第 34 届全国中学生物理竞赛预赛试题

一、选择题

1. 下述实验或现象中，能够说明光具有粒子性的是

A. 光的双缝干涉实验　　B. 黑体辐射

C. 光电效应　　D. 康普顿效应　　[　　]

2. 系统 1 和系统 2 质量相等，比热容分别为C_1和C_2，两系统接触后达到共同温度T；整个过程中与外界（两系统之外）无热交换。两系统初始温度T_1和T_2的关系为

A．$T_1=\frac{C_2}{C_1}(T-T_2)-T$　　B. $T_1=\frac{C_1}{C_2}(T-T_2)-T$

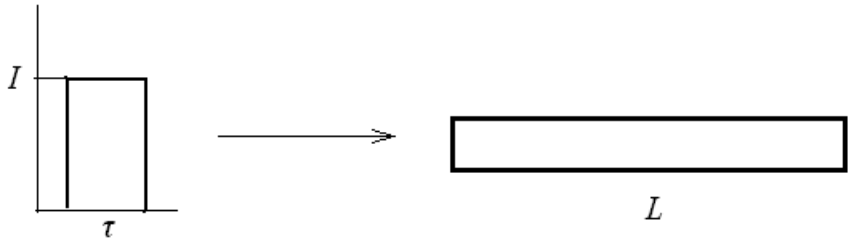
C．$T_1=\frac{C_1}{C_2}(T-T_2)+T$　　D. $T_1=\frac{C_2}{C_1}(T-T_2)+T$　　[　　]

3. 假设原子核可视为均匀球体。质量数为A的中重原子核的半径R可近似地用公式$R=R_0A^{1/3}$表示，其中R_0为一常量。对于核子数相同的原子核，下列说法正确的是

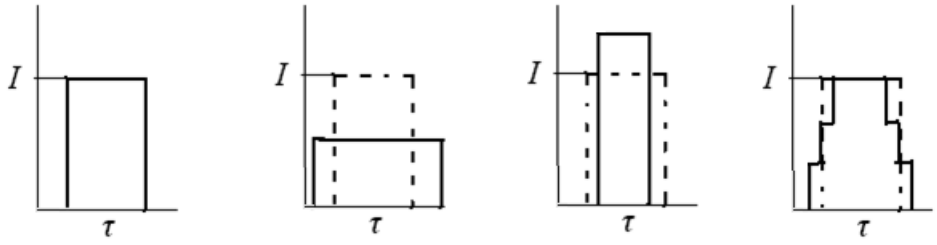
A. 质量密度是基本相同的　B.电荷密度是基本相同的

C. 表面积是基本相同的　　D. 体积是基本相同的　　[　　]

4. 有 3 种不同波长的光，每种光同时发出、同时中断，且光强都相同，总的光强为I，脉冲宽度（发光持续时间）为τ，光脉冲的光强I随时间t的变化如图所示。该光脉冲正入射到一长为L的透明玻璃棒，不考



虑光在玻璃棒中的传输损失和端面的反射损失。在通过玻璃棒后光脉冲的光强I随时间t的变化最可能的图示是（虚线部分为入射前的波形）



A　　B　　C　　D　　[　　]

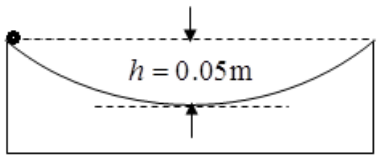
5. 一颗人造地球通讯卫星（同步卫星）对地球的张角能覆盖赤道上空东经 $\theta_0-\Delta\theta$ 到东经 $\theta_0+\Delta\theta$ 之间的区域。已知地球半径为 R_0，地球表面处的重力加速度大小为 g，地球自转周期为 T。$\Delta\theta$ 的值等于

A. $\arcsin\left(\frac{4\pi^2R_0}{T^2g}\right)^{1/3}$　　B. $2\arcsin\left(\frac{4\pi^2R_0}{T^2g}\right)^{1/3}$

C. $\arccos\left(\frac{4\pi^2R_0}{T^2g}\right)^{1/3}$　　D. $2\arccos\left(\frac{4\pi^2R_0}{T^2g}\right)^{1/3}$　　[　　]

二、填空题

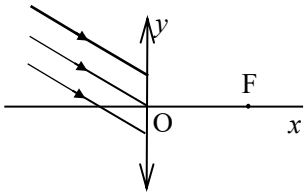
6. 如图，一个球冠形光滑凹槽深度 $h=0.050\text{m}$，球半径为 20m。现将一质量为 0.10kg 的小球放在凹槽边缘从静止释放。重力加速度大小为 9.8m/s^2。小球由凹槽最高点滑到最低点所用时间为_____s。



