑩式和⑲式。

三、如图，质量线密度为λ、不可伸长的软细绳跨过一盘状定滑轮，定滑轮半径为R，轴离地面高度为L。系统原处于静止状态。在$t=0$时，滑轮开始以恒定角速度ω逆时针转动，绳子在滑轮带动下开始运动，绳子与滑轮间的动摩擦因数为μ。滑轮两侧的绳子在运动过程中始终可视为沿竖直方向，绳的两端在运动过程中均没有离开地面，地面上的绳子可视为集中在一点。已知重力加速度大小为g。记绳子在与滑轮左、右侧相切处的张力大小分别为T_1、T_2。



（1）分别列出在绳子速度达到最大值之前，滑轮两侧绳子的竖直部分及滑轮上任意一小段绳子的运动所满足的动力学方程组；

（2）求绳子可达到的最大速度的大小。

可参考的数学关系式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha y=\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\mathrm{d}(y\mathrm{e}^{\alpha x})}{\mathrm{d}x}\text{；}$$

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{1+\alpha^2}\left(\alpha\cos x+\sin x\right)+C_1\text{，}\ C_1\text{为积分常数；}$$

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{1+\alpha^2}\left(\alpha\sin x-\cos x\right)+C_2\text{，}\ C_2\text{为积分常数。}$$

参考答案：

（1）考虑滑轮左右两侧绳子的竖直部分及滑轮上任意一小段绳子的运动。对于滑轮左侧绳子的竖直部分，取向下为正。$\mathrm{d}t$ 时间段由滑轮转入 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$ 一小段， 同样长度的另一小段落到地面，传入的静动量为零，从而动量的改变为$\lambda L\mathrm{d}v$。软绳落到地面的一段对绳没有反作用，所以，作用在这一段上的力为$\lambda Lg-T_1$，冲量是$\left(\lambda Lg-T_1\right)\mathrm{d}t$。由动量定理得

$$-T_1+\lambda Lg=\lambda L\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ①$$

对于右侧绳子的竖直部分，取向上为正。先考虑 $\mathrm{d}t$ 时间从地面上提升的一小段 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，其动量由 0 变为 $\lambda\mathrm{d}xv=\lambda v^2\mathrm{d}t$，右侧绳子的竖直部分受力 $T'-\lambda\mathrm{d}xg$，T' 是绳在地面处的张力。由动量定理得

$$T'-\lambda\mathrm{d}xg=\lambda v^2$$

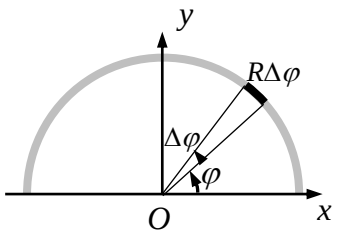
略去无穷小量后得

$$T'=\lambda v^2$$

右侧绳子的竖直部分动量的变化为 $\lambda L\mathrm{d}v$，作用于其上的力为 $T_2-\lambda Lg-T'=T_2-\lambda Lg-\lambda v^2$。由动量定理得

$$T_2-\lambda v^2-\lambda Lg=\lambda L\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ②$$

对于滑轮上角度为 φ（取逆时针方向为正）处 $R\Delta\varphi$ 小段的软绳（见图 a），其质量为 $\lambda R\Delta\varphi$，两端所受的张力分别为 $T(\varphi+\Delta\varphi)$ 和 $T(\varphi)$，滑轮对其支撑力为 $NR\Delta\varphi$，其中 N 为 φ 处对单位长度软绳的支撑力。分别沿切向和法向按牛顿第二定律列出方程



图a

$$T(\varphi+\Delta\varphi)\cos\frac{\Delta\varphi}{2}-T(\varphi)\cos\frac{\Delta\varphi}{2}+\mu NR\Delta\varphi-\lambda R\Delta\varphi g\cos\varphi=\lambda R\Delta\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$T(\varphi+\Delta\varphi)\sin\frac{\Delta\varphi}{2}+T(\varphi)\sin\frac{\Delta\varphi}{2}-NR\Delta\varphi+\lambda R\Delta\varphi g\sin\varphi=\lambda R\Delta\varphi\frac{v^2}{R}$$

当 $\Delta\varphi$ 趋于 0 时，以上两式成为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi}+\mu NR-\lambda Rg\cos\varphi=\lambda R\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ③$$

$$T-NR+\lambda Rg\sin\varphi=\lambda R\frac{v^2}{R} \qquad ④$$

从③④式消去 N 得到

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi}+\mu T-\lambda Rg\left(\cos\varphi-\mu\sin\varphi\right)=\lambda R\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\mu\frac{v^2}{R}\right) \qquad ⑤$$

①②③④式或者①②⑤式构成了软绳运动所满足的动力学方程组。

（2）由于 ω 的取值不同，可以有两种情况；其一是 ω 足够大，在绳子达到最大速度值时，绳子和滑轮之间仍然有滑动；其二是 ω 较小，在绳子达到最大速度值时，绳子和滑轮之间没有滑动，则绳子速度的最大值就是 $R\omega$。

（解法一）

注意到①②式中只出现 T_1 和 T_2，所以只需要由⑤式得到 T_1 和 T_2 的关系，而无需求出 $T(\varphi)$。借助于关系式

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi}+\mu T=e^{-\mu\varphi}\frac{\mathrm{d}(Te^{\mu\varphi})}{\mathrm{d}\varphi} \qquad ⑥$$

⑤式可写为

$$\frac{\mathrm{d}(Te^{\mu\varphi})}{\mathrm{d}\varphi}=\lambda Rge^{\mu\varphi}\left(\cos\varphi-\mu\sin\varphi\right)+e^{\mu\varphi}\lambda R\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\mu\frac{v^2}{R}\right) \qquad ⑦$$

两边积分后得

$$T_1e^{\mu\pi}-T_2=\lambda Rg\left(\int_0^{\pi}e^{\mu\varphi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi-\mu\int_0^{\pi}e^{\mu\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)+\lambda R\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\mu\frac{v^2}{R}\right)\int_0^{\pi}e^{\mu\varphi}\mathrm{d}\varphi \qquad ⑧$$

此即

$$T_2 - T_1 e^{\mu\pi} = \lambda Rg \frac{2\mu}{1+\mu^2}(e^{\mu\pi}+1) - \frac{\lambda R}{\mu}(e^{\mu\pi}-1)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{v^2}{R}\right) \qquad ⑨$$

[（解法二）

令

$$T = \bar{T} + C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi + C_3 \qquad ⑥$$

