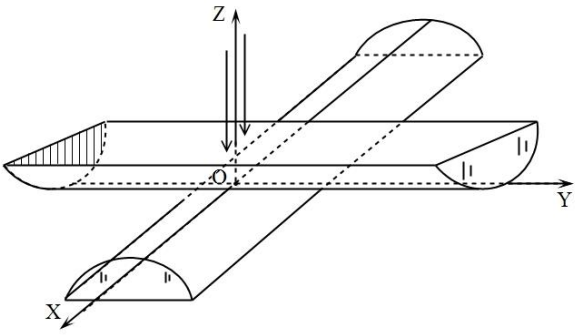
复赛试题及参考答案

理论部分

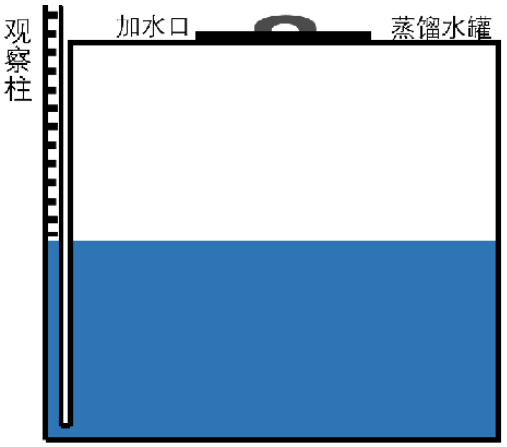
理论试题

一、如图，上、下两个平凸透光柱面的半径分别为R_1、R_2，且两柱面外切；其剖面（平面）分别平行于各自的轴线，且相互平行；各自过切点的母线相互垂直。取两柱面切点 O 为直角坐标系 O-XYZ 的原点，下侧柱面过切点 O 的母线为 X 轴，上侧柱面过切点 O 的母线为 Y 轴。一束在真空中波长为λ的可见光沿 Z 轴负方向傍轴入射，分别从上、下柱面反射回来的光线会发生干涉；借助于光学读数显微镜，逆着 Z 轴方向，可观测到原点附近上方柱面上的干涉条纹在 X-Y 平面的投影。R_1和R_2远大于傍轴光线干涉区域所对应的两柱面间最大间隙。空气折射率为$n_0=1.00$。试推导第 k 级亮纹在 X-Y 平面的投影的曲线方程。



已知：a. 在两种均匀、各向同性的介质的分界面两侧，折射率较大（小）的介质为光密（疏）介质；光线在光密（疏）介质的表面反射时，反射波存在（不存在）半波损失。任何情形下，折射波不存在半波损失。伴随半波损失将产生大小为π的相位突变。b. $\sin x \approx x$, 当$|x| \ll 1$。

二、某秋天清晨，气温为4.0°C，一加水员到实验园区给一内径为2.00 m、高为2.00 m的圆柱形不锈钢蒸馏水罐加水。罐体导热良好。罐外有一内径为4.00 cm的透明圆柱形观察柱，底部与罐相连（连接处很短），顶部与大气相通，如图所示。加完水后，加水员在水面上覆盖一层轻质防蒸发膜（不溶于水，与罐壁无摩擦），并密闭了罐顶的加水口。此时加水员通过观察柱上的刻度看到罐内水高为1.00 m。



（1）从清晨到中午，气温缓慢升至24.0°C，问此时观察柱内水位为多少？假设中间无人用水，水的蒸发及罐和观察柱体积随温度的变化可忽略。

（2）从密闭水罐后至中午，罐内空气对外做的功和吸收的热量分别为多少？求这个过程中罐内空气的热容量。

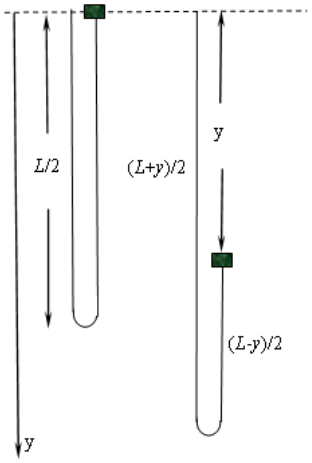
已知罐外气压始终为标准大气压 $p_0=1.01\times10^5\,\mathrm{Pa}$，水在 4.0℃ 时的密度为 $\rho_0=1.00\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，水在温度变化过程中的平均体积膨胀系数为 $\kappa=3.03\times10^{-4}\,\mathrm{K^{-1}}$，重力加速度大小为 $g=9.80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，绝对零度为 –273.15℃。

三、（20 分）木星是太阳系内质量最大的行星（其质量约为地球的 318 倍）。假设地球与木星均沿圆轨道绕太阳转动，两条轨道在同一平面内。将太阳、地球和木星都视为质点，忽略太阳系内其它星体的引力；且地球和木星之间的引力在有太阳时可忽略。已知太阳和木星质量分别为 m_s 和 m_j，引力常量为 G。地球和木星绕太阳运行的轨道半径分别是 r_e 和 r_j。假设在某个时刻，地球与太阳的连线和木星与太阳的连线之间的夹角为 θ。这时若太阳质量突然变为零，求

（1）此时地球相对木星的速度大小 v_ej 和地球不被木星引力俘获所需要的最小速率 v_0。

（2）试讨论此后地球是否会围绕木星转动，可利用（1）中结果和数据 $m_\mathrm{s}\approx2.0\times10^{30}\,\mathrm{kg}$、$m_\mathrm{j}\approx1.9\times10^{27}\,\mathrm{kg}$、木星公转周期 $T_\mathrm{j}\approx12\,\mathrm{y}$。

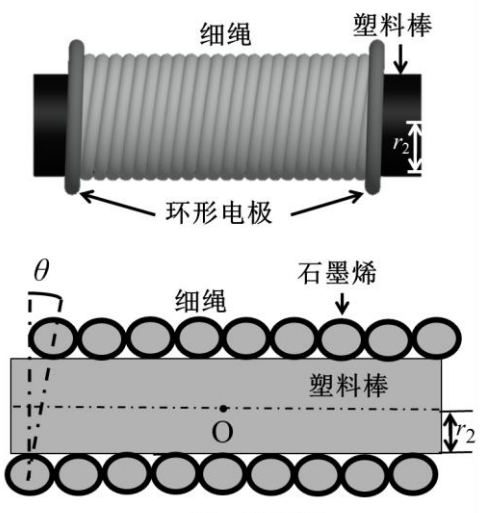
四、（20 分）蹦极是年轻人喜爱的运动。为研究蹦极过程，现将一长为 L、质量为 m、当仅受到绳本身重力时几乎不可伸长的均匀弹性绳的一端系在桥沿 b，绳的另一端系一质量为 M 的小物块（模拟蹦极者）；假设 M 比 m 大很多，以至于均匀弹性绳受到绳本身重力和蹦极者的重力向下拉时会显著伸长，但仍在弹性限度内。在蹦极者从静止下落直至蹦极者到达最下端、但未向下拉紧绳之前的下落过程中，不考虑水平运动和可能的能量损失。重力加速度大小为 g。



（1）求蹦极者从静止下落距离 y（$y<L$）时的速度和加速度的大小，蹦极者在所考虑的下落过程中的速度和加速度大小的上限。

（2）求蹦极者从静止下落距离 y（$y<L$）时，绳在其左端悬点 b 处张力的大小。

五、一种拉伸传感器的示意图如图 a 所示：它由一半径为 r_2 的圆柱形塑料棒和在上面紧密缠绕 N（$N>>1$）圈的一层细绳组成；绳柔软绝缘，半径为 r_1，外表面均匀涂有厚度为 t（$t<<r_1<<r_2$）、电阻率为 ρ 的石墨烯材料；传感器两端加有环形电极（与绳保持良好接触）。未拉伸时，缠绕的绳可视为 N 个椭圆环挨在一起放置；



图a. 未拉伸

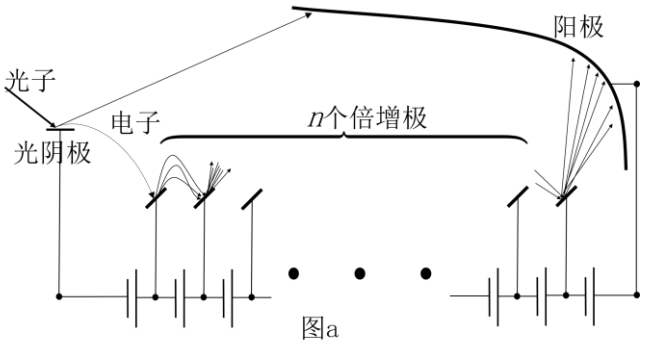
该椭圆环面与圆柱形塑料棒的横截面之间的夹角为θ（见图 a），相邻两圈绳之间的接触电阻为R_c。现将整个传感器沿塑料棒轴向朝两端拉伸，绳间出现n个缝隙，每个缝隙中刚好有一整圈绳，这圈绳被自动调节成由一个未封闭圆环和两段短直线段（与塑料棒轴线平行）串接而成（见图 b）。假设拉伸前后θ 、r_1、r_2、ρ、t均不变。