7. 先用波长为 λ_1 的单色可见光照射杨氏双缝干涉实验装置；再加上波长为 λ_2（$\lambda_2>\lambda_1$）的单色可见光照射同一个杨氏双缝干涉实验装置。观察到波长为 λ_1 的光的干涉条纹的 1、2 级亮纹之间原本是暗纹的位置出现了波长为 λ_2 的光的干涉条纹的 1 级亮纹，则两种光的波长之比 $\lambda_2:\lambda_1=$_____。

8. 某一导体通过反复接触某块金属板来充电。该金属板初始电荷量为 $6\mu\text{C}$，每次金属板与导体脱离接触后，金属板又被充满 $6\mu\text{C}$ 的电荷量。已知导体第一次与金属板接触后，导体上带的电荷量为 $2\mu\text{C}$；经过无穷次接触，导体上所带的电荷量最终为_____。

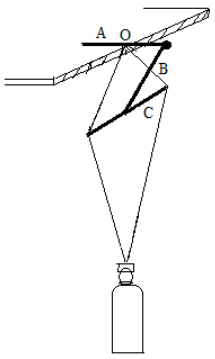
9. 如图，一焦距为 20cm 的薄透镜位于 $x=0$ 平面上，光心位于坐标原点 O，光轴与 x 轴重合。在 $z=0$ 平面内的一束平行光入射到该透镜上，入射方向与光轴的夹角为 30°。该光束通过透镜后汇聚点的位置坐标为_____。



10. 一质量为 m 的小球与一劲度系数为 k 的弹簧连接，置于光滑水平桌面上，弹簧的另一端与固定墙面相连，小球做一维自由振动，弹簧的伸缩方向与小球的振动方向一致。在一沿此弹簧长度方向以速度 u 做匀速直线运动的参考系里观察，此弹簧和小球构成的系统的机械能_____（填“守恒”或“不守恒”），理由是_____。

三、计算题

11. 某电视节目中演示了一个用三根火柴棍和细棉线悬挂起一瓶或多瓶矿泉水的实验，如图所示。图中，A、B、C 为三根相同的火柴棍，火柴棍长为 l，细实线为棉线，棉线的直径为 d（$d\ll l$）。火柴棍 A 的一半在水平桌面内，另一半在桌面外，火柴棍 A 与桌面上表面的边沿垂直；桌面厚度为 h；O 是火柴棍 A 的中点与桌面边沿的接触点；棉线紧贴桌沿绕过 A，其两端与水平火柴棍 C 的两端连接；火柴棍 B 的一端顶在火柴棍



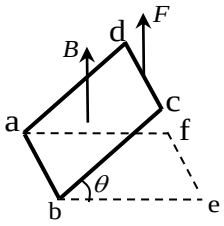
A 的圆球状头部（可近似忽略圆球状头部的尺度），另一端顶在火柴棍 C 的中点。这样的结构可以稳定地悬挂起一瓶或多瓶矿泉水。

（1）如果没有火柴棍 B 和 C，光靠 A 是否可能悬挂起一瓶矿泉水？为什么？

（2）加上火柴棍 B 和 C、小心挂上重物时，火柴棍 A 会绕 O 点在过 A 的竖直平面内转动，通过火柴棍 B 的带动，绕过 A 并与火柴棍 C 两端相连的棉线将绕桌面下表面的边沿转动一个很小的角度；只要角度大小合适，可使整个系统达到稳定平衡。求平衡时该角度的大小。

已知火柴棍与桌沿、火柴棍与棉线以及火柴棍之间都足够粗糙（即可以没有滑动），而且它们的质量与重物相比均可忽略。

12．如图，一边长为 L 的正方形铜线框 abcd 可绕水平轴 ab 自由转动，一竖直向上的外力 F 作用在 cd 边的中点，整个线框置于方向竖直向上的均匀磁场中，磁感应强度大小随时间变化。已知该方形线框铜线的电导率为 σ，铜线的半径为 r_0，质量密度 ρ，重力加速度大小为 g。

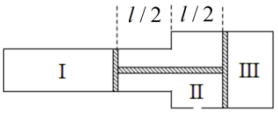


（1）当框平面与水平面 abef 的夹角为 θ 时，求该方形线框所受到的重力矩。

（2）当框平面与水平面 abef 的夹角为 θ 时，框平面恰好处于平衡状态。求此时线框中 cd 边所受到的磁场 B 的作用力的大小与外力的大小 F 之间的关系。

（3）随着磁感应强度大小随时间的变化，可按照（2）中的条件随时调整外力 F 的大小以保持框平面总与水平面 abef 的夹角为 θ。在保持夹角 θ 不变的情形下，已知在某一时刻外力为零时，磁感应强度大小为 B；求此时磁感应强度随时间的变化率 $\left|\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right|$。