代入⑤式，令等式左右两边三角函数项系数和常数项相同，得

$$C_1 = \lambda Rg \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$$

$$C_2 = \lambda Rg \frac{2\mu}{1+\mu^2} \qquad ⑦$$

$$C_3 = \frac{\lambda R}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{v^2}{R}\right)$$

方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\bar{T}} = -\mu \mathrm{d}\varphi$$

积分得

$$\bar{T} = \bar{T}_0 e^{-\mu\varphi} \qquad ⑧$$

即

$$T = \bar{T}_0 e^{-\mu\varphi} + \lambda Rg \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\sin\varphi + \lambda Rg \frac{2\mu}{1+\mu^2}\cos\varphi + \frac{\lambda R}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{v^2}{R}\right)$$

在滑轮两边与软绳相切处，对应于 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$，张力分别为 $T_2 = T(0)$ 和 $T_1 = T(\pi)$。

$$T_2 = \bar{T}_0 + \lambda Rg \frac{2\mu}{1+\mu^2} + \frac{\lambda R}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{v^2}{R}\right)$$

$$T_1 = \bar{T}_0 e^{-\mu\pi} - \lambda Rg \frac{2\mu}{1+\mu^2} + \frac{\lambda R}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{v^2}{R}\right)$$

由此得到

$$T_2 - T_1 e^{\mu\pi} = \lambda Rg \frac{2\mu}{1+\mu^2}\left(e^{\mu\pi}+1\right) - \frac{\lambda R}{\mu}\left(e^{\mu\pi}-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{v^2}{R}\right) \qquad ⑨$$

]

由①和②式得到

$$T_2 - T_1 e^{\mu\pi} = \lambda v^2 - \lambda Lg\left(e^{\mu\pi}-1\right) + \lambda L\left(e^{\mu\pi}+1\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ⑩$$

由⑨⑩式得

$$Lg\left(e^{\mu\pi}-1\right) + Rg\frac{2\mu}{1+\mu^2}\left(e^{\mu\pi}+1\right) - e^{\mu\pi}v^2 = \left(L\left(e^{\mu\pi}+1\right) + \frac{R}{\mu}\left(e^{\mu\pi}-1\right)\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ⑪$$

假设绳子与滑轮之间一直有滑动。当 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ 时，绳子达到最大速度值 $v_{\max}$，由⑫式得

$$v_{\max}^2 = Lg\left(1-e^{-\mu\pi}\right) + Rg\frac{2\mu}{1+\mu^2}\left(1+e^{-\mu\pi}\right)$$

即

$$v_{\max} = \sqrt{Lg\left(1-e^{-\mu\pi}\right) + Rg\frac{2\mu}{1+\mu^2}\left(1+e^{-\mu\pi}\right)} \qquad ⑫$$

在此情况下，必有

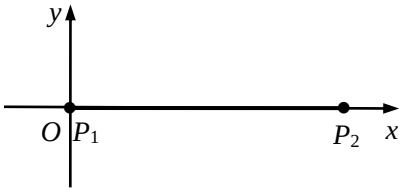
$$R\omega > \sqrt{Lg\left(1-e^{-\mu\pi}\right)+Rg\frac{2\mu}{1+\mu^2}\left(1+e^{-\mu\pi}\right)} \qquad ⑬$$

如果上式不满足，绳子达到最大速度值时与滑轮之间已经没有相对滑动，对应于

$$v_{\max}=R\omega \qquad ⑭$$

[在第（2）问中，由于只求最大速度，可在开始时令①②⑤式中的$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$计算。**]**

四、如图，一张紧的弦沿x轴水平放置，长度为L。弦的左端位于坐标原点。弦可通过其左、右端与振源连接，使弦产生沿y方向的横向受迫振动，振动传播的速度为u。



（1）固定弦的右端P_2，将其左端P_1与振源连接，稳定时，左端P_1的振动表达式为$y(x=0,t)=A_0\cos(\omega t)$，其中$A_0$为振幅，$\omega$为圆频率。

（i）已知弦上横波的振幅在传播方向上有衰减，衰减常量为γ（$\gamma>0$），求弦上各处振动的振幅；（已知：在无限长弦上沿x轴正方向传播的振幅逐渐衰减的横波表达式为$y(x,t)=A\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos\left(\omega t-\frac{\omega x}{u}+\varphi\right)$，其中$A$和$\varphi$分别为$x=0$处振动的振幅和初相位。）

（ii）忽略波的振幅在传播方向上的衰减，求弦上驻波的表达式，并确定其波腹和波节处的x坐标。

（2）将P_1、P_2都与振源连接，P_1、P_2处的振动表达式分别为：$y(x=0,t)=A_0\cos\omega t$、$y(x=L,t)=A_0\cos(\omega t+\varphi_0)$，其中$\varphi_0$为常量。忽略波的振幅在传播方向上的衰减，分别计算$\varphi_0=0$和$\varphi_0=\pi$情形下弦上各处振动的表达式以及共振时圆频率$\omega$应满足的条件。

参考解答：

（1）（i）设稳定时，弦上向右传播的机械波的波的表达式为

$$y_{\mathrm{R}}(x,t)=A_1\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos\left(\omega t-\frac{\omega x}{u}+\varphi_1\right) \qquad ①$$

其中A_1和φ_1为待定系数。由于弦的右端点固定，在右端点反射后弦上反射波的波的表达式为

$$y_{\mathrm{L}}(x,t)=A_1\mathrm{e}^{-2\gamma L+\gamma x}\cos\left(\omega t+\frac{\omega x}{u}-2\frac{\omega L}{u}+\pi+\varphi_1\right) \qquad ②$$

因此，稳定时在弦上横向振动的表达式为

$$y(x,t)=y_{\mathrm{L}}(x,t)+y_{\mathrm{R}}(x,t)=A(x)\cos\left[\omega t+\varphi(x)\right]$$

这里

$$A(x)=A_1\sqrt{\mathrm{e}^{-2\gamma x}+\mathrm{e}^{-4\gamma L+2\gamma x}-2\mathrm{e}^{-2\gamma L}\cos\left(2\frac{\omega}{u}x-2\frac{\omega L}{u}\right)} \qquad ③$$

由于稳定时弦的左端点的振动表达式是已知的，有

$$A(x=0)=A_1\sqrt{1+\mathrm{e}^{-4\gamma L}-2\mathrm{e}^{-2\gamma L}\cos\left(2\frac{\omega L}{u}\right)}=A_0$$

比较以上两式得

$$A_1=\frac{A_0}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-4\gamma L}-2\mathrm{e}^{-2\gamma L}\cos\left(2\dfrac{\omega L}{u}\right)}} \qquad ④$$

