决赛试题及参考答案

理论部分

理论试题

可能用到的物理常量和公式：

真空中的光速 $c=2.998\times10^{8}$ m/s；

已知地球表面的重力加速度的大小为 g；

已知普朗克常量为 h，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$；

$\int\dfrac{1}{1-x^{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+C,\ |x|<1$。

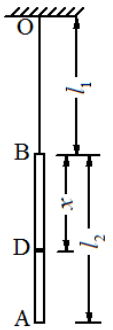
一、山西大同某煤矿相对于秦皇岛的高度为 h_{c}。质量为 m_{t} 的火车载有质量为 m_{c} 的煤，从大同沿大秦线铁路行驶路程 l 后到达秦皇岛，卸载后空车返回。从大同到秦皇岛的过程中，火车和煤总势能的一部分克服铁轨和空气阻力做功，其余部分由发电机转换成电能，平均转换效率为 η_1，电能被全部储存于蓄电池中以用于返程。空车在返程中由储存的电能驱动电动机克服重力和阻力做功，存储电能转化为对外做功的平均转换效率为 η_2。假设大秦线轨道上火车平均每运行单位距离克服阻力需要做的功与运行时（火车或火车和煤）总重量成正比，比例系数为常数 μ，火车由大同出发时携带的电能为零。

（1）若空车返回大同时还有剩余的电能，求该电能 E。

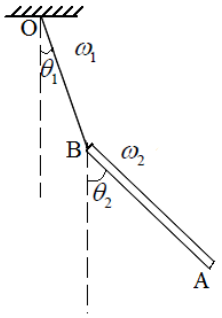
（2）问火车至少装载质量为多少的煤，才能在不另外提供能量的条件下刚好返回大同？

（3）已知火车在从大同到秦皇岛的铁轨上运行的平均速率为 v，请给出发电机的平均输出功率 P 与题给的其它物理量的关系。

二、如图 a，AB 为一根匀质细杆，质量为 m，长度为 l_2；杆上端 B 通过一不可伸长的软轻绳悬挂到固定点 O，绳长为 l_1。开始时绳和杆均静止下垂。此后所有运动均在同一竖直面内。



图a



图b

（1）现对杆上的 D 点沿水平方向施加一瞬时冲量 I，若在施加冲量后的瞬间，B 点绕悬点 O 转动的角速度和杆绕其质心转动的角速度相同，求 D 点到 B 点的距离 x 和 B 点绕悬点 O 转动的初始角速度 ω_0。

（2）设在某时刻，绳和杆与竖直方向的夹角分别为 θ_1 和 θ_2（如图 b 所示），绳绕固定点 O 和杆绕其质心转动的角速度分别为 ω_1 和 ω_2，求绳绕固定点 O 和杆绕其质心转动的角加速度 α_1 和 α_2。

三、3.（15 分）火星大气可视为仅由很稀薄的 CO_2 组成，此大气的摩尔质量记为 μ，且同一高度的大气可视为处于平衡态的理想气体。火星质量为 M_{m}（远大于火星大气总质量），半径为 R_{m}。假设火星大气的质量密度与距离火星表面的高度 h 的关系为

$$\rho(h)=\rho_0\left(1+\frac{h}{R_{\mathrm{m}}}\right)^{1-n},$$

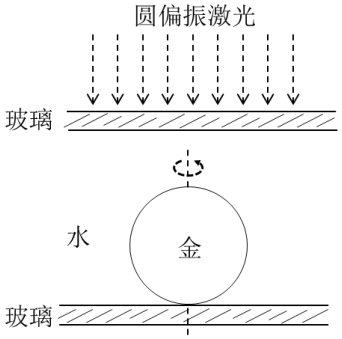
其中 ρ_0 为常量，n（$n>4$）为常数。

（1）求火星大气温度 $T(h)$ 随高度 h 变化的表达式。

（2）为了对火星表面进行探测，需将一质量为 m_t、质量密度较大的着陆器释放到火星表面。在某一远小于 R_{m} 的高度处将该着陆器由静止开始释放，经过时间 t_l，着陆器落到火星表面。在着陆器下降的过程中，着陆器没有转动，火星的重力加速度和大气密度均可视为与它们在火星表面的值相等。当着陆器下降速度大小为 v 时，它受到的大气阻力正比于大气密度和 v^2 的乘积，比例系数为常量 k。求着陆器在着陆前的瞬间速度的大小。

四、具有一定能量、动量的光子还具有角动量。圆偏振光的光子的角动量大小为 $\hbar$。光子被物体吸收后，光子的能量、动量和角动量就全部传给物体。物体吸收光子获得的角动量可以使物体转动。科学家利用这一原理，在连续的圆偏振激光照射下，实现了纳米颗粒的高速转动，获得了迄今为止液体环境中转速最高的微尺度转子。

如图，一金纳米球颗粒放置在两片水平光滑玻璃平板之间，并整体（包括玻璃平板）浸在水中。一束圆偏振激光从上往下照射到金纳米颗粒上。已知该束入射激光在真空中的波长 $\lambda=830\ \mathrm{nm}$，经显微物镜聚焦后（仍假设为平面波，每个光子具有沿传播方向的角动量 $\hbar$）光斑直径 $d=1.20\times10^{-6}\mathrm{m}$，功率 $P=20.0\ \mathrm{mW}$。金纳米球颗粒的半径 $R=100\ \mathrm{nm}$，金的密度 $\rho=19.32\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$。忽略光在介质界面上的反射以及玻璃、水对光的吸收等损失，仅从金纳米颗粒吸收光子获得角动量驱动其转动的角度分析下列问题（计算结果取 3 位有效数字）：