13．横截面积为 S 和 $2S$ 的两圆柱形容器按图示方式连接成一气缸，每个圆筒中各置有一活塞，两活塞间的距离为 l，用硬杆相连，形成“工”形活塞，它把整个气缸分隔成三个气室，其中 I、III 室密闭摩尔数分别为 ν 和 2ν 的同种理想气体，两个气室内都有电加热器；II 室的缸壁上开有一小孔，与大气相通；1mol 该种气体内能为 CT（C 是气体摩尔热容量，T 是气体的绝对温度）。当三个气室中气体的温度均为 T_1 时，“工”形活塞在气缸中恰好在图所示的位置处于平衡状态，这时 I 室内气柱长亦为 l，II 室内空气的摩尔数为 $\dfrac{3}{2}\nu_0$。已知大气压不变，气缸壁和活塞都是绝热的，不计活塞与气缸之间的摩擦。现通过电热器对 I、III 两室中的气体缓慢加热，直至 I 室内气体的温度升为其初始状态温度的 2 倍时，活塞左移距离 d。已知理想气体常量为 R。求



（1）III 室内气体初态气柱的长度；

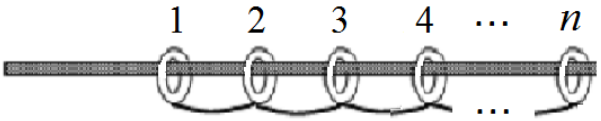
（2）III 室内气体末态的温度；

（3）此过程中 I、III 室密闭气体吸收的总热量。

14．把沿 x 方向通有电流（ x 方向的电场强度为 E_x ）的长方体形的半导体材料，放在沿 z 方向匀强磁场中，磁感应强度大小为 B_Z 。在垂直于电场和磁场的 $+y$ 或 $-y$ 方向将产生一个横向电场 E_y ，这个现象称为霍尔效应，由霍尔效应产生的电场称为霍尔电场。实验表明霍尔电场 E_y 与电流的电流密度 J_x 和磁感应强度 B_Z 的乘积成正比，即 $E_y = R_H J_x B_Z$ 比例系数 R_H 称为霍尔系数。

某半导体材料样品中有两种载流子：空穴和电子；空穴和电子在单位电场下的平均速度（即载流子的平均速度与电场成正比的比例系数）分别为 μ_{p} 和 $-\mu_{\mathrm{n}}$ ，空穴和电子的数密度分别为 p 和 n ，电荷分别为 e 和 $-e$ 。试确定该半导体材料的霍尔系数。

15．某根水平固定的滑竿上有 n（ $n \geq 3$ ）个质量均为 m 的相同滑扣（即可以滑动的圆环），每相邻的两个滑扣（极薄）之间有不可伸长的柔软轻质细线相连，细线长度均为 L ，滑扣在滑竿上滑行的阻力恒为滑扣对滑竿正压力的 μ 倍。开始时所有滑扣可近似地看成挨在一起（但未相互挤压）；当给第 1 个滑扣一个初速度使其在滑竿上开始滑行（平动）；在滑扣滑行的过程中，前、后滑扣之间的细线拉紧后都以共同的速度向前滑行，但最后一个（即第 n 个）滑扣固定在滑竿边缘。已知从第 1 个滑扣开始的 $(n-1)$ 个滑扣都依次拉紧，继续滑行距离 l（ $0 \leq l < L$ ）后静止，且所有细线拉紧前后的时间间隔极短。求

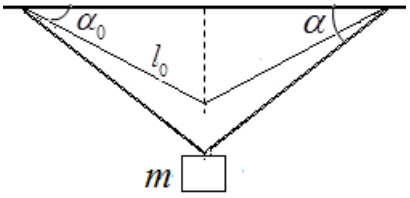


（1）滑扣 1 的初速度的大小；

（2）整个过程中克服摩擦力所做的功；

（3）整个过程中仅仅由于细线拉紧引起的总能量损失。

16．如图，两劲度系数均为 k 的同样的轻弹性绳的上端固定在一水平面上，下端连在一起悬挂一质量为 m 的小物块。平衡时，轻弹性绳与水平面的夹角为 α_0 ，弹性绳长度为 l_0 。现将小物块向下拉一段微小的距离后从静止释放。



（1）证明小物块做简谐振动；

（2）若 $k = 0.50\mathrm{N/m}$ ， $m = 50\mathrm{g}$ ， $\alpha_0 = 30°$ ， $l_0 = 2.0\mathrm{m}$ ，求小物块振动的周期 T；

（3）当小物块向下拉一段微小的距离 $0.010\mathrm{m}$ 时，写出该小物块相对于平衡位置的偏离随时间变化的方程。

已知：当 $x \ll 1$ 时， $\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$ ， $\sqrt{1+x} \approx 1+\dfrac{1}{2}x$ 。

第 34 届全国中学生物理竞赛预赛参考解答

一、选择题.

