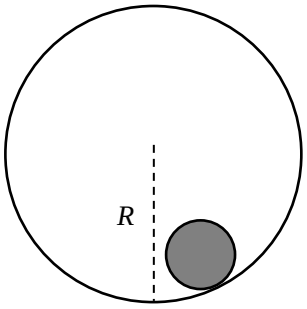
# 第 34 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题

2017 年 9 月 16 日

一、一个半径为 $r$ 、质量为 $m$ 的均质实心小圆柱被置于一个半径为 $R$ 、质量为 $M$ 的薄圆筒中，圆筒和小圆柱的中心轴均水平，横截面如图所示。重力加速度大小为 $g$ 。试在下述两种情形下，求小圆柱质心在其平衡位置附近做微振动的频率：

（1）圆筒固定，小圆柱在圆筒内底部附近作无滑滚动；

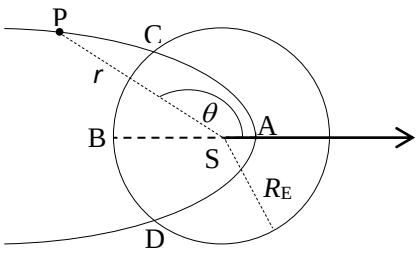
（2）圆筒可绕其固定的光滑中心细轴转动，小圆柱仍在圆筒内底部附近作无滑滚动。




二、星体 P（行星或彗星）绕太阳运动的轨迹为圆锥曲线

$$r=\frac{k}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

式中，$r$ 是 P 到太阳 S 的距离，$\theta$ 是矢径 SP 相对于极轴 SA 的夹角（以逆时针方向为正），$k=\dfrac{L^2}{GMm^2}$，$L$ 是 P 相对于太阳的角动量，$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ 为引力常量，$M\approx1.99\times10^{30}\mathrm{kg}$ 为太阳的质量，$\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ 为偏心率，$m$ 和 $E$ 分别为 P 的质量和机械能。假设有一颗彗星绕太阳运动的轨道为抛物线，地球绕太阳运动的轨道可近似为圆，两轨道相交于 C、D 两点，如图所示。已知地球轨道半径 $R_{\mathrm{E}}\approx1.49\times10^{11}\mathrm{m}$，彗星轨道近日点 A 到太阳的距离为地球轨道半径的三分之一，不考虑地球和彗星之间的相互影响。求彗星

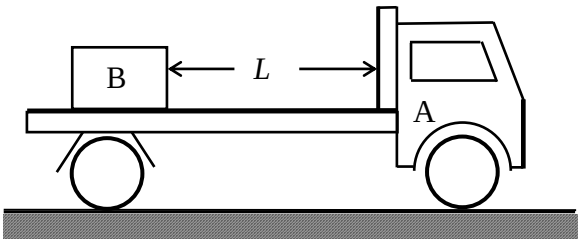



（1）先后两次穿过地球轨道所用的时间；

（2）经过 C、D 两点时速度的大小。

已知积分公式 $\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x+a}}=\dfrac{2}{3}(x+a)^{3/2}-2a(x+a)^{1/2}+C$，式中 $C$ 是任意常数。

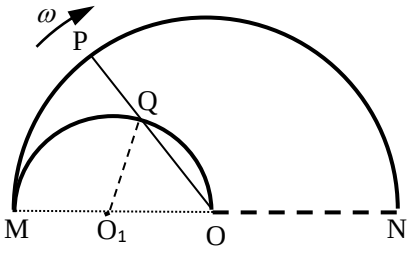
三、一质量为$M$的载重卡车 A 的水平车板上载有一质量为$m$的重物 B，在水平直公路上以速度$v_0$做匀速直线运动，重物与车厢前壁间的距离为$L$（$L>0$）。因发生紧急情况，卡车突然制动。已知卡车车轮与地面间的动摩擦因数和最大静摩擦因数均为$\mu_1$，重物与车厢底板间的动摩擦因数和最大静摩擦因数均为$\mu_2$（$\mu_2<\mu_1$）。若重物与车厢前壁发生碰撞，则假定碰撞时间极短，碰后重物与车厢前壁不分开。重力加速度大小为$g$。




（1）若重物和车厢前壁不发生碰撞，求卡车从制动开始到卡车停止的过程所花的时间和走过的路程、重物从制动开始到重物停止的过程所花的时间和走过的路程，并导出重物 B 与车厢前壁不发生碰撞的条件；

（2）若重物和车厢前壁发生碰撞，求卡车从制动开始到卡车和重物都停止的过程所经历的时间、卡车走过的路程、以及碰撞过程中重物对车厢前壁的冲量。

四、如俯视图，在水平面内有两个分别以 O 点与 $O_1$ 点为圆心的导电半圆弧内切于 M 点，半圆 O 的半径为$2a$，半圆 $O_1$ 的半径为$a$；两个半圆弧和圆 O 的半径 ON 围成的区域内充满垂直于水平面向下的匀强磁场（未画出），磁感应强度大小为$B$；其余区域没有磁场。半径 OP 为一均匀细金属棒，以恒定的角速度$\omega$ 绕 O 点顺时针旋转，旋转过程中金属棒 OP 与两个半圆弧均接触良好。已知金属棒 OP 的电阻为$R$，两个半圆弧的电阻可忽略。开始时 P 点与 M 点重合。在$t$（$0\le t\le\frac{\pi}{\omega}$）时刻，半径 OP 与半圆 $O_1$ 交于 Q 点。求




（1）沿回路 QPMQ 的感应电动势；

（2）金属棒 OP 所受到的原磁场$B$的作用力的大小。

五、某种回旋加速器的设计方案如俯视图 a 所示，图中粗黑线段为两个正对的极板，其间仅在带电粒子经过的过程中存在匀强电场，两极板间电势差为$U$。两个极板的板面中部各有一狭缝(沿 OP 方向的狭长区域)，带电粒子可通过狭缝穿越极板（见图 b)；两细虚线间（除开两极板之间的区域）既无电场也无磁场；其它部分存在匀强磁场，磁感应强度方向垂直于纸面。在离子源 S 中产生的质量为$m$、带电量为$q$（$q>0$）的离子，由静止开始被电场加速，经狭缝中的 O 点进入磁场区域，O 点到极板右端的距离为$D$，到出射孔 P 的距离为$bD$（常数$b$为大于 2 的自然数)。已知磁感应强度大小在零到$B_{\max}$之间可调，离子从离子源上方的 O 点射入磁场区域，最终只能从出射孔 P 射出。假设如果离子打到器壁或离子源外壁便即被吸收。忽略相对论效应。求

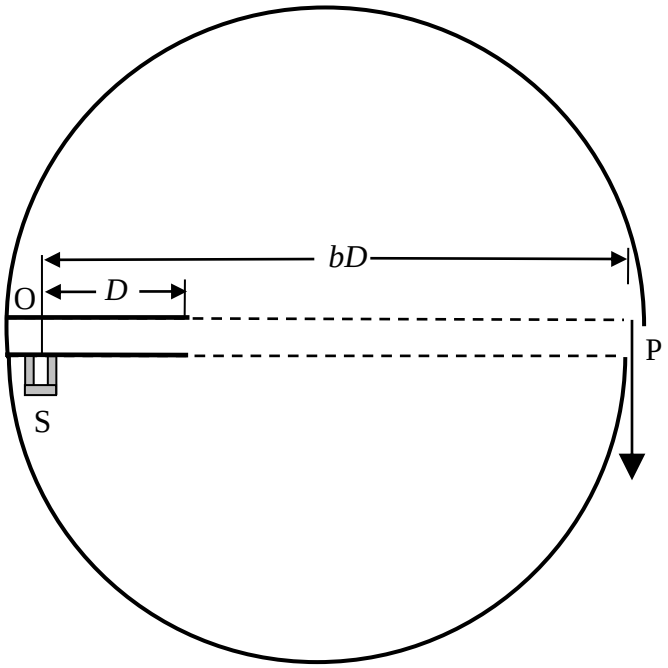


图 a

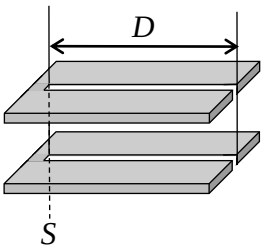


图 b

（1）可能的磁感应强度$B$的最小值；

（2）磁感应强度$B$的其它所有可能值；

（3）出射离子能量的最大值。

六、1914 年，弗兰克-赫兹用电子碰撞原子的方法使原子从低能级激发到高能级，从而证明了原子能级的存在。加速电子碰撞自由的氢原子，使某氢原子从基态激发到激发态。该氢原子仅能发出一条可见光波长范围（$400\text{nm}\sim760\text{nm}$）内的光谱线。仅考虑一维正碰。