于是，稳定时弦上各处振动的振幅为

$$A(x)=\frac{A_0}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-4\gamma L}-2\mathrm{e}^{-2\gamma L}\cos\left(2\dfrac{\omega L}{u}\right)}}\sqrt{\mathrm{e}^{-2\gamma x}+\mathrm{e}^{-4\gamma L+2\gamma x}-2\mathrm{e}^{-2\gamma L}\cos\left(2\frac{\omega}{u}x-2\frac{\omega L}{u}\right)} \qquad ⑤$$

（ii）忽略波传播方向上振幅的衰减，在弦上激发的驻波表达式可写成

$$y(x,t)=A\sin\left(\frac{\omega x}{u}+\varphi\right)\cos\left(\omega t+\phi\right) \qquad ⑥$$

弦的右端点固定，即

$$y(x=L,t)=0$$

由以上两式得

$$\frac{\omega L}{u}+\varphi=m\pi,\ \ m=0,1,2,\cdots$$

可取 $m=0$，得

$$\varphi=-\frac{\omega L}{u} \qquad ⑦$$

m 的其它取值所得到的结果，只是对应的 ϕ 取值不同而已，实际上是相互等价的。利用弦的左端点振动表达式 $y(x=0,t)=A_0\cos\left(\omega t\right)$，有

$$A\sin\left(-\frac{\omega L}{u}\right)\cos\left(\omega t+\phi\right)=A_0\cos\omega t$$

由于上式在任意时刻 t 都成立，有

$$A=-\frac{A_0}{\sin\left(\dfrac{\omega L}{u}\right)} \qquad ⑧$$

$$\phi=0 \qquad ⑨$$

将⑧⑨式代入⑥式得，弦上驻波的表达式为

$$y\left(x,t\right)=-\frac{A_0}{\sin\left(\dfrac{\omega L}{u}\right)}\sin\left(\frac{\omega x}{u}-\frac{\omega L}{u}\right)\cos\left(\omega t\right) \qquad ⑩$$

由⑩式知，在坐标为 x 处质点振动的振幅 $A(x)$ 为

$$A(x)=\left|\frac{A_0}{\sin\left(\dfrac{\omega L}{u}\right)}\sin\left(\frac{\omega x}{u}-\frac{\omega L}{u}\right)\right|$$

波节点 x_n 的位置满足

$$\left|A(x_n)\right|=0$$

即

$$\sin\left(\frac{\omega x_n}{u}-\frac{\omega L}{u}\right)=0$$

由此解得

$$x_n=L-n\pi\frac{u}{\omega} \qquad ⑪$$

这里，n 为满足

$$0 \le n < \frac{L\omega}{\pi u} \qquad ⑫$$

的整数。

在波腹位置 x_a 点，振幅 $A(x)$ 最大，即可得

$$x_a = L - \pi\frac{u}{2\omega} - l\pi\frac{u}{\omega} \qquad ⑬$$

l 为满足

$$0 < l < \frac{L\omega}{\pi u} \qquad ⑭$$

的整数。

（2）将弦上各处振动的表达式分解成

A：弦的左端点振动、右端点固定

B：弦的右端点振动、左端点固定

两种情形的叠加。设在情形 A 中弦上各点的振动表达式为 $y_1(x,t)$，而在情形 B 中弦上各点的振动表达式为 $y_2(x,t)$。利用（1.ii）的结果，可得弦中驻波表达式为

$$y_1(x,t) = -\frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)}\sin\left(\frac{\omega x}{u} - \frac{\omega L}{u}\right)\cos(\omega t)$$

利用（1.ii）中的结果，可得弦中驻波表达式为

$$y_2(x,t) = \frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)}\sin\left(\frac{\omega x}{u}\right)\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad ⑮$$

当弦的左、右端都有振动时，弦上各处合振动的表达式为以上两式的叠加

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)}\left[\sin\left(\frac{\omega L}{u} - \frac{\omega x}{u}\right)\cos\omega t + \sin\left(\frac{\omega x}{u}\right)\cos(\omega t + \varphi_0)\right]$$

当 $\varphi_0 = 0$ 时，弦线中各处合振动为

$$y(x,t) = \frac{A_0}{\cos\left(\frac{\omega L}{2u}\right)}\cos\left(\frac{\omega L}{2u} - \frac{\omega x}{u}\right)\cos\omega t \qquad ⑯$$

共振时

$$\cos\left(\frac{\omega L}{2u}\right) = 0\ ,$$

由此解得

$$\omega = \frac{(2n_1 + 1)\pi u}{L},\ n_1 = 0,1,2,3... \qquad ⑰$$

当 $\varphi_0 = \pi$ 时，弦线中各处合振动为

$$y(x,t) = \frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{2u}\right)}\sin\left(\frac{\omega L}{2u} - \frac{\omega x}{u}\right)\cos\omega t \qquad ⑱$$

共振时

$$\sin\left(\frac{\omega L}{2u}\right) = 0$$

由此解得

$$\omega = \frac{2n_2\pi u}{L},\ n_2 = 1,2,3... \qquad ⑲$$

五、质量为M的绝热薄壁容器处于远离其他星体的太空（可视为真空）中。在某惯性系中观察，该容器的初始速度为零。容器的容积为V，容器中充有某种单原子分子理想气体，气体的初始分子数、分子质量分别为N_0、m，气体的初始温度为T_0。$t=0$时容器壁上出现面积为S的一个小孔，由于小孔漏气导致容器开始运动，但容器没有转动。假设小孔较小，容器中的气体在泄漏过程中始终处于平衡态。已知气体分子速度沿x方向的分量v_x的麦克斯韦分布函数为$f(v_x)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp(-\frac{mv_x^2}{2kT})$（$k$为玻尔兹曼常量）。在泄漏过程中，求：

（1）当气体的分子数密度为n、温度为T时在单位时间内从小孔单位面积泄出的气体分子数；

（2）当容器中气体温度为T时，从小孔泄出的气体分子相对于容器的平均动能；

（3）t时刻容器中气体的温度；

（4）t时刻容器运动速度的大小（假设$M>>N_0m$）。

已知积分公式：$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-Ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2A}$，$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-Ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{A^3}}$，$\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-Ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2A^2}$