（1）求该束激光的频率 ν 和光强 I（在传播方向上单位横截面积所传输的功率）。

（2）给出金纳米球颗粒的质量 m 和它绕其对称轴的转动惯量 J 的值。

（3）假设颗粒对光的吸收截面（颗粒吸收的光功率与入射光强之比）为 $\sigma_{\mathrm{abs}}=0.123\,\pi R^2$，求该束激光作用在颗粒上沿旋转对称轴的力矩的大小 M。

（4）已知一个以角速度为 ω 旋转的球形颗粒（半径为 r）在粘滞系数为 η 的液体中受到的粘滞摩擦力矩大小为 $M_{\mathrm{f}}=8\pi\eta r^3\omega$。已知水的粘滞系数 $\eta=8.00\times10^{-4}\ \mathrm{Pa\cdot s}$，求金纳米球颗粒在此光束照射下达到稳定旋转时的转速（转数/秒）f。

（5）取光开始照到处于静止状态的金纳米颗粒的瞬间为计时零点 $t_0=0$，求在任意时刻 t（$t>0$）该颗粒转速的表达式 $f(t)$。

（6）若把入射激光束换成方波脉冲激光束，脉冲宽度为 T_1（此期间内光强仍为 I），脉冲之间的间歇时间为 T_2。取第一个脉冲的光开始照到颗粒的时刻为计时零点 $t_0=0$，求第 n 个完整脉冲周期（T_1+T_2）后的瞬间颗粒的转速 f_n 的表达式，并给出转速极限 $f_{n\to\infty}$ 的表达式。

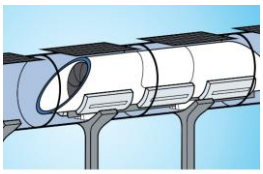
五、许多赛车上都装有可调节的导流翼片，可以为水平道路上的赛车提供竖直向上或向下的附加压力。如果赛车速度的大小为v，则上述压力的大小为$f_B=c_Bv^2$，c_B为一常量。当导流翼片的前方上翘时，压力方向向上；当导流翼片的后方上翘时，压力方向向下。赛车在运动过程中受到迎面空气的阻力，阻力大小为$f_A=c_Av^2$，c_A为一常量。已知赛车质量为m，轮胎与路面之间的静摩擦系数为μ_S（$\mu_S<1$）。



（1）赛车在水平直道上匀速行驶时，考虑到在运动过程中轮胎的形变，路面对赛车会形成阻力，阻力大小与车对路面的正压力大小成正比，比例系数为μ_R（$\mu_R<\mu_S$）。若导流翼片被调至前方上翘，求当赛车行驶速度大小为多大时，赛车发动机输出的功率最大？最大输出功率为多少？

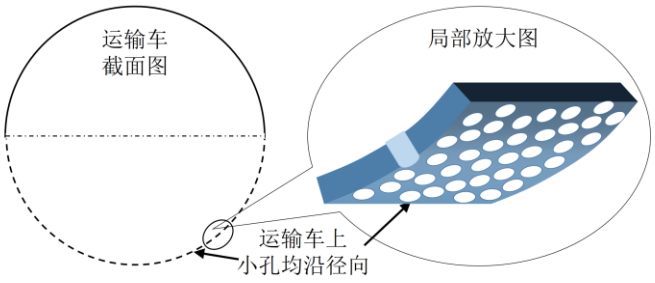
（2）不考虑赛车在运动过程中轮胎的形变所引起的地面阻力，求当赛车在水平地面内沿半径为r的圆形道路上匀速率行驶、且不沿路面发生滑动或飞离地面时所允许的速率最大值$v_{\max}$。在这种情况下，导流翼片应被调至前方上翘还是后方上翘，$v_{\max}$可以更大？假设赛车发动机输出的功率可以足够大。

六、Hyperloop 是一款利用胶囊状的运输车在水平管道中的快速运动来实现超高速运输的系统（见图 a）。它采用了“气垫”技术和“直线电动机”原理。



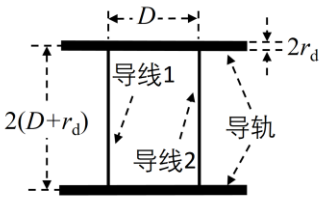
图a

“气垫”技术是将内部高压气体从水平放置的运输车下半部的细孔快速喷出（见图 b），以至于整个运输车被托离管壁非常小的距离，从而可忽略摩擦。运输车横截面是半径为R的圆，运输车下半部壁上均匀分布有沿径向的大量细孔，单位面积内细孔个数为n（$n>>1$），单个细孔面积为s。运输车长度为l，质量为M。气体的流动可认为遵从伯努利方程，且温度不变，细孔出口处气体的压强为较低的环境压强P_{low}。

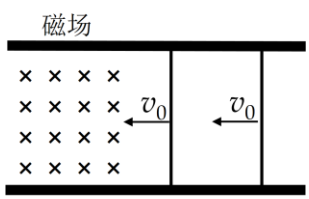


图b

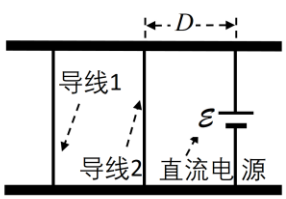
如图 c，在水平管道中固定有两条平行的水平光滑供电导轨（粗实线），运输车上固定有与导轨垂直的两根导线（细实线）；导轨横截面为圆形，半径为r_{d}，电阻率为ρ_{d}，两导轨轴线间距为$2(D+r_{\text{d}})$；两根导线的粗细可忽略，间距为D；每根导线电阻是长度为D的导轨电阻的 2 倍。两导线和导轨轴线均处于同一水平面内。导轨、导线电接触良好，且所有接触电阻均可忽略。