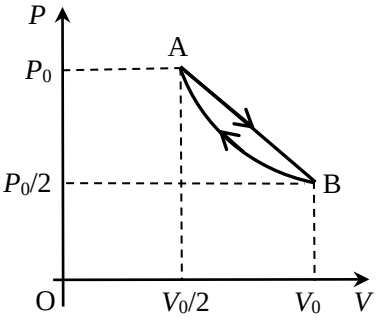
（1）求该氢原子能发出的可见光的波长；

（2）求加速后电子动能$E_{\text{k}}$的范围；

（3）如果将电子改为质子，求加速质子的加速电压的范围。

已知$hc=1240\text{nm}\cdot\text{eV}$，其中$h$为普朗克常量，$c$为真空中的光速；质子质量近似为电子质量的 1836 倍，氢原子在碰撞前的速度可忽略。

七、如气体压强-体积（$P$-$V$）图所示，摩尔数为$\nu$的双原子理想气体构成的系统经历一正循环过程（正循环指沿图中箭头所示的循环），其中自 A 到 B 为直线过程，自 B 到 A 为等温过程。双原子理想气体的定容摩尔热容量为$\frac{5}{2}R$，$R$为气体常量。

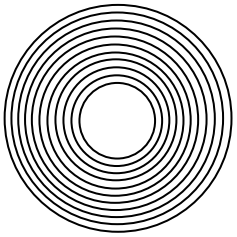


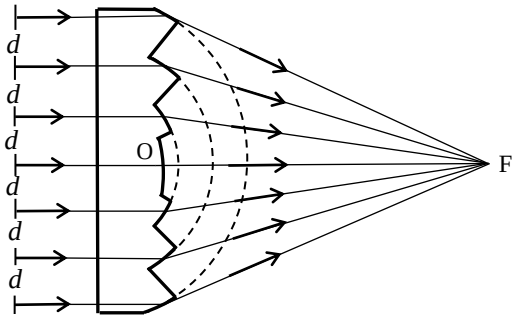

（1）求直线 AB 过程中的最高温度；

（2）求直线 AB 过程中气体的摩尔热容量随气体体积变化的关系式，说明气体在直线 AB 过程各段体积范围内是吸热过程还是放热过程，确定吸热和放热过程发生转变时的温度$T_c$；

（3）求整个直线 AB 过程中所吸收的净热量和一个正循环过程中气体对外所作的净功。

八、菲涅尔透镜又称同心圆阶梯透镜，它是由很多个同轴环带套在一起构成的，其迎光面是平面，折射面除中心是一个球冠外，其它环带分别是属于不同球面的球台侧面，其纵剖面如右图所示。这样的结构可以避免普通大口径球面透镜既厚又重的缺点。菲涅尔透镜的设计主要是确定每个环带的齿形（即它所属球面的球半径和球心），各环带都是一个独立的（部分）球面透镜，它们的焦距不同，但必须保证具有共同的焦点（即图中 F 点）。已知透镜材料的折射率为$n$，从透镜中心 O（球冠的顶点）到焦点 F 的距离（焦距）为$f$（平行于光轴的平行光都能经环带折射后会聚到 F 点），相邻环带的间距为$d$（$d$很小，可忽略同一带内的球面像差；$d$又不是非常小，可忽略衍射效应）。求






（1）每个环带所属球面的球半径和球心到焦点的距离；

（2）该透镜的有效半径的最大值和有效环带的条数。

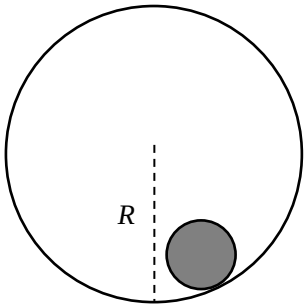
# 第 34 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题解答

**2017 年 9 月 16 日**

一、一个半径为 $r$ 、质量为 $m$ 的均质实心小圆柱被置于一个半径为 $R$ 、质量为 $M$ 的薄圆筒中，圆筒和小圆柱的中心轴均水平，横截面如图所示。重力加速度大小为 $g$ 。试在下述两种情形下，求小圆柱质心在其平衡位置附近做微振动的频率：

（1）圆筒固定，小圆柱在圆筒内底部附近作无滑滚动；

（2）圆筒可绕其固定的光滑中心细轴转动，小圆柱仍在圆筒内底部附近作无滑滚动。

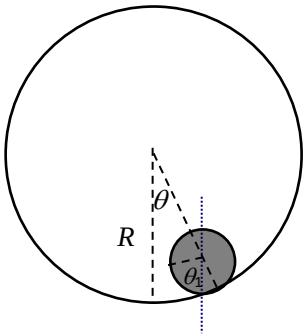



**参考解答：**

（1）如图，$\theta$ 为在某时刻小圆柱质心在其横截面上到圆筒中心轴的垂线与竖直方向的夹角。小圆柱受三个力作用：重力，圆筒对小圆柱的支持力和静摩擦力。设圆筒对小圆柱的静摩擦力大小为 $F$ ，方向沿两圆柱切点的切线方向（向右为正）。考虑小圆柱质心的运动，由质心运动定理得

$$F-mg\sin\theta=ma \qquad ①$$

式中，$a$ 是小圆柱质心运动的加速度。由于小圆柱与圆筒间作无滑滚动，小圆柱绕其中心轴转过的角度 $\theta_1$（规定小圆柱在最低点时 $\theta_1=0$）与 $\theta$ 之间的关系为




$$R\theta=r(\theta_1+\theta) \qquad ②$$

由②式得，$a$ 与 $\theta$ 的关系为

$$a=r\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=(R-r)\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad ③$$

考虑小圆柱绕其自身轴的转动，由转动定理得

$$-rF=I\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \qquad ④$$

式中，$I$ 是小圆柱绕其自身轴的转动惯量

$$I=\frac{1}{2}mr^2 \qquad ⑤$$

由①②③④⑤式及小角近似

$$\sin\theta\approx\theta \qquad ⑥$$

得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2g}{3(R-r)}\theta=0 \qquad ⑦$$

由⑦式知，小圆柱质心在其平衡位置附近的微振动是简谐振动，其振动频率为

$$f=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{6(R-r)}} \qquad ⑧$$

（2）用 $F$ 表示小圆柱与圆筒之间的静摩擦力的大小，$\theta_1$ 和 $\theta_2$ 分别为小圆柱与圆筒转过的角度（规定小圆柱相对于大圆筒向右运动为正方向，开始时小圆柱处于最低点位置 $\theta_1=\theta_2=0$）。对于小圆柱，由转动定理得

$$-Fr=\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \qquad ⑨$$

对于圆筒，同理有

$$FR=(MR^2)\frac{d^2\theta_2}{dt^2} \qquad ⑩$$

由⑨⑩式得

$$-F\left(\frac{2}{m}+\frac{1}{M}\right)=r\frac{d^2\theta_1}{dt^2}-R\frac{d^2\theta_2}{dt^2} \qquad ⑪$$