参考解答：

（1）设小孔垂直于x方向。在$\mathrm{d}t$时间范围内泄出小孔的气体分子数等于处于小孔内侧体积为$v_xS\mathrm{d}t$柱体中垂直小孔方向速度分量在v_x到$v_x+\mathrm{d}v_x$范围内的气体分子数。该柱体中的符合条件的气体分子数为$n_{v_x}Sv_x\mathrm{d}t\mathrm{d}v_x$，其中$n_{v_x}$为速度为$v_x$的气体分子的分子数密度，其与分子数密度$n$的关系为

$$n_{v_x}=nf(v_x)=n\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp(-\frac{mv_x^2}{2kT}) \qquad ①$$

小孔处单位时间单位面积泄出气体的平均分子数为

$$N_{泄}=\int_0^\infty n_{v_x}v_x\mathrm{d}v_x=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^\infty v_xn\exp(-\frac{mv_x^2}{2kT})\mathrm{d}v_x=n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \qquad ②$$

（2）在当气体温度为T时，泄出气体分子的平均动能为

$$\bar{E}_{\mathrm{k}}=\frac{1}{N_{泄}}\int_0^\infty\frac{1}{2}mv_x^2n_{v_x}v_x\mathrm{d}v_x+kT \qquad ③$$

其中kT为气体分子垂直于x方向速度对平均动能的贡献。将①和②式代入③式得

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\mathrm{k}}&=\frac{1}{n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}\int_0^\infty\frac{1}{2}mn\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}v_x^3\exp(-\frac{mv_x^2}{2kT})\mathrm{d}v_x+kT\\&=\frac{1}{\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}\frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\frac{1}{2\left(m/2kT\right)^2}+kT=2kT\end{aligned} \qquad ④$$

（3）由于小孔垂直于x方向，考虑到对称性，气体泄出后，容器运动速度沿x轴负方向。设在时刻t容器中气体的分子数为N，容器整体运动速度大小为u；在时刻$t+\mathrm{d}t$容器中气体的分子数为$N+\mathrm{d}N$，容器整体运动速度大小为$u+\mathrm{d}u$。此过程中整个体系的动量守恒

$$\left(M+Nm\right)u=\left[\left(M+Nm+m\mathrm{d}N\right)\left(u+\mathrm{d}u\right)\right]-m\mathrm{d}N\left(u-\bar{v}_x\right) \qquad ⑤$$

其中$\bar{v}_x$为$\mathrm{d}t$时间内泄出的气体分子在x方向上的平均速度大小，注意$\mathrm{d}N$为负值。化简后并去

除高阶小量得

$$(M+Nm)\mathrm{d}u=-m\bar{v}_x\mathrm{d}N \qquad ⑥$$

在此过程中体系的能量守恒。因此有

$$\frac{1}{2}(M+Nm)u^2+\frac{3}{2}NkT=\frac{1}{2}(M+Nm+\mathrm{d}Nm)(u+\mathrm{d}u)^2+\frac{3}{2}(N+\mathrm{d}N)k(T+dT) \\ -\frac{1}{2}\mathrm{d}Nm\overline{(u-v_x)^2}-\mathrm{d}NkT \qquad ⑦$$

方程左边两项分别为 $\mathrm{d}t$ 前体系整体平动动能和内能。右边前两项分别为 $\mathrm{d}t$ 后体系整体平动动能、内能；后两项对应泄出气体分子的平均动能。化简后并去除高阶小量得

$$(M+Nm)u\mathrm{d}u+\frac{3}{2}Nk\mathrm{d}T+\frac{1}{2}kT\mathrm{d}N+mu\bar{v}_x\mathrm{d}N-\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}\mathrm{d}N=0 \qquad ⑧$$

将⑥式代入⑧式得

$$\left(\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}-\frac{1}{2}kT\right)\mathrm{d}N=\frac{3}{2}Nk\mathrm{d}T \qquad ⑨$$

由④式得

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}+kT=2kT$$

此即

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=kT$$

将上式代入⑨式得

$$\frac{1}{2}kT\mathrm{d}N=\frac{3}{2}Nk\mathrm{d}T$$

此即

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=3\frac{\mathrm{d}T}{T} \qquad ⑩$$

两边积分得

$$T=CN^{1/3} \qquad ⑪$$

式中 C 为积分常数。代入初始条件得

$$T_0=CN_0^{1/3} \qquad C=\frac{T_0}{N_0^{1/3}} \qquad ⑫$$

由②式，$\mathrm{d}t$ 时间内泄漏出的气体分子数为

$$\mathrm{d}N=-\frac{N}{V}S\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\mathrm{d}t=-\frac{N^{7/6}}{V}S\sqrt{\frac{kC}{2\pi m}}\mathrm{d}t \qquad ⑬$$

积分得

$$N=N_0\left(1+\frac{S}{6V}\sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}}t\right)^{-6} \qquad ⑭$$

由此得，t 时刻容器中气体的温度为

$$T = CN^{1/3} = T_0\left(1+\frac{S}{6V}\sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}}t\right)^{-2} \qquad ⑮$$

（4）由⑥式得

$$\mathrm{d}u = -\frac{m\bar{v}_x \mathrm{d}N}{M+Nm} \qquad ⑯$$

其中 $\bar{v}_x$ 为泄出气体分子的平均速度大小

$$\begin{aligned}\bar{v}_x &= \frac{1}{N_{泄}}\int_0^\infty v_x n_{v_x} v_x dv_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v_x^2 \exp(-\frac{mv_x^2}{2kT})\mathrm{d}v_{mx} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\sqrt{\frac{\pi}{(m/2kT)^3}} = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}\end{aligned} \qquad ⑰$$

将⑰式代入⑯式得

$$u(t) = -\int_{N_0}^{N(t)}\sqrt{\frac{\pi mkT}{2}}\frac{\mathrm{d}N}{M+Nm} = -\sqrt{\frac{\pi mkT_0}{2N_0^{1/3}}}\int_{N_0}^{N(t)}\frac{N^{1/6}\mathrm{d}N}{M+Nm} \qquad ⑱$$

当容器质量远大于其中气体质量（$M >> N_0 m$）时，上式可近似为

$$u(t) \approx -\frac{1}{M}\sqrt{\frac{\pi mkT_0}{2N_0^{1/3}}}\int_{N_0}^{N(t)} N^{1/6}\mathrm{d}N = -\frac{6}{7M}\sqrt{\frac{\pi mkT_0}{2N_0^{1/3}}}\left(N(t)^{7/6} - N_0^{7/6}\right) \qquad ⑲$$

将⑭式代入⑲式得，t 时刻容器运动速度的大小为

$$u(t) \approx \frac{6N_0}{7M}\sqrt{\frac{\pi mkT_0}{2}}\left(1-\left(1+\frac{S}{6V}\sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}}t\right)^{-7}\right) \qquad ⑳$$