（1）求拉伸后传感器的伸长率ε（ε是传感器两电极之间距离的伸长与其原长之比）和两环形电极间电阻的变化率；

（2）在传感器两环形电极间通入大小为I的电流，求此传感器在未拉伸及拉伸后，在塑料棒轴线上离塑料棒中点 O 距离为D（D远大于传感器长度）的 P 点（图中未画出）处沿轴向的磁感应强度。

已知：长半轴和短半轴的长度分别为a和b的椭圆的周长为$\pi(3\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})$，其中$b\neq 0$。

六、（20 分）光电倍增管是用来将光信号转化为电信号并加以放大的装置，其结构如图 a 所示：它主要由一个光阴极、n个倍增级和一个阳极构成；光阴极与第 1 倍增级、各相邻倍增级及第n倍增级与阳极之间均有电势差V；从光阴极逸出的电子称为光电子，其中大部分（百分比η）被收集到第 1 倍增级上，余下的被直接收集到阳极上；



图a

每个被收集到第i倍增级（$i=1,\cdots,n$）的电子在该电极上又使得δ个电子（$\delta>1$)逸出；第i倍增级上逸出的电子有大部分（百分比σ）被第$i+1$倍增级收集，其他被阳极收集；直至所有电子被阳极收集，实现信号放大。已知电子电荷量绝对值为e。

（1）求光电倍增管放大一个光电子的平均能耗，已知$\delta\sigma>1$，$n>>1$；

（2） 为使尽可能多的电子从第i倍增级直接到达第$i+1$倍增级而非阳极，早期的光电倍增管中，会施加垂直于电子运行轨迹所在平面（纸面）的匀强磁场。设倍增级的长度为a且相邻倍增级间的几何位置如图 b 所示，倍增级间电势差引起的电场很小可忽略。所施加的匀强磁场应取什么方向以及磁感应强度大小为多少时，才能使从第i倍增级垂直出射的能量为E_e的电子中直接打到第$i+1$倍增级的电子最多？磁感应强度大小为多少时，可以保证在第$i+1$倍增级上至少收集到一些从第i倍增级垂直出

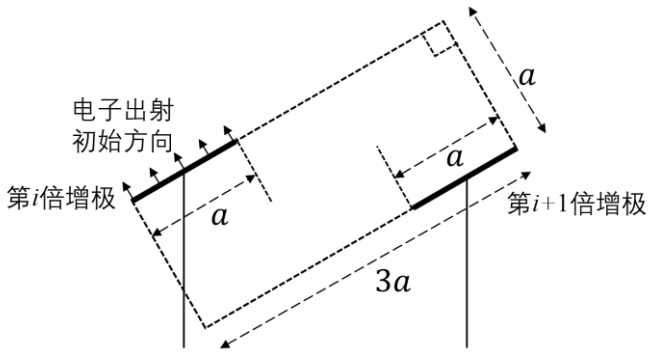
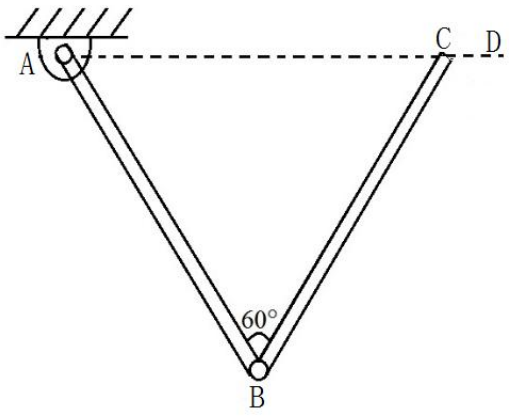


图 b

射的能量为E_e的电子？

七、两根质量均匀分布的杆 AB 和 BC，质量均为m，长均为l，A 端被光滑铰接到一固定点（即 AB 杆可在竖直平面内绕 A 点无摩擦转动）。开始时 C 点有外力保持两杆静止，A、C 在同一水平线 AD 上，A、B、C 三点都在同一竖直平面内，$\angle ABC = 60°$。某时刻撤去外力后两杆始终在竖直平面内运动。



（1）若两杆在 B 点固结在一起，求

（i）初始时两杆的角加速度；

（ii）当 AB 杆运动到与水平线 AD 的夹角为θ时，AB 杆绕 A 点转动的角速度。

（2）若两杆在 B 点光滑铰接在一起（即 BC 杆可在竖直平面内绕 B 点无摩擦转动），求初始时两杆的角加速度以及两杆间的相互作用力。

八、质子是由更小的所谓“部分子”构成的。欧洲大型强子对撞机（LHC）是高能质子-质子对撞机，质子束内单个质子能量为$E = 7.0\,\mathrm{TeV}$（$1\mathrm{TeV} = 10^3\mathrm{GeV} = 10^{12}\mathrm{eV}$），两束能量相同的质子相向而行对撞碎裂，其中相撞的两个部分子 a、b 相互作用湮灭产生一个新粒子。设部分子 a、b 的动能在质子能量中所占的比值分别为x_a、x_b，且远大于其静能。

（1）假设两个部分子 a、b 对撞湮灭产生了一个静质量为$m_s = 1.0\,\mathrm{TeV/c^2}$的新粒子 S，求$x_a$和$x_b$的乘积$x_a x_b$；

（2）假设新粒子 S 产生后衰变到两个光子，在新粒子 S 静止的参考系中，求两光子的频率；

（3）假设新粒子 S 产生后在其静止坐标系中衰变到两个质量为$m_A = 1.0\,\mathrm{GeV/c^2}$的轻粒子 A，每个轻粒子 A 再衰变到两个同频率的光子，求在这个坐标系中这两个光子动量之间的夹角。

已知：$\sin\alpha \approx \alpha$, 当$\alpha << 1$；普朗克常量$h = 6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$，电子电荷量绝对值$e = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$。

理论试题参考答案

一、如图 a 所示，光线 1 在上侧柱面 P 点处傍轴垂直入射，入射角为θ，折射角为θ_0，由折射定律有

$$n\sin\theta = n_0\sin\theta_0 \qquad ①$$

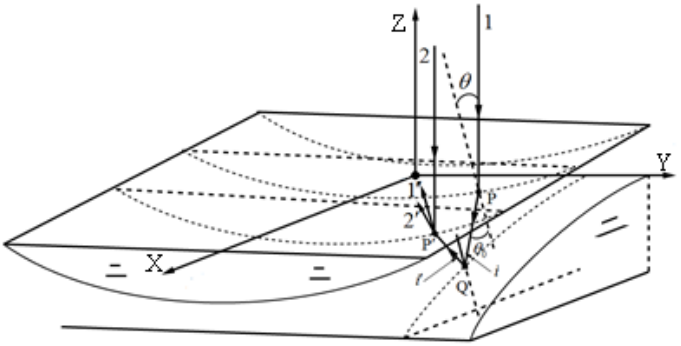


图 a

其中 n 和 n_0 分别玻璃与空气的折射率。光线在下侧柱面Q点处反射，入射角与反射角分别为 i 和 i'，由反射定律有

$$i = i' \qquad ②$$

光线在下侧柱面 Q 点的反射线交上侧柱面于 P′ 点，并由 P′ 点向上侧柱面折射，折射光线用 1″ 表示；光线 1″ 正好与 P′ 点处的入射光线 2 的反射光线 2′ 相遇，发生干涉。考虑光波反射时的半波损失，光线 1″ 与光线 2′ 在 P′ 点处光程差 ΔL 为

$$\Delta L = \left[n(-z_{\mathrm{p}}) + n_0(\mathrm{PQ} + \mathrm{P'Q}) + \frac{\lambda}{2} \right] - n(-z_{\mathrm{p'}}) = n_0(\mathrm{PQ} + \mathrm{P'Q}) - n(z_{\mathrm{p}} - z_{\mathrm{p'}}) + \frac{\lambda}{2} \qquad ③$$

式中 λ 为入射光线在真空中的波长，$n_0 = 1.00$。由题意，R_1 和 R_2 远大于傍轴光线干涉区域所对应的两柱面间最大间隙；因而在傍轴垂直入射情况下有

$$\theta \approx 0, \quad i' = i << 1$$

①式成为

$$n\theta \approx n_0\theta_0 \qquad ④$$

亦即

$$1 >> \theta_0 \approx n\theta \approx 0 \qquad ⑤$$

在傍轴条件下， 柱面上 P、Q 两处切平面的法线近似平行，因此

$$1 >> i' = i \approx \theta_0 \approx 0 \qquad ⑥$$

从而，在 P、Q 两处，不仅切平面的法线近似平行，而且在上下表面的反射光线、折射光线均近似平行于入射线，因而也近似平行于 Z 轴，从而 P′ 与 P 点近似重合，即

$$z_{\mathrm{p'}} \approx z_{\mathrm{p}} \qquad ⑦$$

且 PQ 近似平行于 Z 轴，因而长度

$$\mathrm{P'Q} \approx \mathrm{PQ} \approx z_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{Q}} \qquad ⑧$$