图c



图d



图e

（1）求内部高压气体压强 P 为多大时运输车才刚好能被托起？

（2）如图 d 所示，当运输车进站时，运输车以速度 v_0 沿水平光滑导轨滑进匀强磁场区域，磁场边界与导线平行，磁感应强度大小为 B，方向垂直于导轨-导线平面向下。当两根导线全都进入磁场后，求运输车滑动速度的大小。

（3）当运输车静止在水平光滑导轨上准备离站时，在导线 2 后间距为 D 处接通固定在导轨上电动势为 $\mathcal{E}$ 的恒压直流电源（如图 e 所示）。设电源体积及其所连导线的电阻可忽略，求刚接通电源时运输车的加速度大小。

已知某恒流闭合回路中的一圆柱形直导线段，电流沿横截面均匀分布，如图 f 所示，其在空间中距导线轴线距离为 r_0 的某点产生的磁感应强度方向垂直于此点和导线轴线构成的平面，大小可用下式近似计算

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)$$

其中 I 为电流，θ_1、θ_2 是此点与导线段轴线两端连线与导线轴线的夹角。

可能会用到的积分公式：

$$\int_a^b \frac{1}{x}\frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{b}{a}\frac{c+\sqrt{c^2+a^2}}{c+\sqrt{c^2+b^2}}\right)，\quad 其中\ a、b、c\ 均为正数。$$

七、爱因斯坦引力理论预言物质分布的变化会导致时空几何结构的波动——引力波。为简明起见，考虑沿 z 轴传播的平面引力波。对于任意给定的 z，在 x-y 二维空间中两个无限邻近点 (x,y) 和 $(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)$ 之间距离 $\mathrm{d}r$ 的表达式为

$$\mathrm{d}r=\sqrt{(1+f_1)(\mathrm{d}x)^2+f_2(\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}x)+(1-f_1)(\mathrm{d}y)^2}$$

引力波体现为 f_1 和 f_2 的变化（波动）。

（1）假设一列平面引力波传来时，f_1 和 f_2 可表示为

$$f_1=A\sin[\omega(t-\frac{z}{c})],\ f_2=0;\ 0<A<<1$$

式中，A 和 ω 分别是波的振幅和角频率，c 是引力波的传播速度（其值等于光速）。

（i）无引力波穿过时，在 x-y 平面上，在原点 O 处和与 O 点距离为 R、与 x 轴夹角为 θ 处各放置一个微探测器。求当所考虑的引力波穿过时，两个探测器之间的距离相对于 R 的偏离的近似表达式。

（ii）设无引力波穿过时，在 x-y 平面上，在以 R 为半径、原点 O 为圆心的圆周上放置了一个微探测器阵列。当前述引力波存在时，可将空间坐标重新定义为 (X,Y)，使得 X-Y 二维空间中邻近两点 (X,Y) 和 $(X+\mathrm{d}X,Y+\mathrm{d}Y)$ 距离为 $\sqrt{(\mathrm{d}X)^2+(\mathrm{d}Y)^2}$。求对于给定的时刻 t，微探测器阵列在新定义的坐标系中的分布形状。

（iii）若一列平面引力波

$$f_1=A\sin[\omega(t-\frac{z}{c})],\ f_2=0$$

和另一列平面引力波

$$f_1=A\sin[\omega(t-\frac{z}{c})+\phi],\ f_2=0，\ \phi(0\le\phi<2\pi)是常数$$

同时沿 z 轴正向传播，问 ϕ、θ 满足什么条件，可使引力波对原点 O 处和 x-y 二维空间中坐标为 $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ 的点处的两个微探测器之间距离的扰动的振幅达到最大或者最小?

（2）假定引力波的波源为双星系统。设该双星系统两星体质量均为 M 。取双星系统的质心为坐标原点 O'，双星系统在 x'-y' 二维空间中旋转。已知在特定条件下，f_1 和 f_2 可近似表示为

$$f_1=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[I_1(t-\frac{l}{c})\right],\quad f_2=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[I_2(t-\frac{l}{c})\right]$$

式中 G 为引力常量，l 为在 z' 轴上引力波探测点到 O' 点的距离（远大于双星系统中两星体之间的距离），而

$$I_1(t)=\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)\right]M,\quad I_2(t)=x_1'(t)y_2'(t)M$$

$(x_1'(t), y_1'(t))$、$(x_2'(t), y_2'(t))$ 为两星体在其质心系中的坐标（注:在这样的定义下，dr 表达中的系数应替换为 $f_1\to f_1$，$f_2\to 2f_2$ ）。已知该引力波的频率为 ω，假设引力波辐射对双星系统轨道运动的影响可忽略，求 f_1 和 f_2 在探测点处的振幅。

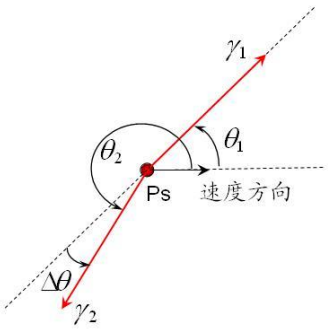
八、电子偶素原子（Ps）是由电子 e^- 与正电子 e^+（电子的反粒子，其质量与电子的相同，电荷与电子的大小相等、符号相反）组成的量子束缚体系，其能级可类比氢原子能级得出。根据玻尔氢原子理论，电子绕质子的圆周运动轨道角动量的取值是量子化的，即为 $\hbar$ 的整数倍。考虑到质子质量是有限的，氢原子量子化条件应修正为：电子与质子质心系中相对其质心的总轨道角动量取值为 $\hbar$ 的整数倍。这一量子化条件可直接推广到其它两体束缚体系，如电子偶素等。以下计算结果均保留四位有效数字。