六、介质的折射率 n 可以大于 0，也可以小于 0。n 小于 0 的介质称为负折射介质。光在负折射介质内传播，其光程为负值（相位随传播距离的变化规律与在折射率为正的介质中的相反）。如果定义折射角与入射角在界面法线同侧时折射角为负，可以证明折射定律在介面两边有负折射介质时仍然成立，即 $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$，其中的 n_1 和 n_2 均可以大于 0 或小于 0，θ_2 为折射角。

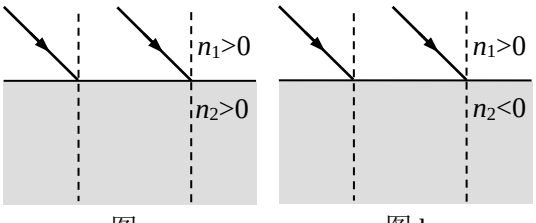


图 a　　图 b

（1）设想一束平行光入射到界面上，根据惠更斯原理，在答题纸上画出图 a 和图 b 所示情况下进入介质 2 的光线及对应的子波的示意图，并依此证明折射定律成立；

（2）如图 c 所示，半径为 R 的球面将空间隔开为两个区域，其折射率分别记为 n_1（$n_1 > 0$）、n_2（$n_2 < 0$），C 点是球面的球心，

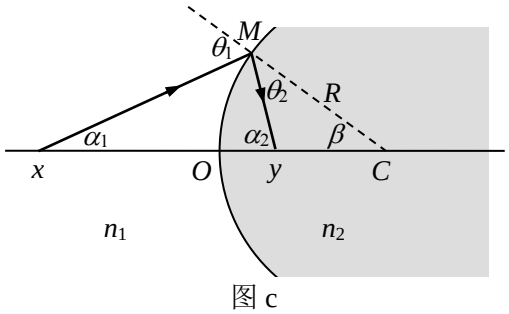


图 c

取某一光轴与球面的交点O为原点。图中已画出此情形下一段入射光线和折射光线，x和y分别为入射光线、折射光线与光轴的交点坐标。记物距为s_1，像距为s_2。在傍轴近似下导出球面的成像公式和横向放大率公式。请明确指出最后结果中各个量的正负号约定。

（3）设介质 1 为空气，即$n_1 \approx 1$，n_2可大于 0 也可小于 0。在球面（参考图 c ）前放置一普通薄凸透镜，透镜的光轴通过球心C，焦点位于负折射介质区域内，透镜的焦距$f = 1.5R$，透镜中心O'点与O点的距离为d。一束沿光轴传播的平行光入射到薄透镜。分别就表中四组参数计算入射光在光轴上会聚点离O点的距离，并在答题纸上画出序号 4 情形的光路示意图。

序号	n_2	d
1	1.5	$0.35R$
2	1.5	$0.85R$
3	–1.5	$0.35R$
4	–1.5	$0.85R$

参考解答:

（1）当$n_1 > 0$，$n_2 > 0$时，如图 1a 所示，AB为入射光的等光程（等相位）面，当B点到达B'时，A点发出的子波的波前在介质 2 中位于一个以A点为球心的半球面上，此球面在光线的入射面上是半径为r的半圆，半径r由下式确定

$$n_2 r = n_1 |BB'| \qquad ①$$

做直线$B'A'$与子波相位面的圆相切于A'点，则$B'A'$是等光程（等相位）面。由几何关系

$$|BB'| = |AB'| \sin\theta_1$$

$$r = |AB'| \sin\theta_2$$

由以上方程得到

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad ②$$

当$n_1 > 0$，$n_2 < 0$时，在介质 2 中传播的光的光程为负。

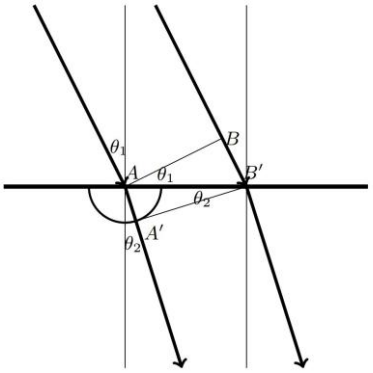


图 1a

（解法一）

如图 1b 所示，在B'发出的子波的波前是半径为r的半圆，对应于光程$n_2 r < 0$。因此，在介质 2 中与A点等相位的面由通过A点与圆相切的线确定，切点为A'。圆的半径由下式确定

$$n_1 |BB'| + n_2 |B'A'| = 0 \qquad ③$$

由几何关系

$$|BB'| = |AB'| \sin\theta_1，\quad |B'A'| = |AB'| \sin|\theta_2|$$

由以上方程得到

$$n_1 |AB'| \sin\theta_1 = -n_2 |AB'| \sin|\theta_2| = n_2 |AB'| \sin\theta_2 \qquad ④$$

即

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad ⑤$$

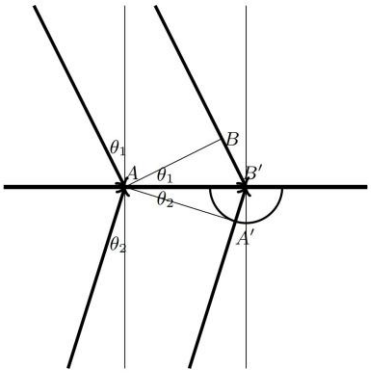


图 1b

[（解法二）

如图 1b’所示，AB为入射光的等光程（等相位）面，当B点到达B'时，A点发出的子波的波前在介质 2 中的入射面上是以A点为圆心，半径为r的圆，对应于光程$n_2 r < 0$。半径r由下式确定

$$|n_2| r = n_1 |BB'| \qquad ③$$

因光程为负，等效于等光程面反向移动，成为在介质 1 中以虚线画出的半圆。做直线$B'A'$与虚线的子波相位面的圆相切于A'点，则$B'A'$是等光程（等相位）面。由几何关系

$$|BB'| = |AB'| \sin\theta_1，\quad r = |AB'| \sin|\theta_2| \qquad ④$$

由以上方程得到

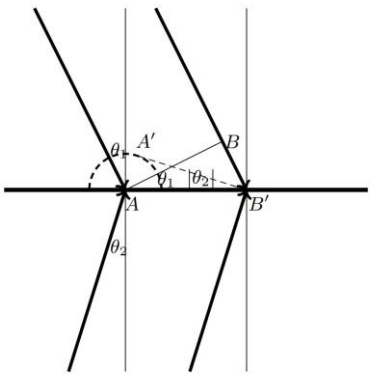


图 1b’