由③⑧式得

$$\Delta L = 2n_0 \cdot \mathrm{PQ} + \frac{\lambda}{2} = 2n_0\left(z_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{Q}}\right) + \frac{\lambda}{2} \qquad ⑨$$

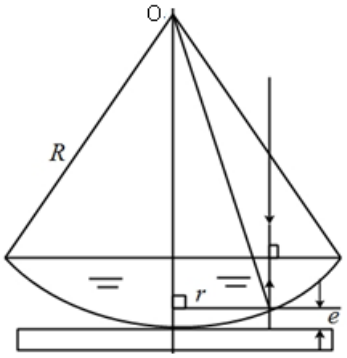


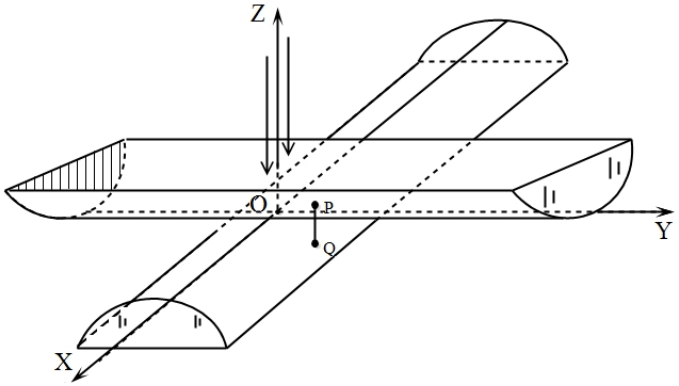
图 b

可以将⑨式右端的 z- 坐标近似用 x- 或 y- 坐标表出。为此，引入一个近似公式。如图 b 所示，设置于平面上的柱面透镜与平面之间的空气隙的厚度为 e，柱面半径为 R。对三边边长分别为 R、$R-e$ 和 r 的直角三角形有

$$R^2 = \left(R - e\right)^2 + r^2 \qquad ⑩$$

即

$$2Re - e^2 = r^2 \qquad ⑪$$



图c

在光线傍轴垂直入射时，$e \ll R$，可略去⑪式左端的e^2，故

$$e = \frac{r^2}{2R} \qquad ⑫$$

在光线傍轴垂直入射时， 前面已证近似有 PQ//Z 轴。故可将上、下两个柱面上的 P、Q 两点的坐标取为 $\mathrm{P}(x, y, z_{\mathrm{P}})$、$\mathrm{Q}(x, y, z_{\mathrm{Q}})$，如图 c 所示。根据⑫式可知，P、Q 两点到 XOY 切平面的距离分别为

$$e_1 = z_{\mathrm{P}} = \frac{x^2}{2R_1}, \quad e_2 = -z_{\mathrm{Q}} = \frac{y^2}{2R_2} \qquad ⑬$$

最后，光线在上、下两个柱面反射并相遇时, 其光程差 ΔL 为

$$\Delta L \approx 2n_0\left(z_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{Q}}\right) + \frac{\lambda}{2} = 2n_0\left(e_1 + e_2\right) + \frac{\lambda}{2}$$

$$= 2n_0\left(\frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}\right) + \frac{\lambda}{2} = n_0\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right) + \frac{\lambda}{2} \qquad ⑭$$

若 P、Q 两点在 XOY 平面的投影点 (x, y) 落在第 k 级亮(暗)纹上，则 ΔL 须满足条件

$$\Delta L = n_0\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right) + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k = 1, 2, \cdots, \quad \text{亮环} \\ (k + \frac{1}{2})\lambda, & k = 0, 1, 2, \cdots, \quad \text{暗环} \end{cases} \qquad ⑮$$

⑮式中亮环条件对应于第 k 级亮纹上的点 (x, y, z) 的 x-、 y-坐标满足的方程。

更具体地，不妨假设 $R_1 > R_2$，根据⑮式中的亮环条件，可得第 k 级亮纹的方程为

$$\frac{x^2}{A_k^2} + \frac{y^2}{B_k^2} = 1, \quad k = 1, 2\cdots \qquad ⑯$$

它们是椭圆亮环纹，其半长轴与半短轴分别为

$$A_k = \sqrt{(k - \frac{1}{2})R_1\lambda / n_0}, \quad k = 1, 2, \cdots, \quad B_k = \sqrt{(k - \frac{1}{2})R_2\lambda / n_0}, \quad k = 1, 2, \cdots \qquad ⑰$$

二、（1）清晨加完水封闭后，罐内空气的状态方程为

$$p_0 V_0 = nRT_0 \qquad ①$$

式中 n 为罐内空气的摩尔数， p_0、$V_0 = \pi\ \mathrm{m}^3$ 和 $T_0 = 277.15\mathrm{K}$ 分别是此时罐内空气的压强、体积和温度。

至中午时，由于气温升高，罐内空气压强增大，设此时罐内空气的压强、体积和温度分别为 p_1、V_1 和 T_1，相应的状态方程为

$$p_1 V_1 = nRT_1 \qquad ②$$

式中 $T_1 = 297.15\mathrm{K}$。空气和水的体积都发生变化，使得观察柱中水位发生变化，此时观察柱内水位和罐内水位之差为，

$$\Delta h=\frac{V_1-V_0}{S_1}+\frac{V_1-V_0}{S_2}+\frac{\kappa(T_1-T_0)(S_1+S_2)l_0}{S_2} \qquad ③$$

式中右端第三项是由原罐内和观察柱内水的膨胀引起的贡献，$l_0=1.00\ \mathrm{m}$为早上加水后观测柱内水面的高度，$S_1=\pi\ \mathrm{m}^2$、$S_2=4\pi\times10^{-4}\mathrm{m}^2$分别为罐、观察柱的横截面积。由力平衡条件有

$$p_1=p_0+\rho_1 g\Delta h_1 \qquad ④$$

式中

$$\rho_1=\frac{\rho_0}{1+\kappa(T_1-T_0)} \qquad ⑤$$

是水在温度为T_1时的密度。联立①②③④⑤式得关于Δh的一元二次方程为

$$\rho_1 gS'(\Delta h)^2+(p_0S_1+\lambda\rho_1 gV_0)\Delta h-(\frac{T_1}{T_0}-\lambda)p_0V_0=0 \qquad ⑥$$

式中

$$S'=\frac{S_1S_2}{S_1+S_2},\quad \lambda=1-\kappa(T_1-T_0) \qquad ⑦$$

解方程⑥得

$$\Delta h=\frac{-(p_0S_1+\lambda\rho_1 gV_0)+\sqrt{(p_0S_1+\lambda\rho_1 gV_0)^2+4\rho_1 gS'p_0V_0(\frac{T_1}{T_0}-\lambda)}}{2\rho_1 gS'}=0.812\mathrm{m} \qquad ⑧$$

另一解不合题意，舍去。由③⑤⑦⑧式和题给数据得

$$V_1-V_0=S'\Delta h-\kappa(T_1-T_0)S_1l_0=-0.0180\mathrm{m}^3$$

由上式和题给数据得，中午观察柱内水位为

$$l_1=\Delta h-\frac{V_1-V_0}{S_1}+l_0=1.82\mathrm{m} \qquad ⑨$$

（2）先求罐内空气从清晨至中午对外所做的功。

（解法一）早上罐内空气压强$p_0=1.01\times10^5\ \mathrm{Pa}$；中午观察柱内水位相对于此时罐内水位升高$\Delta h$，罐内空气压强升高了

$$\Delta p=\rho_1 g\Delta h=7.913\times10^3\ \mathrm{Pa}=7.91\times10^3\ \mathrm{Pa} \qquad ⑩$$

由于$\Delta p\ll p_0$，可认为在准静态升温过程中，罐内空气平均压强为

$$\bar{p}=p_0+\frac{1}{2}\Delta p=1.0495\times10^5\ \mathrm{Pa}=1.05\times10^5\ \mathrm{Pa} \qquad ⑪$$

罐内空气体积缩小了

$$\Delta V=0.0180\mathrm{m}^3 \qquad ⑫$$

可见$\Delta V/V_0\ll1$，这说明⑪式是合理的。罐内空气对外做功

$$W=\bar{p}(-\Delta V)=-1.889\times10^3\mathrm{J}=-1.9\times10^3\mathrm{J} \qquad ⑬$$

（解法二）缓慢升温是一个准静态过程，在封闭水罐后至中午之间的任意时刻，设罐内空气都处于热平衡状态，设其体积、温度和压强分别为V 、T 和 p 。水温为T 时水的密度为

$$\rho=\frac{\rho_0}{1+\kappa(T-T_0)} \qquad ⑩$$

将②③④式中的V_1 、T_1 和 p_1 换为V 、T 和 p ，利用⑩式得，罐内空气在温度为T 时的状态方程为

$$\begin{aligned} p&=p_0+\frac{\rho g}{S'}\left[V-V_0+\kappa\left(T-T_0\right)S_1l_0\right] \\ &=p_0+\frac{\rho_0 gS_1l_0}{S'}\frac{(V-V_0)/(S_1l_0)+\kappa\left(T-T_0\right)}{1+\kappa(T-T_0)} \end{aligned} \qquad ⑪$$