（1）写出电子偶素基态能量。

（2）电子偶素基态原子不稳定，可很快发生湮没而生成两个光子：

$$\mathrm{Ps}\to\gamma_1+\gamma_2$$

当基态电子偶素原子相对于实验室参照系以远小于光速的某速度运动时发生湮没，在相对于该速度方向的偏角为 θ_1 的方向上观测到生成的一个光子 γ_1，同时在相对于光子 γ_1 速度反方向的偏角为 $\Delta\theta$ （ $\Delta\theta<<1$ ）的方向上观测到另一个光子 γ_2，如图所示。



（i）求基态电子偶素原子速度 v_0 的大小、两个光子 γ_1 和 γ_2 的能量 E_1 和 E_2 的表达式；并给出当 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$、$\Delta\theta=3.464\times10^{-3}$ 时 v_0、E_1 和 E_2 的值。

（ii）当基态电子偶素原子静止时，求两个光子 γ_1、γ_2 各自的能量 E_1、E_2 与单个自由电子静能之差。

（3）当基态电子偶素原子相对于实验室参照系以与光速 c 可比拟的速度 v_0 运动时湮没生成两个光子，求生成的两个光子 γ_1 和 γ_2 的能量 E_1 和 E_2、以及光子 γ_2 的运动方向相对于 v_0 的方向的偏角 θ_2（如图所示）与 θ_1 之间的关系式；并给出当 $v_0=\frac{c}{2}$、$\theta_1=\frac{\pi}{3}$ 时 E_1、E_2 和 θ_2 的值。

已知：氢原子基态能量 $E_{n=1}^{\mathrm{H}}=-13.60\ \mathrm{eV}$，电子质量 $m_{\mathrm{e}}=0.5110\ \mathrm{MeV}/c^2$，质子与电子的质量之比为1836。

理论试题参考解答

1.（1）火车和煤从大同到秦皇岛（去程）总的重力势能的改变的一部分用于火车在去程中克服阻力所做的功，另一部分驱动火车发电机发电。因而火车发电机的输入能量是

$$E_1=(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})g(h_{\mathrm{c}}-0)-\mu(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})gl \qquad ①$$

发电机发出的电能为

$$E_2=\eta_1 E_1 \qquad ②$$

设空车返程后剩余电能为 E，按题意，返程中给火车电动机输入的能量为 (E_2-E)，电动机输出的能量为

$$E_3=\eta_2(E_2-E) \qquad ③$$

E_3 用于火车返程中克服阻力和重力所做的功，故

$$E_3=\mu m_{\mathrm{t}}gl+m_{\mathrm{t}}g(h_{\mathrm{c}}-0) \qquad ④$$

联立①②③④式得

$$\begin{aligned}E&=\eta_1[(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})gh_{\mathrm{c}}-\mu(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})gl]-\frac{\mu m_{\mathrm{t}}gl+m_{\mathrm{t}}gh_{\mathrm{c}}}{\eta_2}\\&=\eta_1(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})g(h_{\mathrm{c}}-\mu l)-m_{\mathrm{t}}g\frac{h_{\mathrm{c}}+\mu l}{\eta_2}\end{aligned} \qquad ⑤$$

（2）由 $E_1\geq 0$ 可知阻力系数 μ 应满足 $\mu<h_{\mathrm{c}}/l$。据题意，如果火车能返回，则 $E\geq 0$，可得

$$m_{\mathrm{c}}\geq m_{\mathrm{cmin}}=\left(\frac{1}{\eta_1\eta_2}\frac{h_{\mathrm{c}}+\mu l}{h_{\mathrm{c}}-\mu l}-1\right)m_{\mathrm{t}} \qquad ⑥$$

⑥式右边即为装煤的最小值 m_{cmin}。

（3）运行时间为

$$t=\frac{l}{v} \qquad ⑦$$

利用①②式，发电机输出平均功率 P 为

$$P=\frac{E_2}{t}=\frac{\eta_1[(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})gh_{\mathrm{c}}-\mu(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})gl]}{t} \qquad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$P=\eta_1(m_{\mathrm{c}}+m_{\mathrm{t}})gv\left(\frac{h_{\mathrm{c}}}{l}-\mu\right) \qquad ⑨$$

2.（1）D 点与质心 C 距离为 $x-l_2/2$。设在冲量作用后的瞬间，质心平动速度大小为 v_{C}。B、C 点以同一角速度绕 O 点转动，B 点的速度大小 v_{B} 应满足

$$v_{\mathrm{B}}=\omega_0 l_1 \qquad ①$$

$$v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{C}} - \omega_0 \frac{l_2}{2} \qquad ②$$

由冲量定理得

$$I = mv_{\mathrm{C}} \qquad ③$$

由于冲量作用点不在质心，冲量 I 的冲量矩还引起杆绕质心的转动。由刚体转动定理得

$$\left(\frac{1}{12}ml_2^2\right)\omega_0 = I\left(x - \frac{l_2}{2}\right) \qquad ④$$

[或

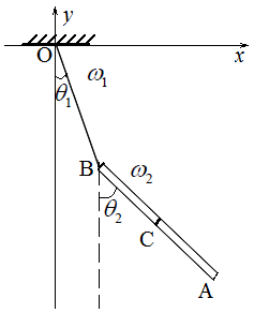
$$\left[\frac{1}{12}ml_2^2 + m\left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right)^2\right]\omega_0 = I\left(l_1 + x\right) \qquad ④ \quad]$$