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \qquad ⑤]$$

（2）约定物侧的物距 s_1 和像侧的像距 s_2 取为正，物侧的像距和像侧的物距取为负。入射角 θ_1 为正，折射角 θ_2 为负。其余图中标出的角度均取为正。 由图 c 可见

$$\theta_1 = \alpha_1 + \beta\ ,\quad -\theta_2 = \alpha_2 - \beta \qquad ⑥$$

在傍轴条件下，这些角度均为小角度，有

$$\sin\theta_1 = \theta_1\ ,\quad \sin\theta_2 = \theta_2$$

以及

$$\tan\alpha_1 = \sin\alpha_1 = \alpha_1 = \frac{h}{s_1}$$

$$\tan\alpha_2 = \sin\alpha_2 = \alpha_2 = \frac{h}{s_2} \qquad ⑦$$

$$\tan\beta = \sin\beta = \beta = \frac{h}{R}$$

这里，h 是折射点 M 与光轴的距离。由折射定律

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

即

$$n_1\left(\frac{h}{s_1}+\frac{h}{R}\right) = -n_2\left(\frac{h}{s_2}-\frac{h}{R}\right) \qquad ⑧$$

整理得到

$$\frac{n_1}{s_1}+\frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2-n_1}{R} \qquad ⑨$$

注意到 $n_2 < 0$，$n_1 > 0$，上式右方为负。

为计算横向放大率，如图 2 所示，考虑物 Q_1P_1，设像为 Q_2P_2。设想光轴绕 C 点转过一个小角，使得 P_1 点位于光轴上，原 Q_1 转到 Q_1'，Q_2 转到 Q_2'，P_1 的像为 P_2，在傍轴近似下，因转角很小

$$Q_1P_1 = Q_1Q_1'$$

$$Q_2P_2 = Q_2Q_2' \qquad ⑩$$

由图 2 的几何关系有

$$|Q_1P_1| = s_1\theta_1 \qquad ⑪$$

$$|Q_2P_2| = -s_2\theta_2 \qquad ⑫$$

由此得到横向放大率公式

$$\frac{|Q_2P_2|}{|Q_1P_1|} = \frac{-s_2\theta_2}{s_1\theta_1} = -\frac{s_2n_1}{s_1n_2} \qquad ⑬$$

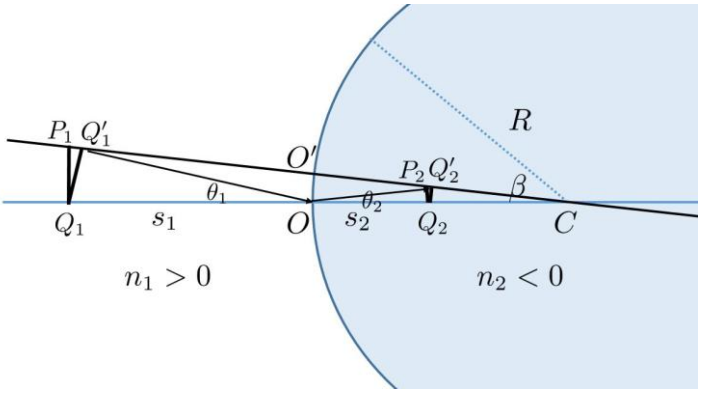


图 2

（3）（12 分）如图 3 所示，如果没有球面隔开的介质 2，平行光经过薄凸透镜后将汇聚于焦点，如图中虚线所示。在引入介质 2 后，虚线所示的汇聚点是球面的虚物，对应的物距是

$$s_1 = -(f-d) \qquad ⑭$$

如果 $n_2 > 0$，已知球面的成像公式为

$$\frac{n_1}{s_1}+\frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2-n_1}{R} \qquad ⑮$$

形式上与（2）中求出的成像公式完全相同，在 $n_2 > 0$ 和 $n_2 < 0$ 的情况下像距 s_2 都可以解出为

$$s_2 = \frac{n_2s_1R}{n_2s_1 - n_1(s_1+R)} = \frac{n_2R(f-d)}{(n_2-n_1)(f-d)+n_1R} \qquad ⑯$$

对于题中给出的数据，求得各自的 s_2，如下表所示：

序号	n_2	d	s_2
1	1.5	0.35R	1.10R
2	1.5	0.85R	0.74R
3	–1.5	0.35R	0.92R
4	–1.5	0.85R	1.56R

按照表中结果，画出的示意图由图 3 给出。

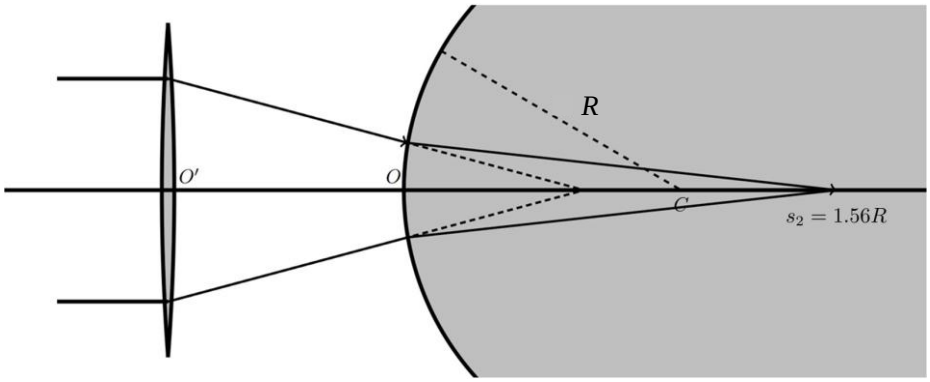


图 3

七、在固体材料中，考虑相互作用后，可以利用“准粒子”的概念研究材料的物理性质。准粒子的动能与动量之间的关系可能与真实粒子的不同。当外加电场或磁场时，准粒子的运动往往可以用经典力学的方法来处理。在某种二维界面结构中，存在电量为 q、有效质量为 m 的准粒子，它只能在 x-y 平面内运动，其动能 K 与动量大小 p 之间的关系可表示为 $K=\dfrac{p^2}{2m}+\alpha p$，其中 α 为正的常量。

（1）对于质量为 m 的真实的自由粒子，动能 K 与动量大小 p 之间的关系可表示为 $K=\dfrac{p^2}{2m}$，试从动能定理出发，推导该粒子运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 与动量 $\boldsymbol{p}$ 之间的关系式；

（2）仿照（1）的方法，推导准粒子运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 与动量 $\boldsymbol{p}$ 之间的关系式；