1. [BCD]；2. [D]；3. [ACD]；4. [D] ；5. [C]

二、填空题

6. 2.2

7. 3:2

8. 3μC

9. [$(20,-\frac{20}{3}\sqrt{3},0)$ 或 $(20,-\frac{20}{3}\sqrt{3})$

10. 不守恒

墙壁对弹簧有作用力（外力），且在运动参考系中，该力的作用点有位移，所做的功不为零

三、计算题

11. （1）若没有火柴棍 B 和 C，则挂重物时在过 A 的竖直平面内的情景如图 1 所示。因棉线直径 $d\neq 0$，棉线的中心轴线到 O 点的距离为 $\frac{d}{2}$，重物相对于支撑点 O 有一力矩

$$L=\frac{d}{2}Mg \qquad ①$$

式中 M 为重物的质量，g 为重力加速度的大小，此力矩会使火柴棍转动直至掉下。

（2）如题图所示的结构可以稳定地悬挂起重物，当重物和火柴棍的质量趋于零时（未挂重物时）时，在过火柴棍 A 的竖直平面内的情景应如图 2.a 所示。由题设，火柴棍与桌沿、火柴棍与棉线以及火柴棍之间都足够粗糙（可以没有滑动），可形成一个稳定的三脚架结构。由于火柴棍 A 水平，火柴棍 B 的下端正好在 A 的中点的正下方，由几何关系知，火柴棍 A 和 B 之间的夹角为

$$\alpha=60° \qquad ②$$

（由于 $d<<l$，此时忽略了棉线的粗细），



图1

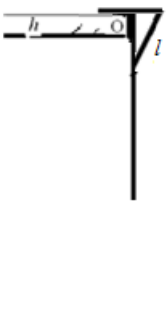


图2.a

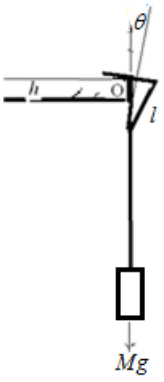


图2.b

桌面上表面边沿 O 点到火柴棍 B 的下端（即火柴棍 C 的中点）的距离为

$$L=\frac{\sqrt{3}}{2}l \qquad ③$$

又由于火柴棍 C 水平，由几何关系知，从 O 点到火柴棍 C 两端的距离均为 l。

值得指出的是，据题意，前面提及的三脚架结构在重物质量逐渐增大时是稳定的：因为根据题意，火柴棍与棉线之间是足够粗糙的，以至于跨过火柴棍 A 的棉线与它所连接的火柴棍 C 形成的正三角形能得以保持，且火柴棍 C 也继续保持水平，因而火柴棍 B 与 A 之间的夹角也能得以保持不变，从而在图 2.b 中，火柴棍 A 和 B 之间的夹角仍然为 $60°$ 。

小心地挂上重物，在过火柴棍 A 的竖直平面内的情景如图 2.b 所示。这时，火柴棍 A 受到四个力的作用：火柴棍 B 对它的头部的斜向上的推力、跨过火柴棍 A 的中部的细棉线对它的竖直向下的压力、桌面上边沿 O 点对它的正压力和静摩擦力。火柴棍 A 与桌面之间静摩擦力在一定范围内可以保证火柴棍 A 所受合力为零。同时，由于力矩 L 的作用，火柴棍 A 会绕 O 点转动，通过火柴棍 B 的带动，绕过 A 连结火柴棍 C 两端的棉线将绕桌面下表面的边沿转过一小角度，使重物向左平移；当重物向左平移的距离达到 $\frac{d}{2}$ 时，重物处于桌沿 O 的正下方，重力作用线恰好过支点 D（见图 3），因而对 D 点的力矩为零，整个系统不会转动，从而达到稳定平衡。设此时过 A 连结火柴棍 C 两端的棉线绕桌面下表面的边沿转过的角度 $\angle \mathrm{DW'D'}=\theta$ ，如示意图 3 所示；图中 D 是桌面下表面边沿，且

$$\mathrm{OO'}=\mathrm{DD'}=\frac{d}{2},$$

$$\mathrm{OD}=\mathrm{O'D'}=h$$

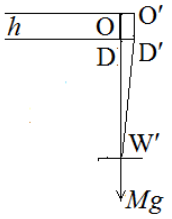


图3

W′ 是火柴棍 C 的中点，显然

$$\mathrm{D'W'}=L-h=\frac{\sqrt{3}}{2}l-h \qquad ④$$

在直角 $\Delta \mathrm{DW'D'}$ 中，由几何关系得

$$\sin\theta=\frac{\frac{d}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l-h} \qquad ⑤$$