联立①②③④式得

$$x = \left[\frac{1}{2} + \frac{l_2}{6(2l_1 + l_2)}\right] l_2 \qquad ⑤$$

$$\omega_0 = \frac{2I}{m\left(2l_1 + l_2\right)} \qquad ⑥$$

（2）如图，在 O、B、A 三点所在竖直平面内，以 O 为原点、水平向右的射线为 x 轴、竖直向上的射线为 y 轴，建立平面坐标系。杆的质心 C 的加速度 $(a_{\mathrm{C}x}, a_{\mathrm{C}y})$ 满足质心运动定理



$$ma_{\mathrm{C}x} = -T\sin\theta_1, \quad ma_{\mathrm{C}y} = -mg + T\cos\theta_1 \qquad ⑦$$

式中，T 是绳的张力的大小。同时，杆在绳张力 T 相对于杆的质心的力矩作用下绕质心转动，由转动定理得

$$\frac{1}{12}ml_2^2\alpha_2 = -T\frac{1}{2}l_2\sin(\theta_2 - \theta_1) \qquad ⑧$$

由几何关系得

$$x_{\mathrm{B}}(t) = x_{\mathrm{C}}(t) - \frac{1}{2}l_2\sin\theta_2(t), \quad y_{\mathrm{B}}(t) = y_{\mathrm{C}}(t) + \frac{1}{2}l_2\cos\theta_2(t) \qquad ⑨$$

将上式两边对时间 t 微商得，B 点的速度满足条件

$$v_{\mathrm{B}x}(t) = v_{\mathrm{C}x}(t) - \frac{1}{2}\omega_2(t)l_2\cos\theta_2(t), \quad v_{\mathrm{B}y}(t) = v_{\mathrm{C}y}(t) - \frac{1}{2}\omega_2(t)l_2\sin\theta_2(t) \qquad ⑩$$

将上式两边对时间 t 微商得，B 点的加速度满足条件

$$a_{\mathrm{B}x} = a_{\mathrm{C}x} - \frac{1}{2}\alpha_2 l_2\cos\theta_2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 l_2\sin\theta_2, \quad a_{\mathrm{B}y} = a_{\mathrm{C}y} - \frac{1}{2}\alpha_2 l_2\sin\theta_2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 l_2\cos\theta_2 \qquad ⑪$$

同时 B 点随不可伸长的绳绕 O 点做定轴转动，应有

$$x_{\mathrm{B}}(t) = l_1\sin\theta_1(t), \quad y_{\mathrm{B}}(t) = -l_1\cos\theta_1(t) \qquad ⑫$$

将上式两边对时间 t 微商得，B 点的速度还满足条件

$$v_{\mathrm{B}x}(t) = \omega_1(t)l_1\cos\theta_1(t), \quad v_{\mathrm{B}y}(t) = \omega_1(t)l_1\sin\theta_1(t) \qquad ⑬$$

将上式两边对时间t微商得，B 点的加速度还满足条件

$$a_{Bx}=\alpha_1 l_1\cos\theta_1-\omega_1^2 l_1\sin\theta_1,\quad a_{By}=\alpha_1 l_1\sin\theta_1+\omega_1^2 l_1\cos\theta_1 \qquad ⑭$$

【或避开 B 点，直接得 C 点的位置坐标

$$x_C(t)=l_1\sin\theta_1(t)+\frac{1}{2}l_2\sin\theta_2(t),\quad y_C(t)=-l_1\cos\theta_1(t)-\frac{1}{2}l_2\cos\theta_2(t)$$

$$\dot{x}_C(t)=l_1\dot{\theta}_1(t)\cos\theta_1(t)+\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2(t)\cos\theta_2(t),\quad \dot{y}_C(t)=l_1\dot{\theta}_1(t)\sin\theta_1(t)+\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2(t)\sin\theta_2(t)$$

$$a_{Cx}(t)=l_1\left(-\alpha_1\cos\theta_1+\omega_1{}^2\sin\theta_1\right)+\frac{1}{2}l_2\left(-\alpha_2\cos\theta_2+\omega_2{}^2\sin\theta_2\right),$$

$$a_{Cy}(t)=l_1\left(\alpha_1\sin\theta_1+\omega_1^2\cos\theta_1\right)+\frac{l_2}{2}\left(\alpha_2\sin\theta_2+\omega_2^2\cos\theta_2\right)$$

】

联立⑦⑧⑪⑭式，可解得绳绕悬点和杆绕质心的角加速度分别为

$$\alpha_1=-\frac{g\sin\theta_1+\sin(\theta_1-\theta_2)\left[3g\cos\theta_2+3l_1\omega_1^2\cos(\theta_1-\theta_2)+2l_2\omega_2^2\right]}{l_1\left[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)\right]},$$

$$\alpha_2=\frac{3\sin(\theta_1-\theta_2)\left[2g\cos\theta_1+2l_1\omega_1^2+l_2\omega_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]}{l_2\left[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)\right]} \qquad ⑮$$