设在圆柱横截面上小圆柱质心到圆筒中心轴的垂线与竖直方向的夹角为$\theta$，由于小圆柱与圆筒间做无滑滚动，有

$$R\theta=r(\theta_1+\theta)-R\theta_2 \qquad ⑫$$

由⑫式得

$$(R-r)\frac{d^2\theta}{dt^2}=r\frac{d^2\theta_1}{dt^2}-R\frac{d^2\theta_2}{dt^2} \qquad ⑬$$

设小圆柱质心沿运动轨迹切线方向的加速度为$a$，由质心运动定理得

$$F-mg\sin\theta=ma \qquad ⑭$$

由⑫式得

$$a=(R-r)\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad ⑮$$

由⑪⑬⑭⑮式及小角近似$\sin\theta\approx\theta$，得

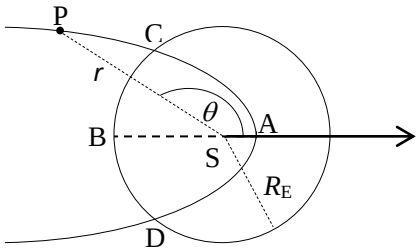
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2M+m}{3M+m}\frac{g}{R-r}\theta=0 \qquad ⑯$$

由⑯式可知，小圆柱质心在其平衡位置附近的微振动是简谐振动，其振动频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2M+m}{3M+m}\frac{g}{R-r}} \qquad ⑰$$

二、星体 P（行星或彗星）绕太阳运动的轨迹为圆锥曲线

$$r=\frac{k}{1+\varepsilon\cos\theta}$$




式中，$r$ 是 P 到太阳 S 的距离，$\theta$ 是矢径 SP 相对于极轴 SA 的夹角（以逆时针方向为正），$k=\frac{L^2}{GMm^2}$，$L$ 是 P 相对于太阳的角动量，$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ 为引力常量，$M\approx1.99\times10^{30}\mathrm{kg}$ 为太阳的质量，$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ 为偏心率，$m$ 和 $E$ 分别为 P 的质量和机械能。假设有一颗彗星绕太阳运动的轨道为抛物线，地球绕太阳运动的轨道可近似为圆，两轨道相交于 C、D 两点，如图所示。已知地球轨道半径 $R_E\approx1.49\times10^{11}\mathrm{m}$，彗星轨道近日点 A 到太阳的距离为地球轨道半径的三分之一，不考虑地球和彗星之间的相互影响。求彗星

（1）先后两次穿过地球轨道所用的时间；

（2）经过 C、D 两点时速度的大小。

已知积分公式 $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+a}}=\frac{2}{3}(x+a)^{3/2}-2a(x+a)^{1/2}+C$，式中 $C$ 是任意常数。

**参考解答：**

（1）由题设，彗星的运动轨道为抛物线，故

$$\varepsilon = 1,\ E = 0 \qquad ①$$

彗星绕太阳运动的轨道方程为

$$r = \frac{k}{1+\cos\theta} \qquad ②$$

彗星绕太阳运动过程中，机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E = 0 \qquad ③$$

式中

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r} \qquad ④$$

当彗星运动到近日点 A 时，其径向速度为零，设其到太阳的距离为 $r_{\min}$，由③式得

$$\frac{L^2}{2mr_{\min}^2} = -V(r_{\min}) = G\frac{Mm}{r_{\min}} \qquad ⑤$$

由⑤式和题给条件得

$$\frac{L^2}{2GMm^2} = r_{\min} = \frac{R_E}{3} \qquad ⑥$$

由③式得

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}$$

或

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}} \qquad ⑦$$

设彗星由近日点 A 运动到与地球轨道的交点 C 所需的时间为 $\Delta t$，对⑦式两边积分，并利用⑥式得

$$\Delta t = \int_{r_{\min}}^{R_E} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{\frac{R_E}{3}}^{R_E} \frac{rdr}{\sqrt{r - \frac{R_E}{3}}} \qquad ⑧$$

对⑧式应用题给积分公式得

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{\frac{R_E}{3}}^{R_E} \frac{rdr}{\sqrt{r - \frac{R_E}{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2GM}} \left[ \frac{2}{3}\left(R_E - \frac{R_E}{3}\right)^{3/2} + \frac{2R_E}{3}\left(R_E - \frac{R_E}{3}\right)^{1/2} \right] \qquad ⑨ \\ &= \frac{10\sqrt{3}}{27} \frac{R_E^{3/2}}{\sqrt{GM}}\end{aligned}$$

由对称性可知，彗星两次穿越地球轨道所用的时间间隔为

$$T = 2\Delta t = \frac{20\sqrt{3}}{27} \frac{R_E^{3/2}}{\sqrt{GM}} \qquad ⑩$$

将题给数据代入⑩式得

$$T \approx 6.40 \times 10^6 \text{s} \qquad ⑪$$

（2）彗星在运动过程中机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E = 0 \qquad ⑫$$

式中 $v$ 是彗星离太阳的距离为 $r$ 时的运行速度的大小。由⑫式有

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{r}} \qquad ⑬$$

当彗星经过 C、D 处时

$$r_C=r_D=R_E \qquad ⑭$$

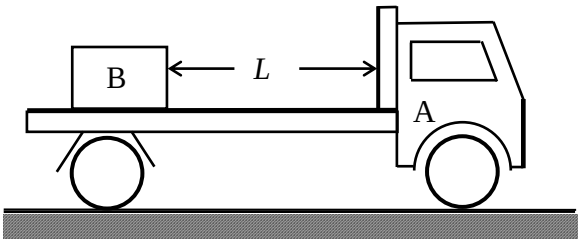
由⑬⑭式得，彗星经过 C、D 两点处的速度的大小为

$$v_C=v_D=\sqrt{\frac{2GM}{R_E}} \qquad ⑮$$

由⑮式和题给数据得

$$v_C=v_D=4.22\times10^4\,\mathrm{m/s} \qquad ⑯$$

三、一质量为$M$的载重卡车 A 的水平车板上载有一质量为$m$的重物 B，在水平直公路上以速度$v_0$做匀速直线运动，重物与车厢前壁间的距离为$L$（$L>0$）。因发生紧急情况，卡车突然制动。已知卡车车轮与地面间的动摩擦因数和最大静摩擦因数均为$\mu_1$，重物与车厢底板间的动摩擦因数和最大静摩擦因数均为$\mu_2$（$\mu_2<\mu_1$）。若重物与车厢前壁发生碰撞，则假定碰撞时间极短，碰后重物与车厢前壁不分开。重力加速度大小为$g$。




（1）若重物和车厢前壁不发生碰撞，求卡车从制动开始到卡车停止的过程所花的时间和走过的路程、重物从制动开始到重物停止的过程所花的时间和走过的路程，并导出重物 B 与车厢前壁不发生碰撞的条件；

（2）若重物和车厢前壁发生碰撞，求卡车从制动开始到卡车和重物都停止的过程所经历的时间、卡车走过的路程、以及碰撞过程中重物对车厢前壁的冲量。

**参考解答：**

（1）若重物和车厢前壁不发生碰撞。

卡车在水平直公路上做匀减速运动，设其加速度大小为$a_1$。由牛顿第二定律有

$$\mu_1(M+m)g-\mu_2mg=Ma_1 \qquad ①$$

由①式得

$$a_1=\frac{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}{M}g$$

由匀减速运动公式，卡车从制动开始到静止时所用的时间$t_1$和移动的距离$s_1$分别为

$$t_1=\frac{v_0}{a_1}=\frac{M}{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}\frac{v_0}{g},\quad s_1=\frac{v_0^2}{2a_1}=\frac{M}{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}\frac{v_0^2}{2g} \qquad ②$$