由题设数据和前面计算结果可知

$$\kappa(T-T_0)<\kappa(T_1-T_0)=0.0060$$

$$\left|\frac{V-V_0}{S_1l_0}\right|<\left|\frac{V_1-V_0}{S_1l_0}\right|=0.0057$$

这说明⑪式右端分子中与T 有关的项不可略去，而右端分母中与T 有关的项可略去。于是⑪式可

$$\begin{aligned} p&=p_0+\frac{\rho g}{S'}\left[V-V_0+\kappa\left(T-T_0\right)S_1l_0\right] \\ &=p_0+\frac{\rho_0 gS_1l_0}{S'}\left[(V-V_0)/(S_1l_0)+\kappa\left(T-T_0\right)\right] \end{aligned}$$

利用状态方程，上式可改写成

$$p=\frac{p_0-\dfrac{\rho_0 g}{S'}(V_0+\kappa T_0S_1l_0)+\dfrac{nR}{\kappa S_1l_0}}{1-\dfrac{\kappa\rho_0 gl_0}{nR}\dfrac{S_1}{S'}V}-\frac{nR}{\kappa S_1l_0} \qquad ⑫$$

从封闭水罐后至中午，罐内空气对外界做的功为

$$\begin{aligned} W&=\int_{V_0}^{V_1}p\mathrm{d}V=\int_{V_0}^{V_1}\left[\frac{p_0-\dfrac{\rho_0 g}{S'}(V_0+\kappa T_0S_1l_0)+\dfrac{nR}{\kappa S_1l_0}}{1-\dfrac{\kappa\rho_0 gl_0}{nR}\dfrac{S_1}{S'}V}-\frac{nR}{\kappa S_1l_0}\right]\mathrm{d}V \\ &=-\frac{nR}{\kappa S_1l_0}\left\{(V_1-V_0)-\frac{S'}{\rho_0 g}\left[p_0-\frac{\rho_0 g}{S'}(V_0+\kappa T_0S_1l_0)+\frac{nR}{\kappa S_1l_0}\right]\ln\frac{1-\dfrac{\kappa\rho_0 gl_0}{nR}\dfrac{S_1}{S'}V_1}{1-\dfrac{\kappa\rho_0 gl_0}{nR}\dfrac{S_1}{S'}V_0}\right\} \qquad ⑬ \\ &=-1.890\times10^3\mathrm{J}=-1.9\times10^3\mathrm{J} \end{aligned}$$

（解法三）缓慢升温是一个准静态过程，在封闭水罐后至中午的任意时刻，罐内空气都处于热平衡状态，设其体积、温度和压强分别为V 、T 和 p 。水在温为T 时的密度为

$$\rho=\frac{\rho_0}{1+\kappa(T-T_0)} \qquad ⑩$$

将②③④式中的V_1 、T_1 和 p_1 换为V 、T 和 p ，利用⑩式得，罐内空气在温度为T 时的状态方程为

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 + \frac{\rho g}{S'}\left[V - V_0 + \kappa\left(T - T_0\right)S_1 l_0\right] \\
&= p_0 + \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{V - V_0 + \kappa\left(T - T_0\right)S_1 l_0}{1+\kappa(T-T_0)} \\
&= p_0 + \frac{\rho_0 g}{S'}S_1 l_0 + \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{V - V_0 - S_1 l_0}{1+\kappa(T-T_0)} \\
&\approx p_0 + \frac{\rho_0 g l_0 S_1}{S'} + \frac{\rho_0 g}{S'}(V - V_0 - S_1 l_0)[1-\kappa(T-T_0)] \\
&= p_0 + \frac{\rho_0 g l_0 S_1}{S'} + \frac{\rho_0 g}{S'}\left[(V - V_0 - S_1 l_0)(1+\kappa T_0) - \frac{\kappa}{nR}pV(V - V_0 - S_1 l_0)\right] \\
&\approx p_0 + \frac{\rho_0 g l_0 S_1}{S'} + \frac{\rho_0 g}{S'}(V - V_0 - S_1 l_0)(1+\kappa T_0) + \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{\kappa S_1 l_0}{nR}pV \\
&= p_0 + \frac{\rho_0 g l_0 S_1}{S'} + \frac{\rho_0 g}{S'}(V - 2V_0)(1+\kappa T_0) + \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{\kappa V_0}{nR}pV \\
&= p_0 + \frac{\rho_0 g l_0 S_1}{S'} + \frac{\rho_0 g}{S'}(V - 2V_0)(1+\kappa T_0) + \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{\kappa T_0}{p_0}pV
\end{aligned}
\qquad ⑪
$$

式中应用了

$$\kappa(T - T_0) < \kappa(T_1 - T_0) = 0.0060\,,$$

$$\left|\frac{V - V_0}{S_1 l_0}\right| < \left|\frac{V_1 - V_0}{S_1 l_0}\right| = 0.0057$$

⑪式可改写成

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{p_0 + \frac{\rho_0 g l_0 S_1}{S'} + \frac{\rho_0 g}{S'}(V - 2V_0)(1+\kappa T_0)}{1 - \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{\kappa T_0}{p_0}V} \\
&= -\frac{(1+\kappa T_0)p_0}{\kappa T_0} + \frac{\frac{1+2\kappa T_0}{\kappa T_0}p_0 - \frac{\rho_0 g V_0}{S'}(1+2\kappa T_0)}{1 - \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{\kappa T_0}{p_0}V}
\end{aligned}
\qquad ⑫
$$

从封闭水罐后至中午，罐内空气对外界做的功为

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{V_0}^{V_1} p\mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_1}\left[-\frac{(1+\kappa T_0)p_0}{\kappa T_0} + \frac{\frac{1+2\kappa T_0}{\kappa T_0}p_0 - \frac{\rho_0 g V_0}{S'}(1+2\kappa T_0)}{1 - \frac{\rho_0 g}{S'}\frac{\kappa T_0}{p_0}V}\right]\mathrm{d}V \\
&= -\frac{(1+\kappa T_0)p_0}{\kappa T_0}\left[V_1 - V_0 + \left(\frac{S'p_0}{\rho_0 g\kappa T_0} - V_0\right)\ln\frac{S'p_0 - \rho_0 g\kappa T_0 V_1}{S'p_0 - \rho_0 g\kappa T_0 V_0}\right] \\
&= -1.896\times10^3\,\mathrm{J} = -1.9\times10^3\,\mathrm{J}
\end{aligned}
\qquad ⑬
$$

现计算罐内空气的内能变化。由能量均分定理知，罐内空气中午相对于清晨的内能改变为

$$\Delta U = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0) = \frac{5}{2}\frac{p_0 V_0}{T_0}(T_1 - T_0) = 5.724\times10^4\,\mathrm{J} = 5.72\times10^4\,\mathrm{J} \qquad ⑭$$

式中 5 是常温下空气分子的自由度。由热力学第一定律得，罐内空气的吸热为

$$\Delta Q = W + \Delta U = 5.535\times10^4\,\mathrm{J} = 5.54\times10^4\,\mathrm{J} \qquad ⑮$$

从密闭水罐后至中午，罐内空气在这个过程中的热容量为

$$C=\frac{\Delta Q}{T_1-T_0}=2.77\times10^3\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}\ 。 \qquad ⑯$$

三、（1）若太阳质量突然变为零，地球和木星围绕太阳转动速度不会突然改变，因而应当等于在太阳质量变为零之前的瞬间，地球和木星围绕太阳转动的速度。设在太阳质量变为零之前，地球和木星绕太阳转动速度分别是v_{e}和v_{j}。以太阳为原点、地球和木星公转轨道平面为*x*-*y*平面建立坐标系。由万有引力定律和牛顿第二定律有

$$G\frac{m_{\mathrm{s}}m_{\mathrm{e}}}{r_{\mathrm{e}}^2}=m_{\mathrm{e}}\frac{v_{\mathrm{e}}^2}{r_{\mathrm{e}}} \qquad ①$$

由①式得

$$v_{\mathrm{e}}=\sqrt{\frac{Gm_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{e}}}}\ , \qquad ②$$

同理有

$$v_{\mathrm{j}}=\sqrt{\frac{Gm_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{j}}}}\ , \qquad ③$$

现计算地球不被木星引力俘获所需要的最小速率v_0（不考虑太阳引力）。若地球相对木星刚好以速度v_0运动，也就是说，当地球在木星的引力场里运动到无限远时，速度刚好为零，此时木星-地球系统引力势能为零，动能也为零，即总机械能为零。按机械能守恒定律，在地球离木星距离为r_{ej}时，速度v_0满足

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v_0^2-G\frac{m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{j}}}{r_{\mathrm{ej}}}=0\ , \qquad ④$$

即

$$v_0=\sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{j}}}{r_{\mathrm{ej}}}}\ , \qquad ⑤$$

可见，地球不被木星引力俘获所需要的最小速率v_0的大小与木星质量和地球离木星的距离有关。

设在太阳质量变为零的瞬间，木星的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{j}}=(r_{\mathrm{j}},0) \qquad ⑥$$