（3）用动能表示准粒子运动速度的大小；

（4）将该二维界面结构置于匀强磁场中，磁场沿 z 轴正方向，磁感应强度大小为 B，求动能为 K 的准粒子做匀速率圆周运动的半径、周期和角动量的大小；

（5）将该二维界面结构放置在匀强电场中，准粒子可能在垂直于电场的方向上产生加速度。如果电场沿 x 轴正方向，电场强度大小为 E。当准粒子的速度大小为 v（$v\neq\alpha$）、方向与 x 轴正方向成 θ 角时，求其运动的加速度的分量 a_x 和 a_y。

参考解答：

（1）根据动能定理

$$\mathrm{d}K=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} \qquad ①$$

并利用真实的自由粒子动能的表达式，有

$$\mathrm{d}K=\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} \qquad ②$$

由①②式得

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}-\boldsymbol{v}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$$

考虑到上式对任意的 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 都成立，有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{m} \qquad ③$$

（2）利用题给的准粒子动能的表达式，有

$$\mathrm{d}K=\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}+\alpha\frac{\boldsymbol{p}}{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} \qquad ④$$

由①④式得

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}+\alpha\frac{\boldsymbol{p}}{p}-\boldsymbol{v}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$$

考虑到上式对任意的 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 都成立，有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}+\alpha\frac{\boldsymbol{p}}{p} \qquad ⑤$$

（3）由⑤式可得

$$v^2=\frac{p^2}{m^2}+2\alpha\frac{p}{m}+\alpha^2$$

因此有

$$v=\frac{p}{m}+\alpha \qquad ⑥$$

能量为 K 的准粒子动量为

$$p=-m\alpha+\sqrt{m^2\alpha^2+2mK} \qquad ⑦$$

利用⑥和⑦可得

$$v=\sqrt{\alpha^2+\frac{2K}{m}} \qquad ⑧$$

（4）在匀强磁场中，准粒子做匀速率圆周运动

$$v=\omega R$$

其动量改变率的大小为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right|=\omega p$$

由以上两式得

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{v}{R}p \qquad ⑨$$

准粒子做匀速率圆周运动的动力学方程为

$$p\frac{v}{R}=qvB \qquad ⑩$$

利用⑦式解得

$$R=\frac{p}{qB}=\frac{-m\alpha+\sqrt{m^2\alpha^2+2mK}}{qB} \tag{11}$$

准粒子做匀速率圆周运动的周期为

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\left(-m\alpha+\sqrt{m^2\alpha^2+2mK}\right)}{qB\sqrt{\alpha^2+\dfrac{2K}{m}}} \tag{12}$$

准粒子角动量的大小为

$$L=pR \tag{13}$$

将⑦式代入⑬式得

$$L=\frac{2m^2\alpha^2+2mK-2m\alpha\sqrt{m^2\alpha^2+2mK}}{qB} \tag{14}$$

（5）（解法一）

由⑤式得

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}-m\alpha\frac{\boldsymbol{v}}{v} \tag{15}$$

因准粒子在电场中的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{E} \tag{16}$$

即准粒子的加速度有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right)+\frac{q}{m}\boldsymbol{E} \tag{17}$$

写成分量形式有

$$a_x=\frac{\alpha}{v}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}-\frac{\alpha v_x}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+qE$$

$$a_y=\frac{\alpha}{v}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}-\frac{\alpha v_y}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

利用关系式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{v_x}{v}a_x+\frac{v_y}{v}a_y \tag{18}$$

⑰式可改写成

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{\alpha}{v}+\dfrac{\alpha v_x^2}{v^3}\right)a_x+\dfrac{\alpha v_x v_y}{v^3}a_y=\dfrac{qE}{m}\\ \left(1-\dfrac{\alpha}{v}+\dfrac{\alpha v_y^2}{v^3}\right)a_y+\dfrac{\alpha v_x v_y}{v^3}a_x=0\end{cases} \tag{19}$$

或写成

$$\left(1-\frac{\alpha\sin^2\theta}{v}\right)a_x+\frac{\alpha\sin\theta\cos\theta}{v}a_y=\frac{qE}{m}$$

$$\left(1-\frac{\alpha\cos^2\theta}{v}\right)a_y+\frac{\alpha\sin\theta\cos\theta}{v}a_x=0$$

解此二元一次方程组得

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{qE}{m} + \dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\sin^2\theta}{v-\alpha} \\ a_y = -\dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\cos\theta\sin\theta}{v-\alpha} \end{cases} \qquad ⑳$$

[（解法二）

由⑤式得

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} - m\alpha\frac{\boldsymbol{v}}{v} \qquad ⑮$$

因准粒子在电场中的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} \qquad ⑯$$

在直角坐标系中

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cos\theta - p\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = qE \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\sin\theta + p\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \qquad ⑰$$

由此解得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = qE\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{qE}{p}\sin\theta \end{cases} \qquad ⑱$$

由⑤式得

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{p}{m}+\alpha\right)\cos\theta\right] = \dfrac{1}{m}\cos\theta\dfrac{dp}{dt} - \left(\dfrac{p}{m}+\alpha\right)\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{p}{m}+\alpha\right)\sin\theta\right] = \dfrac{1}{m}\sin\theta\dfrac{dp}{dt} + \left(\dfrac{p}{m}+\alpha\right)\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \qquad ⑲$$

将⑱式代入⑲式，并利用⑥式，得

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{qE}{m} + \dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\sin^2\theta}{v-\alpha} \\ a_y = -\dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\cos\theta\sin\theta}{v-\alpha} \end{cases} \qquad ⑳$$

（解法三）

由⑤式得

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} - m\alpha\frac{\boldsymbol{v}}{v} \qquad ⑮$$

准粒子在电场中的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} \qquad ⑯$$

在直角坐标系中，⑮式可写成分量形式

$$\begin{cases} p_x = m(v-\alpha)\cos\theta \\ p_y = m(v-\alpha)\sin\theta \end{cases} \qquad ⑰$$

由⑯⑰式得

$$\begin{cases} -m(v-\alpha)\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+m\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=qE \\ m(v-\alpha)\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+m\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \end{cases} \qquad ⑱$$

由此解得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{qE}{m}\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{qE}{m}\dfrac{\sin\theta}{v-\alpha} \end{cases} \qquad ⑲$$

将⑲式代入下式

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{dv}{dt}\cos\theta-\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{dv}{dt}\sin\theta+\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{qE}{m}+\dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\sin^2\theta}{v-\alpha} \\ a_y=-\dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\cos\theta\sin\theta}{v-\alpha} \end{cases} \qquad ⑳]$$