重物 B 在卡车 A 的车厢底板上做匀减速直线运动，设 B 相对于地面的加速度大小为$a_2$。由牛顿第二定律有

$$\mu_2 mg = ma_2 \qquad ③$$

由③式得

$$a_2 = \frac{\mu_2 mg}{m} = \mu_2 g$$

从卡车制动开始到重物对地面速度为零时所用的时间$t_2$和重物移动的距离$s_2$分别为

$$t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{v_0}{\mu_2 g}, \qquad s_2 = \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{v_0^2}{2\mu_2 g} \qquad ④$$

由于$\mu_2 < \mu_1$，由②④二式比较可知，$t_2 > t_1$，即卡车先停，重物后停。

若$s_2 \le s_1 + L$，重物 B 与车厢前壁不会发生碰撞，因此不发生碰撞的条件是

$$L \ge s_2 - s_1 = \frac{v_0^2}{2a_2} - \frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(M+m)}{\mu_2[\mu_1 M + (\mu_1 - \mu_2)m]} \frac{v_0^2}{2g} \qquad ⑤$$

（2）由⑤式知，当满足条件

$$L < s_2 - s_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(M+m)}{2\mu_2[\mu_1 M + (\mu_1 - \mu_2)m]} \frac{v_0^2}{g}$$

时，重物 B 与车厢前壁必定发生碰撞。

设从开始制动到发生碰撞时的时间间隔为$t$，此时有几何条件

$$s_2(t) = s_1(t) + L \qquad ⑥$$

这里又可分为两种情况：$t_2 > t > t_1$（重物在卡车停下后与车厢前壁发生碰撞）和$t \le t_1$（重物在卡车停下前与车厢前壁发生碰撞）。

（i）$t_2 > t > t_1$，即卡车 A 在$t_1$时停下，重物 B 继续运动，在$t$时与车厢前壁发生碰撞。

卡车停下的时间和向前滑动的距离是②给出的$t_1$和$s_1$，同时重物相对于地面向前滑动的距离是

$$\begin{aligned} s_2' &= v_0 t_1 - \frac{1}{2} a_2 t_1^2 \\ &= \frac{M\left[M(2\mu_1 - \mu_2) + 2m(\mu_1 - \mu_2)\right]}{\left[\mu_1 M + (\mu_1 - \mu_2)m\right]^2} \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned} \qquad ⑦$$

重物相对于车厢向前滑动的距离是

$$\begin{aligned} s_2' - s_1 &= \frac{M\left[M(2\mu_1 - \mu_2) + 2m(\mu_1 - \mu_2)\right]}{\left[\mu_1 M + (\mu_1 - \mu_2)m\right]^2} \frac{v_0^2}{2g} - \frac{M}{\mu_1 M + (\mu_1 - \mu_2)m} \frac{v_0^2}{2g} \\ &= \frac{(\mu_1 - \mu_2)(M+m)M}{\left[\mu_1 M + (\mu_1 - \mu_2)m\right]^2} \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

如果

$$s_2' - s_1 < L < s_2 - s_1,$$

即当

$$\frac{(\mu_1-\mu_2)(m+M)Mv_0^2}{2[\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m]^2g}<L<\frac{(\mu_1-\mu_2)(M+m)}{2\mu_2[\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m]}\frac{v_0^2}{g}$$

满足时，在车已停稳后重物仍会向前运动并且撞上车厢前壁。

从制动到重物 B 与车厢前壁碰撞前，重物 B 克服摩擦力做功。设在碰撞前的瞬间重物 B 相对地面的速度为$v_2$，由动能定理有

$$\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}mv_0^2-\mu_2mg(s_1+L) \qquad ⑧$$

由⑧式得

$$v_2=\sqrt{v_0^2-2\mu_2g(s_1+L)}=\sqrt{\frac{(\mu_1-\mu_2)(M+m)v_0^2}{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}-2\mu_2gL}$$

设碰撞后瞬间重物 B 与卡车 A 的速度均为$v$，由于碰撞时间极短，碰撞前后动量守恒

$$mv_2=(m+M)v \qquad ⑨$$

由⑨式得

$$v=\frac{m}{m+M}v_2=\frac{m}{m+M}\sqrt{\frac{(\mu_1-\mu_2)(M+m)v_0^2}{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}-2\mu_2gL}$$

碰撞过程中重物 B 对车厢前壁的冲量为

$$I=Mv-0=\frac{mM}{m+M}\sqrt{\frac{(\mu_1-\mu_2)(M+m)v_0^2}{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}-2\mu_2gL} \qquad ⑩$$

碰撞后，卡车和重物又一起运动了一段时间

$$t'=\frac{v}{\mu_1g}=\frac{m}{\mu_1(m+M)}\frac{v_2}{g} \qquad ⑪$$

再移动了一段路程

$$s_1'=\frac{v^2}{2\mu_1g}=\frac{m^2}{2\mu_1(m+M)^2g}\left[\frac{(\mu_1-\mu_2)(M+m)v_0^2}{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}-2\mu_2gL\right] \qquad ⑫$$

才最终停止下来（对于卡车而言，这是第二次停下来）。

重物撞上车厢前壁的时间是

$$t_2'=\frac{v_0-v_2}{\mu_2g} \qquad ⑬$$

所以，从卡车制动到车和重物都停下所用的总时间为

$$\begin{aligned}t^{(\mathrm{i})}&=t_2'+t'=\frac{v_0-v_2}{\mu_2g}+\frac{mv_2}{\mu_1g(M+m)}=\frac{v_0}{\mu_2g}-\left[\frac{1}{\mu_2g}-\frac{m}{\mu_1g(M+m)}\right]v_2\\&=\frac{v_0}{\mu_2g}-\frac{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}{\mu_1\mu_2g(m+M)}\sqrt{\frac{(\mu_1-\mu_2)(M+m)v_0^2}{\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m}-2\mu_2gL}\end{aligned} \qquad ⑭$$

卡车移动的总路程则为

$$s_1^{(\mathrm{i})}=s_1+s_1'=\frac{[\mu_1M(m+M)+(\mu_1-\mu_2)m^2]v_0^2}{2\mu_1(m+M)[\mu_1M+(\mu_1-\mu_2)m]g}-\frac{\mu_2m^2L}{\mu_1(m+M)^2} \qquad ⑮$$

（ii）$t\le t_1$，即卡车还未停下，重物就与车厢前壁发生碰撞

由⑨式的推导可知，条件$t\le t_1$可写成

$$L \le \frac{(\mu_1-\mu_2)(m+M)Mv_0^2}{2[\mu_1 M+(\mu_1-\mu_2)m]^2 g}$$

由匀减速运动学公式，⑥式成为

$$v_0 t-\frac{1}{2}a_2 t^2=(v_0 t-\frac{1}{2}a_1 t^2)+L$$

解得碰撞发生的时间

$$t=\sqrt{\frac{2L}{a_1-a_2}}=\sqrt{\frac{2LM}{(\mu_1-\mu_2)(m+M)g}}$$

在碰撞前的瞬间，卡车 A 的速度 $v_1'$ 和重物 B 的速度 $v_2'$ 分别为

$$v_1'=v_0-a_1 t=v_0-a_1\sqrt{\frac{2LM}{(\mu_1-\mu_2)(m+M)g}}\ ,\quad v_2'=v_0-a_2 t=v_0-a_2\sqrt{\frac{2LM}{(\mu_1-\mu_2)(m+M)g}} \qquad ⑯$$

由碰撞前后动量守恒，可得碰撞后重物 B 和卡车 A 的共同速度 $v'$ 为

$$v'=\frac{mv_2'+Mv_1'}{m+M}=v_0-\frac{ma_2+Ma_1}{m+M}\sqrt{\frac{2LM}{(\mu_1-\mu_2)(m+M)g}} \qquad ⑰$$

$$=v_0-\mu_1\sqrt{\frac{2LMg}{(\mu_1-\mu_2)(m+M)}}$$

由冲量定理和以上两式得碰撞过程中重物 B 对车厢前壁的冲量为

$$I'=M(v'-v_1')=\frac{Mm}{m+M}\sqrt{2(a_1-a_2)L}=m\sqrt{\frac{2(\mu_1-\mu_2)M}{m+M}gL} \qquad ⑱$$