3. (1) 在火星某高度h处的大气中划出一水平放置的薄盒子区域。该区域体积为V，其内部大气质量为M，压强为$P(h)$，温度为$T(h)$。由于盒子很薄，可认为气体的密度、压强、温度都是常量。由理想气体状态方程有

$$P(h)V=nRT(h) \qquad ①$$

盒子内部火星大气的体积为

$$V=\frac{M}{\rho(h)} \qquad ②$$

盒子内部火星大气的摩尔数为

$$n=\frac{M}{\mu} \qquad ③$$

由①②③式得

$$T(h)=\frac{P(h)\mu}{\rho(h)R} \qquad ④$$

现计算$P(h)$：

【解法 1】考虑高度为x到$x+dx$，所占立体角为$\Delta\Omega$的球冠状薄大气壳层；取$\Delta\Omega$很小，以至于球冠薄大气壳层的侧面上的径向直线可视为相互平行。由受力分析知

$$(P(x)+\mathrm{d}P)\cdot\Delta\Omega(R_m+x)^2+\rho(x)g(x)\cdot\Delta\Omega(R_m+x)^2\mathrm{d}x=P(x)\cdot\Delta\Omega(R_m+x)^2 \qquad ⑤$$

在⑤式中只保留到dx的一阶项，有

$$\mathrm{d}P=-\rho(x)g(x)\mathrm{d}x \qquad ⑥$$

在火星高度 h 处，重力加速度大小为

$$g(h)=\frac{GM_{\mathrm{m}}}{(R_{\mathrm{m}}+h)^2} \qquad ⑦$$

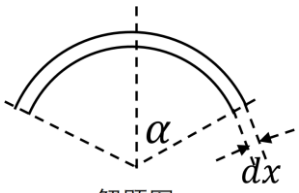
代入⑥式并积分得

$$P(h)=GM_{\mathrm{m}}\int_h^{\infty}\frac{\rho(x)}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}\mathrm{d}x \qquad ⑧$$

【解法 2】考虑高度为 x 到 $x+dx$，与火星中心张角为 α 的球冠状壳层，如解题图 a 所示。分析其在球冠中心轴方向的受力。设作用在上层球冠上的大气压力竖直向下的分力的大小为 $F_{1.1}$，壳层大气的重力的大小为 $F_{1.2}$，则

$$F_{1.1}=\int_0^{\alpha}2\pi(R_{\mathrm{m}}+x+\mathrm{d}x)^2\sin\theta[P(x)+\mathrm{d}P]\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$F_{1.2}=\int_0^{\alpha}\frac{GM_{\mathrm{m}}}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}2\pi(R_{\mathrm{m}}+x)^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}x\rho(x)\mathrm{d}\theta.$$



解题图a

式中，$P(x)$ 为 x 高度处的压强，$P(x)+\mathrm{d}P$ 为高度 $x+dx$ 处的压强。

设作用在下层球冠上的大气压力竖直向上的分力的大小为 $F_{2.1}$，

作用在边缘锥带上的大气压力竖直向上的分力的大小为 $F_{2.2}$，则

$$F_{2.1}=\int_0^{\alpha}2\pi(R_{\mathrm{m}}+x)^2\sin\theta P(x)\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$F_{2.2}=(R_{\mathrm{m}}+x)\sin\alpha\cdot 2\pi\mathrm{d}xP(x)\sin\alpha.$$

由竖直方向上受力平衡，得

$$F_{1.1}+F_{1.2}=F_{2.1}+F_{2.2} \qquad ⑤'$$

保留到 $\mathrm{d}x^1$ 项，得

$$\mathrm{d}P=-\rho(x)g(x)\mathrm{d}x \qquad ⑥'$$

因此有

$$P(h)=GM_{\mathrm{m}}\int_h^{\infty}\frac{\rho(x)}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}\mathrm{d}x \qquad ⑦'$$

将⑦式代入④式并利用题给大气密度表达式，积分得

$$T(h)=\frac{\mu GM_{\mathrm{m}}}{nR(R_{\mathrm{m}}+h)} \qquad ⑨$$

（2）以初始释放时刻为计时零点，设在时刻 t 着陆器高度为 $h(t)$，着陆器的速度和加速度大小分别为 $v(t)$ 和 $\dot{v}(t)$。设其受到的大气阻力为向上，大小为 F_a，

$$F_a=k\rho(h(t))v(t)^2 \qquad ⑩$$

忽略大气对着陆器的引力，着陆器受到的火星引力 F 为

$$F=\frac{GM_{\mathrm{m}}m_t}{(R_{\mathrm{m}}+h(t))^2} \qquad ⑪$$

由题意，可不考虑大气的浮力。根据牛顿第二定律有

$$F_a-F=m_t\dot{v}(t) \qquad ⑫$$

由⑨⑩⑪⑫式得

$$m_t\dot{v}(t)=k\rho_0(h(t))v^2(t)-\frac{GM_{\mathrm{m}}m_t}{(R_{\mathrm{m}}+h(t))^2} \qquad ⑬$$

由题意，密度和重力加速度可近似为火星表面的值，故⑬式可近似为

$$\dot{v}(t)=\frac{k\rho_0}{m_t}v(t)^2-\frac{GM_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{m}}{}^2} \qquad ⑭$$

积分得

$$v(t)=-\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{k\rho_0R_{\mathrm{m}}{}^2}}\tanh\left[\sqrt{\frac{k\rho_0GM_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{m}}{}^2m_{\mathrm{t}}}}(t+C)\right] \qquad ⑮$$

其中 C 为待定常数。由初始条件 $v(t=0)=0$ 可知， $C=0$ 。由此得，着陆器落到火星表面时相对于火星的速度为

$$v(t_l)=-\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{k\rho_0R_{\mathrm{m}}{}^2}}\tanh\left[\sqrt{\frac{k\rho_0GM_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{m}}{}^2m_{\mathrm{t}}}}t_l\right] \qquad ⑯$$

4.（1）该束激光的频率

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=3.61\times10^{14}\,\mathrm{Hz} \qquad ①$$

入射激光的强度

$$I=\frac{P}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}=1.77\times10^{10}\,\mathrm{W/m^2} \qquad ②$$