或

$$\theta=\arcsin\frac{d}{\sqrt{3}l-2h} \qquad ⑥$$

12. （1）该方形线框的质量

$$m=4L\pi r_0^2\rho \qquad ①$$

方形线框的重力相对于 AB 边的力矩为

$$\begin{aligned} L_g &= mg\frac{L}{2}\cos\theta \\ &= 4L\pi r_0^2\rho g\frac{L}{2}\cos\theta = 2L^2\pi r_0^2\rho g\cos\theta \end{aligned} \qquad ②$$

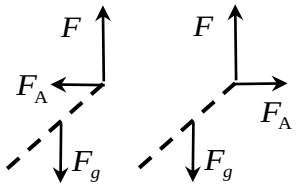
（2）拉力 F 的力矩为

$$L_F=FL\cos\theta \qquad ③$$

对于线圈 abcd 四条边来说，ab 边为转轴，bc 和 da 边产生的安培力相互抵消，力矩之和为零，只有 cd 边产生安培力的力矩。设 cd 边受到的安培力设为F_{A}，有

$$L_A = F_{\mathrm{A}} L\sin\theta \qquad ④$$

该系统稳定，所以重力F_g的力矩L_g、安培力F_{A}的力矩L_{A}和拉力力矩L_F平衡。有两种情况（受力图分别如图 a 和图 b 所示，图中虚线是线框 ab 边和 cd 边中点的连线）：



图a　　图b

$$L_{\mathrm{A}} = L_g - L_F \qquad ⑤$$

或

$$L_{\mathrm{A}} = L_F - L_g \qquad ⑥$$

所以安培力F_A的力矩为

$$L_{\mathrm{A}} = 2L^2\pi r_0^2\rho g\cos\theta - FL\cos\theta \qquad ⑦$$

或

$$L_{\mathrm{A}} = FL\cos\theta - 2L^2\pi r_0^2\rho g\cos\theta \qquad ⑧$$

由④⑦⑧式得

$$F_{\mathrm{A}} = (2L\pi r_0^2\rho g - F)\cot\theta \qquad ⑨$$

或

$$F_{\mathrm{A}} = (F - 2L\pi r_0^2\rho g)\cot\theta \qquad ⑩$$

（3）这时通过线框上的磁通量为

$$\phi(\theta) = L^2 B\cos\theta \qquad ⑪$$

感应电动势为

$$\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = L^2\cos\theta\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \qquad ⑫$$

设该方形线框的电阻为R，由电阻定律有

$$R = \frac{4L}{\sigma\pi r_0^2} \qquad ⑬$$

由⑫⑬式得，该方形线框上的感应电流为

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{L}{4}\sigma\pi r_0^2\cos\theta\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \qquad ⑭$$

cd 边所受到的安培力的大小为

$$F_{\mathrm{A}} = iBL = \frac{L^2}{4}\sigma\pi r_0^2 B\cos\theta\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \qquad ⑮$$

由⑨⑩⑮式得

$$\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|=\frac{8\rho g}{BL\sigma\sin\theta} \qquad ⑯$$

13. （1）设大气压强为 p_0。初态：I 室内气体压强为 p_1；III 室内气体压强为 p_1'，气柱的长度为 l'。末态：I 室内气体压强为 p_2；III 室内气体压强为 p_2'。由初态到末态：活塞右移距离为 d。对初态应用气体状态方程，对 I 室内气体有

$$p_1lS=\nu RT_1 \qquad ①$$

对 II 室内气体有

$$p_0(\frac{l}{2}\times S+\frac{l}{2}\times 2S)=\frac{3}{2}v_0RT_1 \qquad ②$$

对 III 室内气体有

$$p_1'l'(2S)=(2\nu)RT_1 \qquad ③$$

由力学平衡条件有

$$p_1'(2S)=p_1S+p_0(2S-S) \qquad ④$$

由题给条件和①②③④式得

$$l'=\frac{v_2}{v_1+v_0}l=\frac{2\nu}{\nu+v_0}l \qquad ⑤$$

（2）对末态应用气体状态方程，对 I 室内气体有

$$p_2(l-d)S=\nu RT_2 \qquad ⑥$$

对 III 室内气体有

$$p_2'(l'+d)(2S)=(2\nu)RT_2' \qquad ⑦$$

由力学平衡条件有

$$p_2'(2S)=p_2S+p_0(2S-S) \qquad ⑧$$

联立②③⑤⑥⑦⑧式和题给条件得

$$T_2'=\frac{2\nu l+(\nu+v_0)d}{(l-d)(\nu+v_0)}\left(1+\frac{v_0}{2\nu}\frac{l-d}{l}\right)T_1 \qquad ⑨$$