卡车运动时间为碰撞前后的两段时间之和，由 $t=\sqrt{\frac{2LM}{(\mu_1-\mu_2)(m+M)g}}$ 与⑰式可得

$$t^{(\mathrm{ii})}=t+\frac{v'}{\mu_1 g}=\frac{v_0}{\mu_1 g} \qquad ⑲$$

卡车总路程等于碰前和碰后两段路程之和

$$s_1^{(\mathrm{ii})}=v_0 t+\frac{1}{2}a_1 t^2+\frac{v'^2}{2\mu_1 g}=\frac{v_0^2}{2\mu_1 g}-\frac{mL}{M+m} \qquad ⑳$$

[或将卡车和重物视为一个系统，制动过程中它们之间的摩擦力和碰撞时的相互作用力都是内力，水平外力只有地面作用于卡车的摩擦力 $(M+m)\mu_1 g$。在此力作用下系统质心做加速度大小为 $\mu_1 g$ 的匀减速运动，从开始到卡车和重物都停止时所经历的时间为

$$t^{(\mathrm{ii})}=\frac{v_0}{\mu_1 g} \qquad ⑲$$

系统质心做匀减速运动的路程为

$$\Delta x_c=\frac{v_0^2}{2\mu_1 g}$$

设制动前卡车和重物的质心分别位于 $x_1$ 和 $x_2$；制动后到完全停下卡车运动了路程 $s_1^{(\mathrm{ii})}$，两个质心分别位于 $x_1'=x_1+s_1^{(\mathrm{ii})}$ 和 $x_2'=x_2+s_1^{(\mathrm{ii})}+L$。于是有

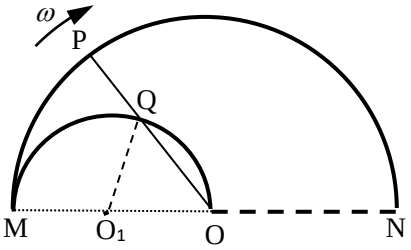
$$\Delta x_c=\frac{Mx_1'+mx_2'}{M+m}-\frac{Mx_1+mx_2}{M+m}=\frac{(M+m)s_1^{(\mathrm{II})}+mL}{M+m}=\frac{v_0^2}{2\mu_1 g}$$

由此解得

$$s_1^{(\mathrm{ii})}=\frac{v_0^2}{2\mu_1 g}-\frac{mL}{M+m} \qquad ⑳$$

]

四、如俯视图，在水平面内有两个分别以 O 点与 $O_1$ 点为圆心的导电半圆弧内切于 M 点，半圆 O 的半径为 $2a$，半圆 $O_1$ 的半径为 $a$；两个半圆弧和圆 O 的半径 ON 围成的区域内充满垂直于水平面向下的匀强磁场（未画出），磁感应强度大小为 $B$；其余区域没有磁场。半径 OP 为一均匀细金属棒，以恒定的角速度 $\omega$ 绕 O 点顺时针旋转，旋转过程中金属棒 OP 与两个半圆弧均接触良好。已知金属棒 OP 的电阻为 $R$，两个半圆弧的电阻可忽略。开始时 P 点与 M 点重合。在 $t$（$0 \le t \le \dfrac{\pi}{\omega}$）时刻，半径 OP 与半圆 $O_1$ 交于 Q 点。求




（1）沿回路 QPMQ 的感应电动势；

（2）金属棒 OP 所受到的原磁场 $B$ 的作用力的大小。

**参考解答：**

（1）考虑从初始时刻 $t=0$ 至时刻 $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega}$，金属棒 OP 扫过的磁场区域的面积为

$$S = S_{\text{扇形OPM}} - S_{\text{扇形}O_1\text{QM}} - S_{\Delta O_1\text{QO}} \qquad ①$$

式中，$S_{\text{扇形OPM}}$、$S_{\text{扇形}O_1\text{QM}}$ 和 $S_{\Delta O_1\text{QO}}$ 分别是扇形 OPM、扇形 $O_1$QM 和 $\Delta O_1$QO 的面积。由几何关系得

$$S_{\text{扇形OPM}} = \frac{1}{2}(\omega t)(2a)^2 \qquad ②$$

$$S_{\text{扇形}O_1\text{QM}} = \frac{1}{2}(2\omega t)a^2 \qquad ③$$

$$S_{\Delta O_1\text{QO}} = (a\sin\omega t)(a\cos\omega t) \qquad ④$$

由①②③④式得

$$S = \frac{1}{2}(2\omega t - \sin 2\omega t)a^2 \qquad ⑤$$

通过回路 QPMQ 的磁通量为

$$\phi = BS \qquad ⑥$$

由法拉第电磁感应定律得，沿回路 QPMQ 的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \qquad ⑦$$

式中，负号表示感应电动势沿回路逆时针方向（即沿回路 QPMQ）。由⑤⑥⑦式得

$$\varepsilon = -(1-\cos 2\omega t)\omega a^2 B, \quad 0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2} \qquad ⑧$$

当$\frac{\pi}{2\omega}\le t\le\frac{\pi}{\omega}$时，沿回路 QPMQ 的感应电动势与$t=\frac{\pi}{2\omega}$时的一样，即

$$\varepsilon=-2\omega a^2B,\qquad \frac{\pi}{2}\le\omega t\le\pi \tag{9}$$

（2）在$t$时刻流经回路 QPMQ 的电流为

$$i=\frac{\varepsilon}{R_1} \tag{10}$$

式中

$$R_1=R\frac{L}{2a} \tag{11}$$

这里，$L$为 PQ 的长。由几何关系得

$$L=2a-2a\cos\omega t,\quad 0\le\omega t\le\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

$$L=2a,\quad \frac{\pi}{2}\le\omega t\le\pi \tag{13}$$

半径 OP 所受到的原磁场$B$的作用力的大小为

$$F=iLB \tag{14}$$

由⑧⑩⑪⑫⑭式得

$$F=(1-\cos 2\omega t)\frac{2\omega a^3B^2}{R},\qquad 0\le\omega t\le\frac{\pi}{2} \tag{15}$$

由⑨⑩⑪⑬⑭式得

$$F=\frac{4\omega a^3B^2}{R},\qquad \frac{\pi}{2}\le\omega t\le\pi. \tag{16}$$

五、某种回旋加速器的设计方案如俯视图 a 所示，图中粗黑线段为两个正对的极板，其间仅在带电粒子经过的过程中存在匀强电场，两极板间电势差为$U$。两个极板的板面中部各有一狭缝(沿 OP 方向的狭长区域)，带电粒子可通过狭缝穿越极板（见图 b)；两细虚线间（除开两极板之间的区域）既无电场也无磁场；其它部分存在匀强磁场，磁感应强度方向垂直于纸面。在离子源 S 中产生的质量为$m$、带电量为$q$