（2）金纳米球颗粒的质量

$$m=\frac{4}{3}\pi R^3\rho=8.09\times10^{-17}\,\mathrm{kg} \qquad ③$$

该颗粒绕其过球心的转轴的转动惯量

$$J=\frac{2mR^2}{5}=3.24\times10^{-31}\,\mathrm{kg\cdot m^2} \qquad ④$$

（3）金纳米球颗粒在 $\mathrm{d}t$ 时间内吸收的光的能量

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{abs}}=I\sigma_{\mathrm{abs}}\mathrm{d}t \qquad ⑤$$

一个光子的能量为 $h\nu$ ，因此金颗粒在 $\mathrm{d}t$ 时间内吸收的光子数

$$\mathrm{d}N=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{abs}}}{h\nu}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}\mathrm{d}t}{h\nu} \qquad ⑥$$

根据角动量守恒定律，一个光子被颗粒吸收后，将角动量 $\hbar$ 转移到颗粒上。在 $\mathrm{d}t$ 时间内，金颗粒总角动量的改变量

$$\mathrm{d}L=\hbar\mathrm{d}N=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}\mathrm{d}t}{2\pi\nu} \qquad ⑦$$

根据角动量定理，由光产生的扭转力矩大小为

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{2\pi\nu}=3.02\times10^{-20}\,\mathrm{N\cdot m} \qquad ⑧$$

（4）金纳米球颗粒的旋转达到稳定状态的条件是：作用在金纳米球颗粒上的合力矩为零，即光施加在颗粒上的力矩大小 M 与水施加在颗粒上的粘滞摩擦力矩大小 M_{f} 相等

$$M-M_{\mathrm{f}}=0 \qquad ⑨$$

由已知的摩擦力矩表达式与⑧⑨式得金纳米球颗粒达到稳定旋转时的转速

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{I\sigma_{\text{abs}}}{32\pi^3\eta R^3\nu}=2.39\times10^2\,\text{s}^{-1} \qquad ⑩$$

（5）根据刚体的定轴转动定理有

$$J\frac{d\omega}{dt}=M-M_{\text{f}} \qquad ⑪$$

由⑧式得

$$J\frac{d\omega}{dt}=\frac{I\sigma_{\text{abs}}}{2\pi\nu}-8\pi\eta R^3\omega \qquad ⑫$$

将④式代入⑫式，可得当金颗粒的旋转速率为ω时，其转动角速度的变化率满足

$$\frac{d\omega}{dt}=A\omega+B \qquad ⑬$$

其中

$$A=-\frac{20\pi\eta R}{m}\,,\quad B=\frac{5\sigma_{\text{abs}}}{4\pi mR^2\nu}I$$

⑬式可写为

$$\frac{d\omega}{A\omega+B}=dt$$

将上式两边从$t=0$到t积分得

$$\int_{t=0}^{t}\frac{d\omega}{A\omega+B}=\int_0^t dt' \qquad ⑭$$

此即

$$\ln\frac{A\omega+B}{B}=At$$

这里已经利用到初始条件$t=0$时$\omega=0$。上式可写为

$$\omega=\frac{B}{A}e^{At}-\frac{B}{A}$$

此即

$$f(t)=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{I\sigma_{\text{abs}}}{32\pi^3\eta R^3\nu}(1-e^{-\frac{20\pi\eta Rt}{m}}) \qquad ⑮$$

（6）对⑬式两边从t_1到t_2积分得

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\omega}{A\omega+B}=\int_{t_1}^{t_2}dt'$$

解为

$$\omega(t_2)=\omega(t_1)e^{A(t_2-t_1)}-\frac{B}{A}[1-e^{A(t_2-t_1)}]$$

式中，A是常量，B与I成正比（见前述表达式）。由此得

$$\omega(nT+T_1)=\omega(nT)e^{AT_1}-\frac{B}{A}(1-e^{AT_1}) \qquad ⑯$$

$$\omega[(n+1)T]=\omega(nT+T_1)e^{AT_2} \qquad ⑰$$

式中$T=T_1+T_2$。在方波脉冲激光照射下，颗粒在一个脉冲周期T中先做T_1时间的加速转动，在接下来T_2时间内做减速转动。于是

$$\omega[(n+1)T]=\omega(nT)e^{AT}-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1}) \qquad ⑱$$

式中$\omega_n\equiv\omega(nT)$。类似地有

$$\omega_n = \omega_{n-1}e^{A(T_1+T_2)} - \frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)$$

$$\omega_{n-1}e^{A(T_1+T_2)} = \omega_{n-2}e^{2A(T_1+T_2)} - \frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)e^{A(T_1+T_2)}$$

$$\omega_{n-2}e^{2A(T_1+T_2)} = \omega_{n-3}e^{3A(T_1+T_2)} - \frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)e^{2A(T_1+T_2)}$$

$$\vdots$$

$$\omega_1 e^{(n-1)A(T_1+T_2)} = \omega_0 e^{nA(T_1+T_2)} - \frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)e^{(n-1)A(T_1+T_2)}$$

其中 ω_0 表示第 1 个脉冲之前时刻颗粒的转速，即 $\omega_0 = 0$。将上列所有等式两边分别相加得

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = -\frac{B}{2\pi A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}\left(1-e^{nA(T_1+T_2)}\right) \qquad ⑲$$