八、热辐射入射到反射镜，反射镜可利用热辐射的辐射压力对外做功，这一过程可以用动力学或热学来研究。为简化起见，将热辐射视为一维黑体辐射，正入射到平面理想反射（完全反射）镜上。反射镜所受辐射压力与外界阻力相互平衡，以速度v做匀速运动，运动方向与入射辐射的方向相同。已知在实验室参考系中温度为T的一维黑体辐射谱（单位时间内在频率ν附近单位频率间隔内辐射出的辐射能）为$\varphi(\nu,T)=\dfrac{2h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}$，式中$h$为普朗克常量，$k$为玻耳兹曼常量。真空中的光速为$c$。

（1）从一维黑体辐射光子与运动理想反射镜碰撞的动力学观点出发，计算在实验室参考系中镜子利用光子能量克服阻力做功的效率η。

（2）从热学角度看，辐射的入射过程与相继发生的反射过程可视为作为工作物质的反射镜经历一微小的理想热机循环：入射过程可视为镜子从高温热源吸热，反射过程可视为镜子向低温热源放热，最后镜子恢复原状。基于这一观点，证明在反射镜参照系中入射辐射与反射辐射均为一维黑体辐射，并在反射镜参照系中计算该热机的效率。

（3）在实验室参考系中计算该热机的效率。

参考解答：

（1）以匀速运动理想镜子和单位时间内与之碰撞的所有光子组成的体系为研究对象，设这些光子入射和反射时的总能量分别为ε_1和ε_2，镜子所受阻力大小为F。匀速运动理想镜子碰撞前后总能量（动能与静能之和）与动量不变，光子能量与动量之比为与频率无关的常量——

真空光速 c，体系的动量定理与能量定理给出

$$-\frac{\varepsilon_2}{c}-\frac{\varepsilon_1}{c}=-F \qquad ①$$

$$\varepsilon_2-\varepsilon_1=-Fv \qquad ②$$

利用光子能量克服阻力做功的效率为

$$\eta=\frac{Fv}{\varepsilon_1} \qquad ③$$

联立①②式得

$$\eta=\frac{2v}{c+v} \qquad ④$$

（2）由于相对论多普勒效应，实验参考系 S 中频率为 ν_1 的入射辐射在反射镜参考系 S' 中的频率红移为 ν_1'，有

$$\frac{\nu_1'}{\nu_1}=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad ⑤$$

此频率比与入射频率 ν_1 无关，仅依赖于镜子速度 v。

设 S 系中 $\mathrm{d}t_1$ 时间间隔内通过入射路径上某横截面的一段电磁波在 S' 系中被镜面接收的持续时间间隔为 $\mathrm{d}t_1'$。由于通过截面入射的波峰数等于镜面接收的波峰数，有

$$\nu_1\mathrm{d}t_1=\nu_1'\mathrm{d}t_1' \qquad ⑥$$

设参照系 S 与 S' 中入射能流通量谱分别为 $\varphi_1(\nu_1)$ 与 $\varphi_1'(\nu_1')$。S 系中 $\mathrm{d}t_1$ 时间间隔内入射的频率区间 $[\nu_1,\nu_1+\mathrm{d}\nu_1]$ 内的光子在 S' 系中 $\mathrm{d}t_1'$ 时间间隔内悉数到达镜面，故

$$\frac{\varphi_1(\nu_1)\mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}t_1}{h\nu_1}=\frac{\varphi_1'(\nu_1')\mathrm{d}\nu_1'\mathrm{d}t_1'}{h\nu_1'} \qquad ⑦$$

由⑤⑥⑦式得

$$\frac{\varphi_1(\nu_1)}{\nu_1}=\frac{\varphi_1'(\nu_1')}{\nu_1'} \qquad ⑧$$

S' 系中反射辐射与入射辐射同频，即

$$\frac{\nu_2'}{\nu_1'}=1 \qquad ⑨$$

利用该系任意频率电磁波入射波峰数等于反射波峰数，入射光子数等于反射光子数（理想反射镜不吸收光子），与⑧式推导类似，可得入射、反射能流通量谱 $\varphi_1'(\nu_1')$ 与 $\varphi_2'(\nu_2')$ 的关系为

$$\frac{\varphi_1'(\nu_1')}{\nu_1'}=\frac{\varphi_2'(\nu_2')}{\nu_2'} \qquad ⑩$$

设入射辐射的一维黑体辐射场的温度为 T_1，即有

$$\varphi_1=\frac{2h\nu_1}{\mathrm{e}^{h\nu_1/kT_1}-1} \qquad ⑪$$

由⑤⑧⑨⑩⑪式可得，S' 系中入射、反射能流通量谱为如下一维黑体辐射形式

$$\varphi_1'=\frac{2h\nu_1'}{\mathrm{e}^{h\nu_1'/kT_1'}-1} \qquad ⑫\text{（1 分）}$$

$$\varphi_2'=\frac{2h\nu_2'}{\mathrm{e}^{h\nu_2'/kT_2'}-1} \qquad ⑬\text{（1 分）}$$

分别相应温度为

$$T_1'=\frac{\nu_1'}{\nu_1}T_1=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}T_1 \qquad ⑭\text{（2 分）}$$

$$T_2'=\frac{\nu_2'}{\nu_1'}T_1'=T_1' \qquad ⑮（1\ 分）$$

按卡诺定理，理想热机效率为

$$\eta'=1-\frac{T_2'}{T_1'}=0 \qquad ⑯（1\ 分）$$

这一结果与从动力学观点得到的结果是一致的。事实上，在反射镜参照系中，镜子的位移为零，因而对外做的功为零，镜子利用光子能量克服阻力对外做功的效率也必然为零。

（3）功与能量的数值均与所选参照系有关，因而反射镜参照系与实验参照系的效率自然不同。事实上，S' 系中频率为ν_2'的反射辐射在 S 系中的频率因多普勒红移变为ν_2，有

$$\frac{\nu_2}{\nu_2'}=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad ⑰$$

与⑫式推导类似，可得 S 系中反射能流通量谱 $\varphi_2(\nu_2)$

$$\varphi_2=\frac{2h\nu_2}{\mathrm{e}^{h\nu_2/kT_2}-1} \qquad ⑱$$

它恰好是温度为

$$T_2=\frac{\nu_2}{\nu_2'}T_2'=\frac{c-v}{c+v}T_1 \qquad ⑲$$

的一维黑体辐射。推导中利用了⑭⑮⑰式。理想热机效率为

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=\frac{2v}{c+v} \qquad ⑳$$

这也与从动力学观点得到的结果一致。