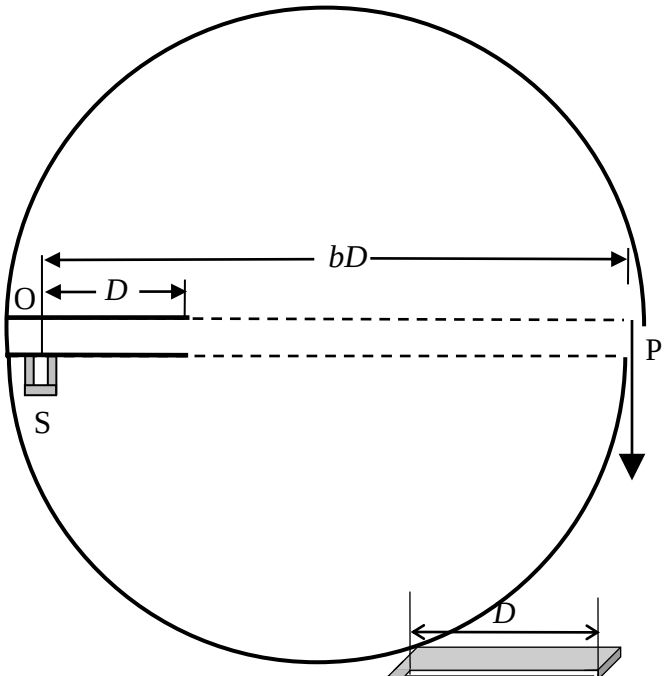



图 a

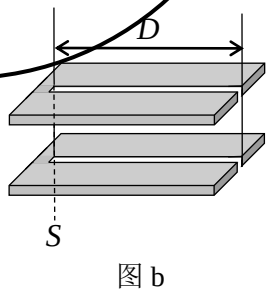



图 b

（$q>0$）的离子，由静止开始被电场加速，经狭缝中的 O 点进入磁场区域，O 点到极板右端的距离为$D$，到出射孔 P 的距离为$bD$（常数$b$为大于 2 的自然数）。已知磁感应强度大小在零到$B_{\max}$之间可调，离子从离子源上方的 O 点射入磁场区域，最终只能从出射孔 P 射出。假设如果离子打到器壁或离子源外壁便即被吸收。忽略相对论效应。求

（1）可能的磁感应强度$B$的最小值；

（2）磁感应强度$B$的其它所有可能值；

（3）出射离子能量的最大值。

**参考解答:**

（1）设离子从 O 点射入磁场时的速率为$v$，由能量守恒得

$$qU=\frac{1}{2}mv^2 \qquad ①$$

由①式得

$$v=\sqrt{\frac{2qU}{m}} \qquad ②$$

设离子在磁场中做匀速圆周运动的轨迹半径为$r$，有

$$qBv=m\frac{v^2}{r} \qquad ③$$

由②③式得

$$r=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}} \qquad ④$$

若

$$r>\frac{bD}{2} \quad 或 \quad \frac{D}{2}<r<\frac{bD}{2}$$

则离子只能打到器壁或离子源外壁被吸收，不能从 P 射出。若离子从 O 射出后只运动半个圆周即从 P 射出，则

$$r=\frac{bD}{2} \qquad ⑤$$

将⑤式代入④式得，电子能够从 P 出射，可能的磁感应强度$B$的最小值为

$$B_{\min}=\frac{2}{bD}\sqrt{\frac{2mU}{q}} \qquad ⑥$$

（2）若

$$r<\frac{D}{2}$$

则离子将穿过上极板进入电场区域，被减速到零后，又重新反向加速至进入时的速率，从进入处再回到磁场区域。设这样的过程进行了$k$次，然后离子将绕过两极板右端从下极板进入

电场区域被加速，再穿过上极板进入磁场时能量增加到 $2qU$，运动半径增加到

$$r_1=\sqrt{2}r=\sqrt{1+1}r \qquad ⑦$$

这样加速 $n$ 次后，离子做圆周运动的半径 $r_n$ 为

$$r_n=\sqrt{n+1}r \qquad ⑧$$

当满足条件

$$kr+r_n=(\sqrt{n+1}+k)r=\frac{bD}{2} \qquad ⑨$$

或

$$r=\frac{bD}{2(\sqrt{n+1}+k)}$$

时，离子可从 P 处射出。另一方面，显然有 $k\geq 1$，且

$$2kr\leq D<2(k+1)r \qquad ⑩$$

由⑩式得

$$\frac{D}{2(k+1)}<r\leq\frac{D}{2k} \qquad ⑪$$

由⑨⑩⑪式有

$$(\sqrt{n+1}+k)\frac{D}{2(k+1)}<\frac{bD}{2}\leq(\sqrt{n+1}+k)\frac{D}{2k} \qquad ⑫$$

由⑫式得

$$(b-1)^2k^2-1\leq n<[(b-1)k+b]^2-1 \qquad ⑬$$

由④⑪式可得

$$k\leq\frac{D}{2r_{\max}}=\frac{DB_{\max}}{2}\sqrt{\frac{q}{2mU}}\equiv\frac{a}{2} \qquad ⑭$$

式中 $r_{\max}$ 是当 $B=B_{\max}$ 时由④式定出的。因此，$k$ 为不大于 $\frac{a}{2}$ 的最大自然数 $\left[\frac{a}{2}\right]$

$$k\leq\left[\frac{a}{2}\right] \qquad ⑮$$

由④⑨式知，磁感应强度 $B$ 的其它所有可能值为

$$B=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2mU}{q}}=\frac{2(\sqrt{n+1}+k)}{bD}\sqrt{\frac{2mU}{q}} \qquad ⑯$$

式中

| $k$ | $n$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(b-1)^2-1$ | $(b-1)^2$ | $(b-1)^2+1$ | $\cdots$ | $\{2b-1\}^2-2$ |
| 2 | $(b-1)^2 2^2-1$ | $(b-1)^2 2^2$ | $(b-1)^2 2^2+1$ | $\cdots$ | $\{2(b-1)+b\}^2-2$ |
| 3 | $(b-1)^2 3^2-1$ | $(b-1)^2 3^2$ | $(b-1)^2 3^2+1$ | $\cdots$ | $\{3(b-1)+b\}^2-2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\left[\frac{a}{2}\right]$ | $(b-1)^2\left[\frac{a}{2}\right]^2-1$ | $(b-1)^2\left[\frac{a}{2}\right]^2$ | $(b-1)^2\left[\frac{a}{2}\right]^2+1$ | $\cdots$ | $\left\{\left[\frac{a}{2}\right](b-1)+b\right\}^2-2$ |

⑰

（3）离子被电场加速了 $n+1$ 次后，其出射能量为

$$E=(n+1)qU \qquad ⑱$$

对于满足⑮式的 $k$，$n$ 可以取到最大值为

$$n_{\max}=[(b-1)k+b]^2-2 \qquad ⑲$$

由⑱⑲式得，出射离子的能量最大值为

$$E_{\max}=(n_{\max}+1)qU=\left\{\left\{(b-1)\left[\frac{a}{2}\right]+b\right\}^2-1\right\}qU \qquad ⑳$$

六、1914 年，弗兰克-赫兹用电子碰撞原子的方法使原子从低能级激发到高能级，从而证明了原子能级的存在。加速电子碰撞自由的氢原子，使某氢原子从基态激发到激发态。该氢原子仅能发出一条可见光波长范围（ $400\text{nm}\sim760\text{nm}$ ）内的光谱线。仅考虑一维正碰。

（1）求该氢原子能发出的可见光的波长；

（2）求加速后电子动能 $E_k$ 的范围；

（3）如果将电子改为质子，求加速质子的加速电压的范围。

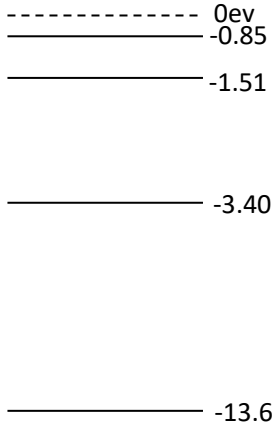
已知 $hc=1240\text{nm}\cdot\text{eV}$，其中 $h$ 为普朗克常量，$c$ 为真空中的光速；质子质量近似为电子质量的 1836 倍，氢原子在碰撞前的速度可忽略。

**参考解答：**

（1）由氢原子的能级公式

$$E_n=-\frac{13.6\text{eV}}{n^2},\quad n=1,2,\cdots \qquad ①$$

可得氢原子的能级图如图所示。




可见光光子能量的上限 $E_1'$ 和下限 $E_2'$ 分别为

$$E_1'=\frac{hc}{\lambda_1}=\frac{1240\text{nm}\cdot\text{eV}}{400\text{nm}}=3.10\text{eV} \qquad ②$$

$$E_2'=\frac{hc}{\lambda_2}=\frac{1240\text{nm}\cdot\text{eV}}{760\text{nm}}=1.63\text{eV} \qquad ③$$