地球的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}=(r_{\mathrm{e}}\cos\theta,\ r_{\mathrm{e}}\sin\theta)\ , \qquad ⑦$$

式中θ为地球此时的位矢与*x*-轴的夹角。此时地球和木星的距离为

$$r_{\mathrm{ej}}=\sqrt{r_{\mathrm{e}}^2+r_{\mathrm{j}}^2-2r_{\mathrm{e}}r_{\mathrm{j}}\cos\theta} \qquad ⑧$$

此时地球相对于木星的速度大小为

$$v_{ej}=\left|\boldsymbol{v}_e-\boldsymbol{v}_j\right|=\sqrt{v_e^2+v_j^2-2v_ev_j\cos\theta}=\sqrt{Gm_s}\sqrt{\frac{1}{r_e}+\frac{1}{r_j}-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{r_er_j}}} \qquad ⑨$$

式中$\cos\theta$项前面取减号是因为考虑到木星和地球同方向绕太阳旋转的缘故。由⑤⑧式得

$$v_0=\sqrt{\frac{2Gm_j}{r_{ej}}}=\frac{(2Gm_j)^{1/2}}{(r_e^2+r_j^2-2r_er_j\cos\theta)^{1/4}}, \qquad ⑩$$

（2）解法（一）

为了判断地球是否会围绕木星转动，只需比较v_{ej}和v_0的大小。由开普勒第三定律有

$$\frac{r_j^3}{T_j^2}=\frac{r_e^3}{T_e^2}, \qquad ⑪$$

式中T_j=12 y是木星公转周期，而T_e=1y是地球公转周期。由⑪式得

$$\frac{r_j}{r_e}=\sqrt[3]{\frac{T_j^2}{T_e^2}}=\sqrt[3]{144}\approx 5.2 \qquad ⑫$$

v_{ej}和v_0都是正数，所以，由⑨⑩⑫式有：

$$\begin{aligned}\frac{v_{ej}}{v_0}&\approx\sqrt{\frac{m_s}{2m_j}}\sqrt{\frac{1}{r_e}+\frac{1}{5.2r_e}-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5.2}r_e}}\sqrt{r_e}\sqrt[4]{1+(5.2)^2-2\times5.2\times\cos\theta}\\&=\sqrt{\frac{m_s}{2m_j}}\sqrt{1+\frac{1}{5.2}-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5.2}}}\sqrt[4]{1+(5.2)^2-2\times5.2\times\cos\theta}\end{aligned} \qquad ⑬$$

显然，⑬式右端当$\cos\theta=1$，即

$$\theta=0 \qquad ⑭$$

时取最小值，此时太阳、地球、木星共线，且地球和木星在太阳同侧。由⑬⑭式和题给数据有

$$\left(\frac{v_{ej}}{v_0}\right)_{\min}=\sqrt{\frac{m_s}{2m_j}}\sqrt{1+\frac{1}{5.2}-\frac{2}{\sqrt{5.2}}}\sqrt[4]{1+(5.2)^2-2\times5.2}\approx 26>>1 \qquad ⑮$$

也就是说，在任何情况下，

$$v_{ej}>>v_0 \qquad ⑯$$

即若太阳质量突然变为零，地球必定不会被木星引力俘获，不会围绕木星旋转。这里考虑的是地球与木星绕太阳运动方向相同的情况。若地球和木星绕太阳转动方向相反，则地球和木星的相对速度会更大，而v_0不变，地球也不会围绕木星旋转。

解法（二）

为了判断地球是否会围绕木星转动，只需比较v_{ej}和v_0的大小。首先讨论$\theta=0$时的情况，即在太阳质量变为零的瞬间，太阳、地球、木星共线，且地球和木星在太阳同侧的情形。由开普勒第三定律有

$$\frac{r_j^3}{T_j^2}=\frac{r_e^3}{T_e^2}, \qquad ⑪$$

式中T_j=12 y是木星公转周期，而T_e=1y是地球公转周期。由⑪式得

$$r_j=\left(\frac{T_j}{T_e}\right)^{2/3} r_e=\sqrt[3]{144}r_e\approx 5.2r_e\,, \qquad ⑫$$

将⑫式和有关数据代入⑨⑩式得

$$v_{ej}=\sqrt{Gm_s}\sqrt{\frac{1}{r_e}+\frac{1}{r_j}-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{r_e r_j}}}\approx 0.56\sqrt{m_s}\sqrt{\frac{G}{r_e}}=7.9\times 10^{14}\sqrt{\frac{G}{r_e}} \qquad ⑬$$

$$v_0=\frac{(2Gm_j)^{1/2}}{(r_e^2+r_j^2-2r_e r_j\cos\theta)^{1/4}}\approx 0.44\sqrt{2m_j}\sqrt{\frac{G}{r_e}}=2.7\times 10^{13}\sqrt{\frac{G}{r_e}} \qquad ⑭$$

可见，此时有

$$v_{ej}>>v_0 \qquad ⑮$$

所以这种情形下地球不会围绕木星旋转。这里考虑的是地球与木星绕太阳运动方向相同的情况。若地球和木星绕太阳转动方向相反，则地球和木星的相对速度会更大，而v_0不变，地球也不会围绕木星旋转。

对于$\theta\neq 0$的情况，当θ从0到π（或从0到$-\pi$）改变时，从式⑨⑩式可以看到，

$$v_{ej}\text{单调增大，}\ v_0\text{单调减小} \qquad ⑯$$

所以总有⑮式成立。因此，若太阳质量突然变为零，地球仍不会围绕木星旋转。

四、（1）由题意，均匀弹性绳在自重作用下几乎不可伸长，此即其劲度系数非常大。因而，虽然绳的弹力大小不可忽略，但绳在自重作用下的弹性势能却可忽略不计。取桥面为重力势能零点，系统总的初始能量是绳的初始势能，即

$$E_i=E_{pi}=-mg\frac{L}{4} \qquad ①$$

式中，m是绳的质量，L是绳的原长。蹦极者下落距离y时，系统的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}m\frac{L-y}{2L}v^2 \qquad ②$$

式中，M是蹦极者的质量，v是蹦极者的速度大小，它等于下落的绳的速度。下落的那段绳的重力势能为

$$E_{p,动}=-m\frac{L-y}{2L}g\left(y+\frac{L-y}{4}\right) \qquad ③$$

而此时静止的那段绳的重力势能为

$$E_{p,静}=-m\frac{L+y}{2L}g\frac{L+y}{4} \qquad ④$$

由②③④式得，此时系统（蹦极者和绳）总的机械能为

$$E_f = E_k + E_{p,动} + E_{p,静} - Mgy$$
$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m\frac{L-y}{2L}v^2 - m\frac{L-y}{2L}g(y+\frac{L-y}{4}) - m\frac{L+y}{2L}g\frac{L+y}{4} - Mgy \quad ⑤$$

按题意，不考虑可能的能量损失，有

$$E_i = E_f \quad ⑥$$

由①②③④⑤⑥式得

$$v^2 = gy\frac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my} \quad ⑦$$

将⑦式两边对时间求导得

$$2v\frac{dv}{dt} = g\frac{dy}{dt}\left[2+\frac{my(4ML+2mL-my)}{(2ML+mL-my)^2}\right] \quad ⑧$$

将 $\frac{dy}{dt}=v$ 代入⑧式得，蹦极者加速度大小 $a=\frac{dv}{dt}$ 为

$$a = \frac{g}{2}\left[1+\frac{(2ML+mL)^2}{(2ML+mL-my)^2}\right] \text{ 或 } a = g\left[1+\frac{my(4ML+2mL-my)}{2(2ML+mL-my)^2}\right] \quad ⑨$$

在所考虑的下落过程中，加速度向下，速度大小的上限为

$$v_{y\to L} = \sqrt{2gL+\frac{1}{2}\frac{m}{M}gL} \quad ⑩$$

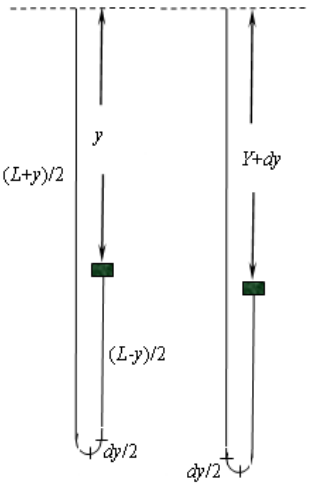
由⑨式有

$$\frac{da}{dy} = mg\frac{(2M+m)^2L^2}{(2ML+mL-my)^3} > 0 \quad ⑪$$

加速度大小的上限为

$$a_{y\to L} = g\left[1+\frac{m(4M+m)}{8M^2}\right] \quad ⑫$$

（2）解法（一）设蹦极者在时刻 t 下落到离起始水平面距离 y 处，在时刻 $t+dt$ 下落到离起始水平面距离 $y+dy$ 处。考虑时刻 t 绳底端右边长度为 $dy/2$ 的一小段绳，它在时刻 $t+dt$ 静止于绳底端左边，如图所示。在这个过程中，在竖直方向上，对这一小段绳应用冲量定理有



$$(F_1+F_2)dt + \frac{m}{L}\frac{dy}{2}g\,dt = 0 - \frac{m}{L}\frac{dy}{2}v \quad ⑬$$