（3）大气对密闭气体系统做的功为

$$W=p_0(2S-S)(-d)=-p_0Sd=-\frac{d}{l}\nu_0RT_1 \qquad ⑩$$

已利用②式。系统密闭气体内能增加量为

$$\Delta U=\nu C(T_2-T_1)+(2\nu)C(T_2'-T_1)=\nu C(2T_2'-T_1) \qquad ⑪$$

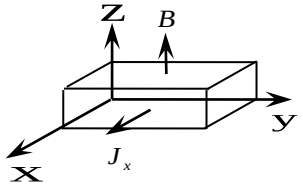
由⑨⑪式得

$$\begin{aligned}\Delta U&=\frac{2\nu l+(\nu+v_0)d}{(l-d)(\nu+v_0)}\left(2\nu+\frac{l-d}{l}v_0\right)CT_1-\nu CT_1\\&=\left[\frac{2\nu l+(\nu+v_0)d}{(l-d)(\nu+v_0)}\left(2+\frac{l-d}{l}\frac{v_0}{\nu}\right)-1\right]\nu CT_1\end{aligned} \qquad ⑫$$

密闭气体系统吸收的热量为

$$Q=\Delta U-W=\left[\frac{2vl+(v+v_0)d}{(l-d)(v+v_0)}\left(2+\frac{l-d}{l}\frac{v_0}{v}\right)-1\right]\nu CT_1+\frac{d}{l}\nu_0 RT_1 \qquad ⑬$$

14. 为确定起见，取坐标系如图所示，磁场沿 z 方向，通电电流 J_x 沿 x 方向。设半导体材料中的载流子空穴和电子沿 x 方向的平均速率分别为 v_{px} 和 v_{nx}，沿 x 方向的电流密度为



$$J_{\mathrm{x}}=ep\left(v_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{x}}+(-e)n\left(-v_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{x}} \qquad ①$$

式中

$$\left(v_p\right)_x=\mu_p E_x \qquad ②$$

$$\left(-v_n\right)_x=-\mu_n E_x \qquad ③$$

如果沿x 方向的电流中只有一种载流子，则当作用于载流子的洛仑兹力与霍尔电场的作用力平衡时，霍尔电场达到稳定，如金属导体。在半导体中，存在两种载流子，同一磁场对两种载流子受到的洛仑兹力方向相同，所受到的霍尔电场力方向相反，两种载流子受到的洛仑兹力不可能同时与霍尔电场力平衡，所以在半导体样品存在载流子的横向流动，当任何时刻流向样品同一侧面的空穴数与电子数相等时，霍尔电场便达到稳定。设两种载流子的横向平均速率分别为 $(v_{\mathrm{p}})_y$ 和 $(v_{\mathrm{n}})_y$ 则横向电流密度为

$$J_{\mathrm{y}}=ep\left(-v_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{y}}+(-e)n\left(-v_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{y}} \qquad ④$$

这时，空穴在横向受到的作用力的大小为

$$F_{\mathrm{py}}=e\left[E_y-\left(v_{\mathrm{p}}\right)_x B_{\mathrm{z}}\right] \qquad ⑤$$

电子在横向受到的作用力的大小为

$$F_{\mathrm{ny}}=(-e)\left[E_y-\left(-v_{\mathrm{n}}\right)_x B_{\mathrm{z}}\right] \qquad ⑥$$

故两种载流子的横向平均速度为

$$\left(-v_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{y}}=\mu_{\mathrm{p}}\left[E_{\mathrm{y}}-\left(v_{\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{z}}\right] \qquad ⑦$$

$$\left(-v_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{y}}=-\mu_{\mathrm{p}}\left[E_{\mathrm{y}}+\left(v_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{x}} B_{\mathrm{z}}\right] \qquad ⑧$$

霍尔电场达到稳定时有

$$J_{\mathrm{y}}=0 \qquad ⑨$$

由④⑦⑧⑨及②③各式得

$$E_{\mathrm{y}}=\frac{p\mu_{\mathrm{p}}^2-n\mu_{\mathrm{n}}^2}{\left(p\mu_{\mathrm{p}}+n\mu_{\mathrm{n}}\right)}E_{\mathrm{x}}B_{\mathrm{z}} \qquad ⑩$$