要能观察到可见光范围内的光谱线，发生跃迁的两能级的能量之差

应在可见光的能量范围

$$1.63\text{eV} \sim 3.10\text{eV} \qquad ④$$

内。要仅能观察到一条可见光范围内的光谱线，由氢原子的能级图可知，只能将氢原子激发到第二激发态，即能级

$$n = 3 \qquad ⑤$$

氢原子第二激发态（$n = 3$）到第一激发态（$n = 2$）的能量差为

$$E_{32} = E_3 - E_2 = (-1.51\text{eV}) - (-3.4\text{eV}) = 1.89\text{eV} \qquad ⑥$$

氢原子从第二激发态跃迁到第一激发态所发出的可见光的波长为

$$\lambda = \frac{hc}{E_{32}} = 656\text{nm} \qquad ⑦$$

（2）要使氢原子能激发到能级 $n = 3$，需要提供的能量至少为

$$E_{31} = E_3 - E_1 = (-1.51\text{eV}) - (-13.60\text{eV}) = 12.09\text{eV} \qquad ⑧$$

设电子质量为 $m_e$，电子碰撞前后的速度分别为 $v_1$ 和 $v_2$，氢原子碰撞前后的速度分别为 $u_1 \approx 0$（由题意）和 $u_2$，电子因激发氢原子而损失的能量为 $\Delta E$（被氢原子吸收为激发能）。由动量和能量守恒有

$$m_e v_1 = m_e v_2 + M u_2 \qquad ⑨$$

$$\frac{1}{2} m_e v_1^2 = \frac{1}{2} m_e v_2^2 + \frac{1}{2} M u_2^2 + \Delta E \qquad ⑩$$

由⑨⑩式消去 $u_2$，得

$$m_e(M + m_e)v_2^2 - 2m_e^2 v_1 v_2 + m_e(m_e - M)v_1^2 + 2M\Delta E = 0 \qquad ⑪$$

此式是关于 $v_2$ 的一元二次方程。注意到 $v_2$ 为实的常量，故方程⑪的系数应满足条件

$$(-2m_e^2 v_1)^2 - 4m_e(M + m_e)[m_e(m_e - M)v_1^2 + 2M\Delta E] \geq 0 \qquad ⑫$$

化简得

$$E_k \equiv \frac{1}{2} m_e v_1^2 \geq (1 + \frac{m_e}{M})\Delta E \qquad ⑬$$

要使原子从基态仅激发到第二激发态，$\Delta E$ 应满足

$$E_{31} \leq \Delta E < E_{41} \qquad ⑭$$

式中 $E_{31}$ 已由⑧式给出，而

$$E_{41} = E_4 - E_1 = (-0.85\text{eV}) - (-13.60\text{eV}) = 12.75\text{eV} \qquad ⑮$$

由⑬⑭⑮式得

$$(1 + \frac{m_e}{M})E_{31} \leq E_k < (1 + \frac{m_e}{M})E_{41} \qquad ⑯$$

由⑯式和题给条件得

$$12.10\text{eV} \leq E_k < 12.76\text{eV} \qquad ⑰$$

（3）如果将电子改为质子，⑯式成为

$$(1+\frac{m_{\mathrm{p}}}{M})E_{31}\le E_k<(1+\frac{m_{\mathrm{p}}}{M})E_{41} \qquad ⑱$$

式中 $m_{\mathrm{p}}$ 为质子的质量。由⑱式和题给条件得

$$24.17\mathrm{eV}\le E_{\mathrm{k}}<25.49\mathrm{eV} \qquad ⑲$$

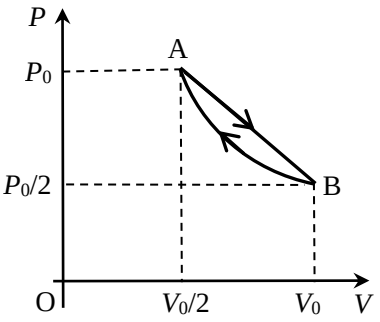
设加速质子的加速电压为 $V$ 。由

$$eV=E_{\mathrm{k}} \quad （e 为质子电荷）$$

和⑲式得

$$24.17\mathrm{V}\le V<25.49\mathrm{V} \qquad ⑳$$

七、如气体压强-体积（$P$-$V$）图所示，摩尔数为 $\nu$ 的双原子理想气体构成的系统经历一正循环过程（正循环指沿图中箭头所示的循环），其中自 A 到 B 为直线过程，自 B 到 A 为等温过程。双原子理想气体的定容摩尔热容量为 $\frac{5}{2}R$，$R$ 为气体常量。




（1）求直线 AB 过程中的最高温度；

（2）求直线 AB 过程中气体的摩尔热容量随气体体积变化的关系式，说明气体在直线 AB 过程各段体积范围内是吸热过程还是放热过程，确定吸热和放热过程发生转变时的温度 $T_{\mathrm{c}}$；

（3）求整个直线 AB 过程中所吸收的净热量和一个正循环过程中气体对外所作的净功。

**参考解答：**

（1）直线 AB 过程中任一平衡态的气体压强 $p$ 和体积 $V$ 满足方程

$$\frac{P-P_0}{P_0-\frac{P_0}{2}}=\frac{V-\frac{V_0}{2}}{\frac{V_0}{2}-V_0}$$

此即

$$P=\frac{3}{2}P_0-\frac{P_0}{V_0}V \qquad ①$$

根据理想气体状态方程有

$$PV=\nu RT \qquad ②$$

式中 $T$ 是相应的绝对温度。由①②式得

$$T=\frac{1}{\nu R}\left(-\frac{P_0}{V_0}V^2+\frac{3}{2}P_0V\right)=\frac{-P_0}{\nu RV_0}\left(V-\frac{3}{4}V_0\right)^2+\frac{9}{16}\frac{P_0V_0}{\nu R} \qquad ③$$

由③式知，当

$$V=\frac{3}{4}V_0 \qquad ④$$

时，气体达到直线 AB 过程中的最高温度为

$$T_{\max}=\frac{9P_0V_0}{16\nu R} \qquad ⑤$$

（2）由直线 AB 过程的摩尔热容量$C_{\mathrm{m}}$的定义有

$$dQ=\nu C_{\mathrm{m}}dT \qquad ⑥$$

由热力学第一定律有

$$dU=dQ-PdV \qquad ⑦$$

由理想气体内能公式和题给数据有

$$dU=\nu C_V dT=\nu\frac{5R}{2}dT \qquad ⑧$$

由①⑥⑦⑧式得

$$C_{\mathrm{m}}=C_V+\frac{P}{\nu}\frac{dV}{dT}=\frac{5}{2}R+\left(\frac{3}{2}P_0-\frac{P_0}{V_0}V\right)\frac{1}{\nu}\frac{dV}{dT} \qquad ⑨$$

由③式两边微分得

$$\frac{dV}{dT}=\frac{2\nu RV_0}{P_0(3V_0-4V)} \qquad ⑩$$

由⑩式代入⑨式得

$$C_{\mathrm{m}}=\frac{21V_0-24V}{3V_0-4V}\frac{R}{2} \qquad ⑪$$

由⑥⑩⑪式得，直线 AB 过程中，

在$V$从$\frac{V_0}{2}$增大到$\frac{3V_0}{4}$的过程中，$C_{\mathrm{m}}>0$，$\frac{dT}{dV}>0$，故$\frac{dQ}{dV}>0$，吸热 ⑫

在$V$从$\frac{3}{4}V_0$增大到$\frac{21V_0}{24}$的过程中，$C_{\mathrm{m}}<0$，$\frac{dT}{dV}<0$，故$\frac{dQ}{dV}>0$，吸热 ⑬