式中 F_1 和 F_2 分别是绳的弯曲段左、右两端在时刻 t 张力的大小。

另一方面，对于右边正在下落的那段绳，由牛顿第二定律有

$$\left(M+\frac{m}{L}\frac{L-y}{2}\right)\ddot{y} = \frac{m}{L}\frac{L-y}{2}g + Mg + F_2 \quad ⑭$$

联立⑤⑥⑬⑭式得

$$0 = \frac{dE_f}{dt} = -\frac{1}{2}(F_1-F_2)\dot{y} \quad ⑮$$

由⑬⑮式得

$$F_1 = F_2 = -\frac{1}{2}\frac{m}{L}\frac{dy}{2}g - \frac{1}{4}\frac{m}{L}v^2 \qquad ⑯$$

取 $dy \to 0$，绳在其上端悬点 b 处的张力大小为

$$F_{\mathrm{b}} = \frac{m}{L}\frac{L+y}{2}g + \frac{1}{4}\frac{m}{L}v^2 \qquad ⑰$$

由⑩⑰式得

$$F_{\mathrm{b}} = mg\left(\frac{L+y}{2L} + \frac{y}{4L}\frac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my}\right) \qquad ⑱$$

解法（二）设蹦极者在时刻 t 下落到离起始水平面距离 y 处，在时刻 $t+dt$ 下落到离起始水平面距离 $y+dy$ 处。整个系统（整段绳、蹦极者和地球）在这段时间始末动量的改变为

$$\begin{aligned} dp &= \left[M + \frac{m}{L}\frac{L-(y+dy)}{2}\right]v(y+dy) - \left[M + \frac{m}{L}\frac{L-y}{2}\right]v(y) \\ &= \left[M + \frac{m}{L}\frac{L-y}{2}\right]\left[v(y+dy) - v(y)\right] - \frac{m}{L}\frac{dy}{2}v(y+dy) \end{aligned} \qquad ⑬$$

外力的冲量为

$$I = (M+m)gdt - F_{\mathrm{b}}dt \qquad ⑭$$

由动量定理

$$I = dp \qquad ⑮$$

并利用

$$v(y+dy) = v(y) + \frac{dv}{dy}dy$$

可得

$$F_{\mathrm{b}} = \frac{m}{L}\frac{L+y}{2}g + \frac{m}{L}\frac{dy}{2dt}v(y) + \left[(M + \frac{m}{L}\frac{L-y}{2})g - \left(M + \frac{m}{L}\frac{L-(y+dy)}{2}\right)\frac{dv}{dt}\right] \qquad ⑯$$

对右边那段绳应用牛顿第二定律有

$$(M + \frac{m}{L}\frac{L-y}{2})g - \left[M + \frac{m}{L}\frac{L-(y+dy)}{2}\right]\frac{dv}{dt} = F_2 + \frac{m}{L}\frac{dy}{2}g = \frac{1}{2}\frac{m}{L}\frac{dy}{2}g - \frac{1}{4}\frac{m}{L}v^2$$

这里利用了解法（一）的⑯式。将上式代入⑯式，并取取 $dy \to 0$ 得

$$F_{\mathrm{b}} = \frac{m}{L}\frac{L+y}{2}g + \frac{1}{4}\frac{m}{L}v^2 \qquad ⑰$$

由⑩⑰式得

$$F_{\mathrm{b}} = mg\left(\frac{L+y}{2L} + \frac{y}{4L}\frac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my}\right) \qquad ⑱$$

解法（三）设蹦极者在时刻 t 下落到离起始水平面距离 y 处，在时刻 $t+dt$ 下落到离起始水平面距离 $y+dy$ 处。整个系统（整段绳、蹦极者和地球）在这段时间始末动量的改变为

$$dp=\left[M+\frac{m}{L}\frac{L-(y+dy)}{2}\right]v(y+dy)-\left[M+\frac{m}{L}\frac{L-y}{2}\right]v(y)$$
$$=\left[M+\frac{m}{L}\frac{L-y}{2}\right][v(y+dy)-v(y)]-\frac{m}{L}\frac{dy}{2}v(y+dy) \qquad ⑬$$

外力的冲量为

$$I=(M+m)gdt-F_{\mathrm{b}}dt \qquad ⑭$$

由动量定理

$$I=dp \qquad ⑮$$

并利用

$$v(y+dy)=v(y)+\frac{dv}{dy}dy$$

可得

$$F_{\mathrm{b}}=\frac{m}{L}\frac{L+y}{2}g+\frac{m}{2L}v^2(y)+(M+\frac{m}{L}\frac{L-y}{2})[g-a(y)]+\frac{m}{L}\frac{dy}{2}a(y) \qquad ⑯$$

利用⑨式，⑯式成为

$$F_{\mathrm{b}}=\frac{m}{L}\frac{L+y}{2}g+\frac{m}{2L}v^2(y)-(M+\frac{m}{L}\frac{L-y}{2})g\frac{my(4ML+2mL-my)}{2(2ML+mL-my)^2} \qquad ⑰$$

式中右端已取 $dy\to 0$。由⑦⑰式得

$$F_{\mathrm{b}}=mg\left(\frac{L+y}{2L}+\frac{y}{4L}\frac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my}\right) \qquad ⑱$$

五、（1）如图 a 所示，由几何关系知，传感器轴向和细绳的横截面之间的夹角也是 θ。传感器两电极之间的长度（原长）为

$$L_1=N\frac{2r_1}{\cos\theta} \qquad ①$$

每圈绳可看作长半轴为 $r_2'/\cos\theta$、短半轴为 r_2' 的椭圆环，其周长为

$$l=\pi(3\frac{\frac{r_2'}{\cos\theta}+r_2'}{2}-\sqrt{\frac{r_2'^2}{\cos\theta}})=\frac{\pi r_2'}{2}(\frac{3}{\cos\theta}-\frac{2}{\sqrt{\cos\theta}}+3) \qquad ②$$

式中 $r_2'=t+r_1+r_2\approx r_2$。拉伸后，传感器的伸长率为 ε，产生了 n 个缝隙，设每个缝隙宽 L，传感器的长度变为

$$L_2=L_1(1+\varepsilon)=L_1+n(L-\frac{2r_1}{\cos\theta})=(N-n)\frac{2r_1}{\cos\theta}+nL \qquad ③$$

式中

$$L=l-2\pi r_2+2r_1=\frac{\pi r_2}{2}(\frac{3}{\cos\theta}-\frac{2}{\sqrt{\cos\theta}}-1)+2r_1 \qquad ④$$

由①②③④式得

$$\varepsilon=\frac{n(L-\frac{2r_1}{\cos\theta})}{L_1}=\frac{\pi r_2(3-2\sqrt{\cos\theta}-\cos\theta)+4r_1(\cos\theta-1)}{4r_1}\frac{n}{N} \qquad ⑤$$
$$\approx\frac{\pi r_2(3-2\sqrt{\cos\theta}-\cos\theta)}{4r_1}\frac{n}{N}$$

式中最后一步是因为考虑到 $r_1<<r_2$ 的缘故。

由电阻定律并利用②式得，每圈椭圆环形细绳沿着塑料棒轴向的电阻为

$$R_1=\frac{1}{2}\rho\frac{\pi r_1}{lt}=\frac{\rho r_1\cos\theta}{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)r_2t} \qquad ⑥$$

式中因子 1/2 是由于细绳内、外半圈的电阻并联的缘故。未拉伸时传感器的电阻为

$$R_0=NR_1+(\mathrm{N}-1)R_c\approx N(R_1+R_c),\ N>>1 \qquad ⑦$$

拉伸后，产生缝隙地方的电阻将由原来的接触电阻 $2R_c$ 和 R_1 之和变为 R_2（R_2 为细绳单独绕圆柱形塑料棒一圈的电阻）

$$R_2=\rho\frac{l}{2\pi r_1t}=\rho\frac{\frac{\pi r_2}{2}(\frac{3}{\cos\theta}-\frac{2}{\sqrt{\cos\theta}}+3)}{2\pi r_1t}=\frac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)\rho r_2}{4r_1t\cos\theta} \qquad ⑧$$

传感器在其伸长率为 ε 时的电阻变为

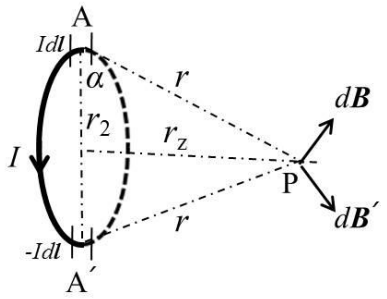
$$R_3=R_0-n(2R_c+R_1)+nR_2 \qquad ⑨$$

由⑥⑦⑧⑨式得，传感器在其伸长率为 ε 时的电阻变化率为

$$\frac{\Delta R}{R_0}=\frac{R_3-R_0}{R_0}=\frac{\frac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)\rho r_2}{4r_1t\cos\theta}-2R_c-\frac{\rho r_1\cos\theta}{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)r_2t}}{\frac{\rho r_1\cos\theta}{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)r_2t}+R_c}\frac{n}{N}$$
$$=\frac{\frac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)^2\rho r_2^2}{4r_1\cos\theta}-2(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)r_2tR_c-\rho r_1\cos\theta}{\rho r_1\cos\theta+(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)r_2tR_c}\frac{n}{N} \qquad ⑩$$
$$=\left[\frac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)^2\rho r_2^2+4\rho r_1^2\cos^2\theta}{4\rho r_1^2\cos^2\theta+4\cos\theta(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)tr_1r_2R_c}-2\right]\frac{n}{N}$$