根据霍尔系数的定义以及④⑩两式得

$$R_{\mathrm{H}}=\frac{1}{e}\frac{p\mu_{\mathrm{p}}^2-n\mu_{\mathrm{n}}^2}{\left(p\mu_{\mathrm{p}}+n\mu_{\mathrm{n}}\right)^2} \qquad ⑪$$

15. （1）为普遍起见，设两个物体质量分别为m_1和m_2，初速度分别为v_1和 0，发生完全非弹性碰撞后共同速度为v，则碰前的动能

$$E=\frac{1}{2}mv_1^2 \qquad ①$$

由于细绳拉紧前后时间间隔极短，可以忽略摩擦阻力，故前后动量守恒，有

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v \qquad ②$$

碰后的动能之和（即系统剩余动能）为

$$E'=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 \qquad ③$$

由①②③式得

$$E'=\frac{m_1}{m_1+m_2}E \qquad ④$$

[损失的动能为

$$\Delta E=E-E'=\frac{m_2}{m_1+m_2}E \qquad]$$

设第 1 个滑扣以速度v_{10}开始运动

$$E_0=\frac{1}{2}mv_{10}^2 \qquad ⑤$$

在第 1 个滑扣滑动距离L、第 1 与第 2 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$E_{1f}=E_0-\mu mgL \qquad ⑥$$

在第 1 个滑扣与第 2 个滑扣之间的细绳刚拉紧后的瞬间，系统剩余动能为（根据④式）

$$E_{20}=\frac{1}{1+1}E_{1f}=\frac{1}{2}E_{1f} \qquad ⑦$$

在第 1、2 个滑扣共同滑动距离L、第 2 与第 3 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$\begin{aligned}E_{2f}&=E_{20}-2\mu mgL\\&=\frac{1}{2}(E_0-\mu mgL)-2\mu mgL\\&=\frac{1}{2}E_0-\frac{1}{2}(1^2+2^2)\mu mgL\end{aligned} \qquad ⑧$$

在第 2 与第 3 个滑扣之间的细绳刚拉紧后的瞬间，系统剩余动能为（根据④式）

$$E_{30}=\frac{2}{2+1}E_{2f}=\frac{2}{3}E_{2f} \qquad ⑨$$

在第 1、2、3 个滑扣共同滑动距离 L 、第 3 与第 4 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$\begin{aligned} E_{3f} &= E_{30} - 3\mu mgL \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}E_0 - \frac{1}{2}(1^2+2^2)\mu mgL\right) - 3\mu mgL \\ &= \frac{1}{3}E_0 - \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^2)\mu mgL \end{aligned} \qquad ⑩$$

依次类推，在第 k 个与第 $k+1$ 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$\begin{aligned} E_{kf} &= \frac{1}{k}E_0 - \frac{1}{k}[1^2+2^2+\mathrm{L}\ +k^2]\mu mgL \\ &= \frac{1}{k}E_0 - \frac{(k+1)(2k+1)}{6}\mu mgL \end{aligned} \quad , \quad 1 \le k \le n-2$$

于是，在第 $(n-2)$ 个与第 $(n-1)$ 个滑扣之间的细绳刚拉紧前的瞬间，系统剩余动能为

$$\begin{aligned} E_{(n-2)f} &= \frac{1}{n-2}E_0 - \frac{1}{n-2}[1^2+2^2+\mathrm{L}\ +(n-2)^2]\mu mgL \\ &= \frac{1}{n-2}E_0 - \frac{1}{n-2}\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}\mu mgL \\ &= \frac{1}{n-2}E_0 - \frac{(n-1)(2n-3)}{6}\mu mgL \end{aligned} \qquad ⑪$$

在第 $(n-2)$ 与第 $(n-1)$ 个滑扣之间的细绳刚拉紧后的瞬间，系统剩余动能为

$$E_{(n-1)0} = \frac{n-2}{n-1}E_{(n-2)\mathrm{f}} = \frac{1}{n-1}E_0 - \frac{(n-2)(2n-3)}{6}\mu mgL \qquad ⑫$$

由⑪⑫式可知，若

$$\frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6}\mu mgL < E_0 < \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\mu mgL \qquad ⑬$$

则从第 1 个滑扣开始的 $(n-1)$ 个滑扣都依次拉紧，且可继续滑行距离 l （ $0 \le l < L$ ）后静止。因而有

$$E_{(n-1)0} = \frac{1}{n-1}E_0 - \frac{(n-2)(2n-3)}{6}\mu mgL = (n-1)\mu mgl \qquad ⑭$$