在$V$从$\frac{21V_0}{24}$增大到$V_0$的过程中，$C_{\mathrm{m}}>0$，$\frac{dT}{dV}<0$，故$\frac{dQ}{dV}<0$，放热 ⑭

由⑫⑬⑭式可知，系统从吸热到放热转折点发生在

$$V=V_{\mathrm{c}}=\frac{21}{24}V_0$$

处。由③式和上式得

$$T_{\mathrm{c}}=\frac{1}{\nu R}\left(-\frac{P_0}{V_0}V^2+\frac{3}{2}P_0V\right)=\frac{35}{64}\frac{P_0V_0}{\nu R} \qquad ⑮$$

（3）对于直线 AB 过程，由⑥⑩式得

$$dQ=\nu C_{\mathrm{m}}\frac{dT}{dV}dV=\frac{21V_0-24V}{4V_0}P_0dV=\left(\frac{21}{4}-\frac{6V}{V_0}\right)P_0dV \qquad ⑯$$

将⑯式两边对直线过程积分得，整个直线 AB 过程中所吸收的净热量为

$$Q_{直线}=\int_{V_0/2}^{V_0}\left(\frac{21}{4}-\frac{6V}{V_0}\right)P_0dV=P_0\left(\frac{21}{4}V-\frac{3V^2}{V_0}\right)\Big|_{V_0/2}^{V_0}=\frac{3}{8}P_0V_0 \qquad ⑰$$

直线 AB 过程中气体对外所作的功为

$$W_{直线}=\frac{1}{2}(P_0+\frac{P_0}{2})(V_0-\frac{V_0}{2})=\frac{3}{8}P_0V_0 \qquad ⑱$$

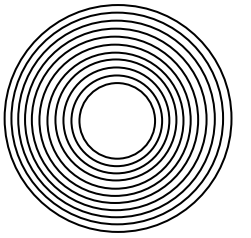
等温过程中气体对外所作的功为

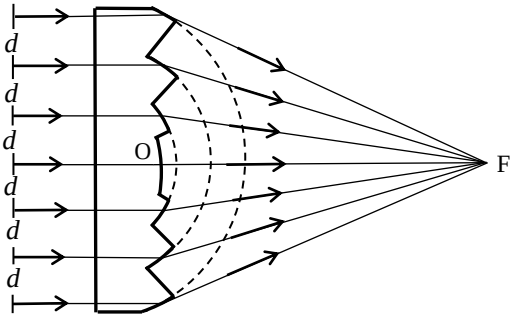
$$W_{等温}=\int_{V_0}^{V_0/2}PdV=\int_{V_0}^{V_0/2}P_0\frac{V_0}{2}\frac{dV}{V}=-\frac{P_0V_0}{2}\ln 2 \qquad ⑲$$

一个正循环过程中气体对外所作的净功为

$$W=W_{直线}+W_{等温}=(\frac{3}{8}-\frac{\ln 2}{2})P_0V_0 \qquad ⑳$$

八、菲涅尔透镜又称同心圆阶梯透镜，它是由很多个同轴环带套在一起构成的，其迎光面是平面，折射面除中心是一个球冠外，其它环带分别是属于不同球面的球台侧面，其纵剖面如右图所示。这样的结构可以避免普通大口径球面透镜既厚又重的缺点。菲涅尔透镜的设计主要是确定每个环带的齿形（即它所属球面的球半径和球心），各环带都是一个独立的（部分）球面透镜，它们的焦距不同，但必须保证具有共同的焦点（即图中 F 点）。已知透镜材料的折射率为 $n$，从透镜中心 O（球冠的顶点）到焦点 F 的距离（焦距）为 $f$（平行于光轴的平行光都能经环带折射后会聚到 F 点），相邻环带的间距为 $d$（$d$ 很小，可忽略同一带内的球面像差；$d$ 又不是非常小，可忽略衍射效应）。求



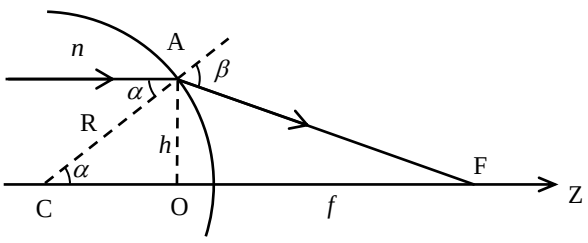



（1）每个环带所属球面的球半径和球心到焦点的距离；

（2）该透镜的有效半径的最大值和有效环带的条数。

**参考解答：**

（1）考虑单个球面的折射。如图，设某一与光轴距离为 $h$ 的光线平行于光轴 Z 从折射率为 $n$ 的介质中射向半径为 $R$、球心位于 C 点的球面，入射点为球面上的 A



点，CA 为球面半径，入射角为$\alpha$，球面外是空气，折射角为$\beta$，折射线与 Z 轴交点为 F。由 A 作 Z 轴的垂线，垂足为 O，$\mathrm{AO}=h$。由折射定律，有

$$\sin\beta = n\sin\alpha\,, \qquad ①$$

在 ΔACF 中，由正弦定理有

$$\frac{\mathrm{CF}}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{AF}}{\sin\alpha} \qquad ②$$

在 ΔAOF 中，由勾股定理有

$$\mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AO}^2+\mathrm{OF}^2} \qquad ③$$

$$R=\mathrm{CA}=\sqrt{\mathrm{CO}^2+\mathrm{AO}^2} \qquad ④$$

又

$$\mathrm{CO}=\mathrm{CF}-\mathrm{OF}\,,\ \ \mathrm{AO}=h\,,\ \ \mathrm{OF}=f\,, \qquad ⑤$$

由①②③④⑤式得

$$\mathrm{CF}=n\sqrt{h^2+f^2} \qquad ⑥$$

$$\begin{aligned} R&=\sqrt{(n\sqrt{h^2+f^2}-f)^2+h^2}\\ &=\sqrt{(n^2+1)(h^2+f^2)-2nf\sqrt{h^2+f^2}} \end{aligned} \qquad ⑦$$

在制作给定焦点和焦距的菲涅尔透镜时，应按⑥⑦式来确定各环带球面的球心位置和球半径，即对第$k$（$k=0,1,2,\cdots$）个环带球台，其球心在光轴上与焦点的距离应为

$$\mathrm{C}_k\mathrm{F}=n\sqrt{h_k^{\,2}+f^2}=n\sqrt{k^2d^2+f^2} \qquad ⑧$$

球半径则为

$$\begin{aligned} R_k&=\sqrt{(n^2+1)(h_k^{\,2}+f^2)-2nf\sqrt{h_k^{\,2}+f^2}}\\ &=\sqrt{(n^2+1)(k^2d^2+f^2)-2nf\sqrt{k^2d^2+f^2}} \end{aligned} \qquad ⑨$$

特别地，位于透镜中心的环带（$k=0$）球心与焦点距离为

$$\mathrm{C}_0\mathrm{F}=nf \qquad ⑩$$

球半径为

$$R_0=(n-1)f \qquad ⑪$$

（2）当$f$不变而$h$取某一值$h_\mathrm{m}$时，图中$\angle\mathrm{CAF}$成为直角，这意味着光线的入射角达到全反射的临界角$\alpha_\mathrm{C}$。在此情况下有

$$\sin\alpha_\mathrm{C}=\frac{1}{n}=\frac{f}{\sqrt{h_\mathrm{m}^2+f^2}} \qquad ⑫$$

由⑫式得

$$h_\mathrm{m}=\sqrt{n^2-1}f \qquad ⑬$$

这就是透镜能够达到的最大有效半径。透镜的最大有效环带数 $k_{\mathrm{m}}$ 则为不大于 $\frac{\sqrt{n^2-1}f}{d}$ 的最大整数

$$k_{\mathrm{m}}=\left[\frac{\sqrt{n^2-1}f}{d}\right] \qquad ⑭$$