（2）在未拉伸时电流沿着塑料棒轴向，根据毕奥-萨伐尔定律，此时不会产生沿塑料棒轴向的磁场，P 点处沿塑料棒轴向的磁感应强度为零。

同理，只有拉伸后每个缝隙处的细圆环绳中的电流才会产生沿塑料棒轴向的磁场。现仅考虑一圈中心与 P 点的距离为 r_z 的细圆环绳产生的磁场。如右图所示，在圆环上任一直径 AA′ 一端各取电流元 $Id\boldsymbol{l}$ 和 $-Id\boldsymbol{l}$，它在 P 点产生的磁场 $d\boldsymbol{B}$ 和 $d\boldsymbol{B}'$，$d\boldsymbol{B}$ 和 $d\boldsymbol{B}'$ 的垂直于轴线的分量相互抵消，它们的合磁感应强度沿塑料棒轴向，其大小为 $2dB\cos\alpha$（α 是 AP 与 AA′ 的夹角）。将整个圆环电流类似地按各直径两端分割成一个个电流元，P 点沿塑料棒轴向的总磁场即为各元电流在该点产生的磁场的轴向分量 $dB\cos\alpha$ 之和。注意到 Idl 可以写为 $Ir_2d\beta$（$d\beta$ 是弧元 dl 所对的圆心角），由毕奥-萨伐尔定律有



$$B=\int_0^{2\pi}dB\cos\alpha=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir_2d\beta}{r^2}\cos\alpha \qquad ⑪$$

式中 $r=\dfrac{r_z}{\sin\alpha}$。对于给定的 P 点，$\alpha$ 是常数，于是有

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir_2}{r_z^2}\sin^2\alpha\cos\alpha\int_0^{2\pi}d\beta=\mu_0\frac{Ir_2}{2r_z^2}\sin^2\alpha\cos\alpha \qquad ⑫$$

式中

$$\cos\alpha=\frac{r_2}{\sqrt{r_2^2+r_z^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{r_z}{\sqrt{r_2^2+r_z^2}} \qquad ⑬$$

将⑬式代入⑫式得

$$B=\mu_0\frac{r_2^2I}{2(r_2^{\,2}+r_z^{\,2})^{3/2}} \qquad ⑭$$

由题设，D 远大于传感器的长度，故也远大于 r_2，因而 $r_z\approx D>>r_2$，于是

$$B=\mu_0\frac{r_2^2I}{2D^3} \qquad ⑮$$

传感器伸长后有 n 个缝隙，由⑮式得

$$B_{\text{total}}=\mu_0\frac{r_2^2nI}{2D^3} \qquad ⑯$$

六、

（1）设从光阴极逸出的电子个数为 n_p，按题述，从第一个倍增级逸出的电子个数为

$$m_1=\eta n_p\delta$$

可用归纳法得出从第 i 个倍增级逸出的电子个数为

$$m_i=\eta n_p\delta(\sigma\delta)^{i-1},\ i=1,\cdots,n \qquad ①$$

光阴极及第 i 个倍增级向阳极贡献的电子数 $n_{p\to a}$ 、$m_{i\to a}$ 分别为

$$\begin{cases}n_{p\to a}=n_p(1-\eta),\\ m_{i\to a}=m_i(1-\sigma),\ i=1,\cdots,n-1,\\ m_{n\to a}=m_n.\end{cases} \qquad ②$$

光阴极与阳极间电势差 V_{pa}、第 i 倍增级与阳极之间的电势差 V_{ia} 分别为

$$\begin{cases}V_{pa}=(1+n)V,\\ V_{ia}=(n-i+1)V,\ i=1,\cdots,n\end{cases} \qquad ③$$

从光阴极溢出的电子被电势差加速所消耗的能量 E_p、从第 i 倍增级溢出到阳极的电子被电势差加速所消耗的能量 E_{ia}、第 i 倍增级溢出到第 $i+1$ 倍增级的电子被电势差加速所消耗的能量 $E_{i\to i+1}$ 分别为

$$\begin{cases}E_p=en_p\eta V+en_{p\to a}V_{pa},\\ E_{ia}=em_{i\to a}V_{ia},\ i=1,\cdots,n,\\ E_{i\to i+1}=em_i\sigma V,\ i=1,\cdots,n-1.\end{cases} \qquad ④$$

总耗费的电能为

$$E = E_p + \sum_{i=1}^{n} E_{ia} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i\to i+1} \qquad ⑤$$

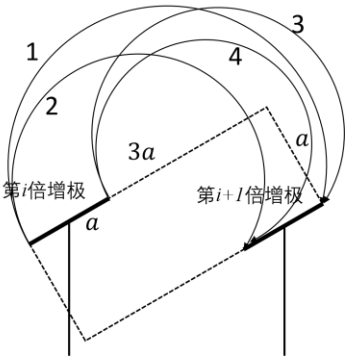
将①②③④式代入⑤式得，放大单个光阴极逸出的电子耗费的平均能量为

$$\frac{E}{n_p} = \left[1 + n + \eta(\delta - 1)\left\{\frac{\sigma\delta\left[(\sigma\delta)^n - 1\right]}{(\sigma\delta - 1)^2} - \frac{n}{\sigma\delta - 1}\right\}\right] eV \qquad ⑥$$

当 $\delta\sigma > 1$、$n >> 1$ 时，上式各项中含 $(\delta\sigma)^n$ 因子的部分的贡献远大于其他部分，因此可仅保留含 $(\delta\sigma)^n$ 级因子的项，有

$$\frac{E}{n_p} = \frac{\eta(\delta - 1)(\delta\sigma)^{n+1}}{(\delta\sigma - 1)^2} eV \qquad ⑦$$

（2）所加磁场应当垂直纸面向里。磁场提供洛仑兹力，且忽略重力和电场力，电子在匀强磁场中作匀速圆周运动。由于电子的逃逸速度垂直于电极，电子运动轨迹的圆心将在电极所在的直线上。运动轨迹如右图所示。



当第 i 倍增级最左端的电子到达第 $i+1$ 倍增级最右端时，轨迹为 1，其圆心在第 i 倍增级的延长线上，由几何关系可知，对应的半径 r_1 满足

$$r_1 = \sqrt{(3a - r_1)^2 + a^2} \qquad ⑧$$

当第 i 倍增级最左端的电子到达第 $i+1$ 倍增级最左端时，轨迹为 2，对应的轨道半径 r_2 满足

$$r_2 = \sqrt{(2a - r_2)^2 + a^2} \qquad ⑨$$

当第 i 倍增级最右端的电子到达第 $i+1$ 倍增级最右端时，轨迹为 3，对应的轨道半径 r_3 满足

$$r_3 = \sqrt{(2a - r_3)^2 + a^2} \qquad ⑩$$

当第 i 倍增级最右端的电子到达第 $i+1$ 倍增级最左端时，轨迹为 4，对应的轨道半径 r_4 满足

$$r_4 = \sqrt{(a - r_4)^2 + a^2} \qquad ⑪$$

由⑪⑫⑬⑭式分别解得

$$r_1 = \frac{5}{3}a,\ r_2 = \frac{5}{4}a,\ r_3 = \frac{5}{4}a,\ r_4 = a \qquad ⑫$$

设电子在磁场中作匀速圆周运动的速率为 v，有洛仑兹力公式和牛顿第二定律有

$$evB = \frac{mv^2}{r} \qquad ⑬$$

由⑯式得

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{\sqrt{2mE_e}}{eB} \qquad ⑭$$

式中 E_e 是速率为 v 的电子的动能。由⑮⑰式可解出相应的 B_1、B_2、B_3、B_4 的大小为

$$B_1 = \frac{3}{5}\frac{\sqrt{2mE_e}}{ea},\ B_2 = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2mE_e}}{ea},\ B_3 = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2mE_e}}{ea},\ B_4 = \frac{\sqrt{2mE_e}}{ea} \qquad ⑮$$

当 $B = B_1$ 时，第 i 级释放的电子中只有最左边的被收集到；若 $B < B_1$，则一个电子都不会被收集。因此为使第 $i+1$ 倍增级能收集到电子，应当有 $B \geq B_1$。

当 $B = B_2 = B_3$ 时，所有电子都被第 $i+1$ 倍增级收集。

当 $B = B_4$ 时，第 i 倍增级释放的电子中只有最右边的被收集到；若 $B > B_4$，则一个电子都不会被收集。因此为使第 $i+1$ 倍增级能收集到电子，应当有 $B \leq B_4$。