由⑤⑭式得

$$v_{10} = \sqrt{\left[\frac{(n-2)(2n-3)}{3}L + 2(n-1)l\right](n-1)\mu g} \qquad ⑮$$

（2）整个过程中克服摩擦力所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \mu mgL + \mu(2m)gL + \mu(3m)gL + \cdots + \mu[(n-2)m]gL + \mu[(n-1)m]gl \\ &= \mu mgL[1+2+3+\cdots(n-2)] + \mu(n-1)mgl \\ &= \left[\frac{(n-2)}{2}L + l\right](n-1)\mu mg \end{aligned} \qquad ⑯$$

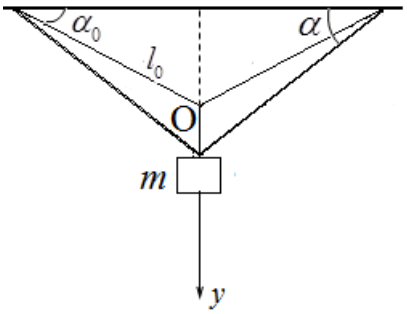
（3）在整个过程中仅仅由于细线拉紧引起的总能量损失为

$$\Delta E=\frac{1}{2}mv_{10}^2-W$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(n-2)(2n-3)}{3}L+2(n-1)l\right](n-1)\mu mg-\left[\frac{(n-2)}{2}L+l\right](n-1)\mu mg$$
$$=\left[\frac{(n-2)(2n-3)}{6}L+(n-1)l\right](n-1)\mu mg-\left[\frac{(n-2)}{2}L+l\right](n-1)\mu mg \qquad ⑰$$
$$=\left[\frac{(n-2)(n-3)}{3}L+(n-2)l\right](n-1)\mu mg$$

16. （1）取小物块的平衡位置为原点 O，y 轴的方向竖直向下，如图所示。由牛顿第二定律可知：

$$ma=mg-2k\left(l-L\right)\sin\alpha \qquad ①$$

式中 a 为物块的加速度，L 为弹性绳的原长，l 和 α 分别为物块离开平衡位置的位移为 y 时弹性绳的长度和弹性绳与水平面的夹角。由几何关系有



$$l=\sqrt{d^2+\left(l_0\sin\alpha_0+y\right)^2} \qquad ②$$

$$\sin\alpha=\frac{l_0\sin\alpha_0+y}{l} \qquad ③$$

式中 $d=l_0\cos\alpha_0$。由于 y 很小，y^2 可略去，利用近似计算公式当 $x<<1$ 时，$\sqrt{1+x}\approx1+\frac{1}{2}x$，注意到 $l_0=\sqrt{d^2+\left(l_0\sin\alpha_0\right)^2}$，②式可简化为

$$l=l_0+y\sin\alpha_0 \qquad ④$$

将④式代入③式，利用近似计算公式当 $x<<1$ 时，$\frac{1}{1+x}\approx1-x$，并忽略 y^2 项，③式可简化为

$$l_0\sin\alpha=l_0\sin\alpha_0+y\cos^2\alpha_0 \qquad ⑤$$

当小物块处在平衡位置时有

$$mg=2k\left(l_0-L\right)\sin\alpha_0 \qquad ⑥$$

即

$$L=l_0-\frac{mg}{2k\sin\alpha_0} \qquad ⑦$$

将⑤⑥⑦式代入①式，略去 y^2 项，可将①式化成

$$ma=-\left(2k\sin^2\alpha_0+\frac{mg}{l_0}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right)y \qquad ⑧$$

上式右端括号中的量是大于零的常量，⑧式可表示为

$$ma = -m\omega^2 y \qquad ⑨$$

式中

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}\sin^2\alpha_0 + \frac{g}{l_0}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0} \qquad ⑩$$

⑨式是简谐振动的动力学方程。因此，当 y 很小时，小物块做简谐振动。

（2）小物块做简写振动的周期为：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m}\sin^2\alpha_0 + \frac{g}{l_0}\frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0}}} \qquad ⑪$$

将题给数据代入⑪式得

$$T = 1.8\text{s} \qquad ⑫$$

（3）因将小物块拉开距离 $y_0 = 0.010\text{m}$ 时从静止松手，故小物块做简谐振动的振幅为

$$A = 0.010\text{m} \qquad ⑬$$

初始时，小物块速度为零，小物块位于在最大振幅处，其初相位为

$$\varphi_0 = 0 \qquad ⑭$$

圆频率为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 3.5\text{rad/s} \qquad ⑮$$

故在国际单位制中，小物块做简谐振动的方程为

$$y = 0.010\times\cos\left(3.5\times t\right) \qquad ⑯$$