因此，当

$$B=\frac{4}{5}\frac{\sqrt{2mE_{\mathrm{e}}}}{ea} \qquad ⑯$$

时收集到的电子最多；当

$$\frac{3}{5}\frac{\sqrt{2mE_{\mathrm{e}}}}{ea}\le B\le\frac{\sqrt{2mE_{\mathrm{e}}}}{ea} \qquad ⑰$$

时，会有电子被收集。

七、（1）（i）两杆 AB 和 BC 对于 A 点的转动惯量分别为

$$I_1=\frac{1}{3}ml^2 \qquad ①$$

$$I_2=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 \qquad ②$$

两杆固结在一起，因而两杆可视为一个刚体绕 A 点做定轴转动，总的转动惯量为

$$I=I_1+I_2=\frac{7}{6}ml^2 \qquad ③$$

撤去外力作用后，两杆所受到的重力相对于 A 点的总力矩为

$$M=\frac{1}{4}mgl+\frac{3}{4}mgl \qquad ④$$

两杆的角加速度相同，设为 α（以顺时针方向为正方向），则由刚体转动定理得

$$M=I\alpha \qquad ⑤$$

联立①②③④⑤式得，两杆的角加速度为

$$\alpha=\frac{6g}{7l} \qquad ⑥$$

（ii）考虑 AB 杆从初始位置到与水平线 AD 的夹角为 θ 位置这一过程，两杆重力势能的变化量为

$$\Delta E_p=-mg\frac{l}{2}\sin\theta-mg\frac{\sqrt{3}l}{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)-2\left(-mg\frac{l}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad ⑦$$

两杆动能的变化量为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}I\omega^2-0 \qquad ⑧$$

式中，ω 为 AB 杆与水平线 AD 的夹角为 θ 时绕 A 点转动的角速度。整个过程中机械能守恒定律

$$\Delta E_k+\Delta E_p=0 \qquad ⑨$$

联立③⑦⑧⑨式得

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{7l}\left(5\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2\sqrt{3}\right)} \qquad ⑩$$

（2）两杆在 B 点由光滑铰链连接，因而杆 AB 和 BC 不能整体视为一个刚体，其角加速度不相等，分别设为 α_1、α_2（以顺时针方向为正方向）；取 B 点为原点， x、y 轴正方向分别水平向右、

竖直向下，设 BC 杆对 AB 杆的作用力沿 x、y 轴的分量分别为 F_x、F_y。对于 AB 杆，相对于 A 点，由刚体转动定理得

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\alpha_1=\frac{1}{4}mgl+\frac{1}{2}F_yl-\frac{\sqrt{3}}{2}F_xl \qquad ⑪$$

对于 BC 杆，AB 杆对 BC 杆的作用力沿 x、y 轴的分量分别为 $-F_x$、$-F_y$，设 BC 杆质心的加速度沿 x、y 轴的分量分别为 a_x、a_y，由刚体质心运动定理得

$$ma_x=-F_x \qquad ⑫$$

$$ma_y=mg-F_y \qquad ⑬$$

BC 杆同时还绕其质心转动，由刚体转动定理得

$$\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\alpha_2=\frac{1}{4}F_yl+\frac{\sqrt{3}}{4}F_xl \qquad ⑭$$

两杆连接点 B 的加速度沿 x、y 轴的分量 a_{Bx}、a_{By} 为

$$a_{Bx}=-\frac{\sqrt{3}}{2}l\alpha_1=a_x-\frac{\sqrt{3}}{4}l\alpha_2 \qquad ⑮$$

$$a_{By}=\frac{1}{2}l\alpha_1=a_y-\frac{1}{4}l\alpha_2 \qquad ⑯$$

联立⑪⑫⑬⑭⑮⑯式得

$$\alpha_1=\frac{9g}{11l},\quad \alpha_2=\frac{15g}{11l} \qquad ⑰$$

$$F_x=\frac{3\sqrt{3}}{44}mg,\quad F_y=\frac{1}{4}mg \qquad ⑱$$

两杆间相互作用力的大小为

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\frac{\sqrt{37}}{22}mg\quad\approx 0.276mg \qquad ⑲$$

设 BC 杆对 AB 杆的作用力与竖直方向夹角为 ϕ，则

$$\tan\phi=\frac{F_x}{F_y}=\frac{3\sqrt{3}}{11}\quad\approx 0.472 \qquad ⑳$$

八、（1） 部分子 a、b 的动能分别为

$$E_{\mathrm{a}}=x_{\mathrm{a}}E,\quad E_{\mathrm{b}}=x_{\mathrm{b}}E \qquad ①$$

它们远大于其静能，所以部分子 a、b 的质量可忽略，其动量大小分别为

$$p_{\mathrm{a}}=\frac{E_{\mathrm{a}}}{c},\quad p_{\mathrm{b}}=-\frac{E_{\mathrm{b}}}{c} \qquad ②$$

负号表明部分子 a、b 的动量方向相反，在同一条直线上。部分子 a、b 对撞湮灭产生新粒子 S，根据能量守恒定律，S 的能量为

$$E_{\mathrm{S}} = E_{\mathrm{a}} + E_{\mathrm{b}} \qquad ③$$

根据动量守恒定律，S 的动量大小为

$$p_{\mathrm{S}} = p_{\mathrm{a}} + p_{\mathrm{b}} \qquad ④$$

由自由粒子的动量和能量关系有

$$E_{\mathrm{S}}^2 - p_{\mathrm{S}}^2 c^2 = m_{\mathrm{S}}^2 c^4 \qquad ⑤$$

由①②③④⑤式得

$$x_{\mathrm{a}} x_{\mathrm{b}} = \frac{m_{\mathrm{S}}^2 c^4}{4E^2} \qquad ⑥$$

由⑥式和题给数据得

$$x_{\mathrm{a}} x_{\mathrm{b}} = 0.0051 \qquad ⑦$$

（2）在新粒子 S 静止的参考系中，设 S 衰变成的两光子的频率分别为 ν_1 和 ν_2，它们的能量和动量大小分别为

$$E_1 = h\nu_1, \quad E_2 = h\nu_2 \qquad ⑧$$

$$p_1 = \frac{h\nu_1}{c}, \quad p_2 = -\frac{h\nu_2}{c} \qquad ⑨$$

负号表明两光子的动量方向相反，在同一条直线上。S 衰变前后能量和动量守恒，有

$$E_1 + E_2 = m_{\mathrm{S}} c^2 \qquad ⑩$$

$$p_1 + p_2 = 0 \qquad ⑪$$

由⑧⑨⑩⑪式得

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{m_{\mathrm{S}} c^2}{2h} \qquad ⑫$$

由⑫式和题给数据得

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{1.0\times10^{12}\times1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C\cdot V}}{2\times6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}} \approx 1.2\times10^{26}\,\mathrm{Hz} \qquad ⑬$$

（3）在 S 产生时静止的参照系中，对于 S 衰变到两个粒子 A 的过程，设两个粒子 A 的能量、动量大小分别为 E_{A1}、E_{A2} 和 p_{A1}、p_{A2}，由能量守恒定律 $m_{\mathrm{S}}c^2 = E_{\mathrm{A1}} + E_{\mathrm{A2}}$ 和动量守恒定律 $0 = p_{\mathrm{A1}} - p_{\mathrm{A2}}$，以及自由粒子的动量和能量关系

$$E_{\mathrm{Ai}}^2 = p_{\mathrm{Ai}}^2 c^2 + m_{\mathrm{A}}^2 c^4, \quad i = 1,2 \qquad ⑭$$

可知，每个粒子 A 的动量大小相等 $p_{\mathrm{A}} \equiv p_{\mathrm{A1}} = p_{\mathrm{A2}}$，因而每个粒子 A 的能量为

$$E_{\mathrm{A}} \equiv E_{\mathrm{A1}} = E_{\mathrm{A2}} = \frac{1}{2}(m_{\mathrm{S}}c^2) = 5.0\times10^2\ \mathrm{GeV} >> m_{\mathrm{A}}c^2 \qquad ⑮$$

在粒子 A 衰变到两个同频率光子的过程中，由能量守恒得

$$2h\nu = E_{\mathrm{A}} \qquad ⑯$$

式中ν是每个光子的频率。设两光子动量之间夹角为θ，由动量守恒定律知，在平行和垂直于粒子 A 运动方向上分别有

$$\begin{aligned}\frac{h\nu}{c}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{h\nu}{c}\cos\frac{\theta}{2} &= p_{\mathrm{A}}\\ \frac{h\nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{h\nu}{c}\sin\frac{\theta}{2} &= 0\end{aligned} \qquad ⑰$$

由⑭⑮⑯⑰式得

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{2m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{S}}}=0.0020<<1 \qquad ⑱$$

可见，两光子夹角非常小，利用$\sin\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta}{2}$，由⑱式得

$$\theta\approx\frac{4m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{S}}}=\frac{4\times1.0}{1.0\times10^3}=0.0040 \qquad ⑲$$