【解法 2】由第⑱式递推公式推出通项公式也可归纳写出

$$\omega_n = -\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1}) + \omega_{n-1}e^{AT}$$

$$= -\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1}) + \left[-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1}) + \omega_{n-2}e^{AT}\right]e^{AT}$$

$$= -\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})\left(1+e^{AT}\right) + \omega_{n-2}e^{2AT} = \cdots$$

$$= -\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})\left(1+e^{AT}+\cdots+e^{(n-1)AT}\right) + \omega_0 e^{nAT}$$

$$= -\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})\frac{1-e^{nAT}}{1-e^{AT}} = -\frac{B}{A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}\left(1-e^{nA(T_1+T_2)}\right)$$

【解法 3】将第⑱式写成 $\omega_{n+1} = C\omega_n + D$，其中 $C = e^{AT}$，$D = -\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})$，此即 $\omega_{n+1} + \frac{D}{C-1} = C(\omega_n + \frac{D}{C-1})$。可见 $\left\{\omega_n + \frac{D}{C-1}\right\}$ 是公比为 C 的等比数列，所以通项公式为

$$\omega_n = (\omega_0 + \frac{D}{C-1})C^{n-1} - \frac{D}{C-1}$$

$$= \frac{D}{C-1}(C^{n-1}-1)$$

$$= -\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})\frac{e^{nAT}-1}{e^{AT}-1} = -\frac{B}{A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}(1-e^{nAT})$$

由此可见

$$f_{n+1} > f_n$$

当 $n \to \infty$ 时，f_n 的极限为

$$f_{n\to\infty} = -\frac{B}{2\pi A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}} = \frac{I\sigma_{\text{abs}}}{32\pi^3\eta R^3\nu}\frac{1-e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}{e^{\frac{20\pi\eta R}{m}T_2}-e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}} \qquad ⑳$$

5. （1）设在竖直方向上，车受到地面向上的支持力为 N。此方向上力的平衡给出

$$mg = N + c_B v^2 \qquad ①$$

赛车在水平直道上行驶，应有

$$N \geq 0$$

因而

$$v \le v_1 = \sqrt{\frac{mg}{c_B}} \qquad ②$$

记 F_p 为发动机产生的牵引力（通过赛车与地面之间的静摩擦力实现）大小，赛车匀速行驶的速度大小为 v 时，发动机功率 P 为

$$P = F_p v \qquad ③$$

由于赛车匀速行驶，在水平方向上牵引力与滚动摩擦力和空气阻力平衡

$$F_p = \mu_R N + c_A v^2 \qquad ④$$

赛车的拉力是通过地面静摩擦实现，因此应小于最大静摩擦力

$$F_p \le \mu_S N \qquad ⑤$$

由①④⑤式得，

$$v \le v_5 = \sqrt{\frac{(\mu_S - \mu_R)mg}{(\mu_S - \mu_R)c_B + c_A}} \qquad ⑥$$

比较②和⑥知，由于 $\mu_S > \mu_R$，$c_B > 0$，$c_A > 0$, 可知⑥是比②更强的约束，v 只需符合⑥即可。

由①③④式得，功率 P 可表示为 v 的下述函数

$$\begin{aligned} P &= \mu_R(mg - c_B v^2)v + c_A v^3 \\ &= (c_A - \mu_R c_B)v^3 + \mu_R mgv \end{aligned} \qquad ⑦$$

为从⑦式求出赛车速度大小满足条件②下功率 P 的最大值 $P_{\max}$，兹作如下讨论：

（A）如果 $c_A \ge \mu_R c_B$，则 P 是 v 的单调递增函数。当 v 取⑥式最大值 v_5 时，功率也取最大值

$$P_{\max} = c_A \mu_S \sqrt{(\mu_S - \mu_R)} \left(\frac{mg}{c_B(\mu_S - \mu_R) + c_A} \right)^{3/2} \qquad ⑧$$

（B）如果 $c_A < \mu_R c_B$，则 P 随着 v 先增大后减小。在暂不考虑条件⑥的情形下，将 P 的最大值所对应的速度记为 v_2。将⑦式对 v 求导并令其为零可求得 v_2，即

$$\left.\frac{dP}{dv}\right|_{v=v_2} = \mu_R mg - 3(\mu_R c_B - c_A)v_2^2 = 0$$

由上式得

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu_R mg}{3(\mu_R c_B - c_A)}} \qquad ⑨$$

现比较⑥⑨式，化简知可有如下两种情况：

（B1）如果 $\mu_R c_B > c_A \ge \frac{2\mu_R c_B}{3}\left[1 - \frac{\mu_R}{(3\mu_S - 2\mu_R)}\right]$，则 $v_5 < v_2$，则此时功率最大值仍在 v_5 处取值，最大功率 $P_{\max} = P(v_5)$ 仍由⑧式给出。

（B2）如果$c_A<\dfrac{2\mu_R c_B}{3}\left[1-\dfrac{\mu_R}{(3\mu_S-2\mu_R)}\right]$，则$v_5>v_2$，则此时功率最大值在$v_2$处取值，最大功率$P_{\max}$为

$$P_{\max}=P(v_2)=\frac{2\sqrt{3}(mg\mu_R)^{3/2}}{9\sqrt{(\mu_R c_B-c_A)}} \qquad ⑩$$

（2）设赛车做匀速圆周运动时的切向速度大小为v,地面提供的竖直向上的支持力为N'。在竖直方向上受力平衡给出

$$mg+\varepsilon c_B v^2=N' \qquad ⑪$$

其中当导流板后翘时$\varepsilon=1$，前翘时$\varepsilon=-1$。由$N'\geq 0$知，当$\varepsilon=-1$时，应有

$$v\leq\sqrt{\frac{mg}{c_B}} \qquad ⑫$$

设车在运动方向上受到发动机前向拉力为$F_{\parallel}$，它通过车与地面的静摩擦实现，而且大小与迎面空气阻力平衡，得

$$F_{\parallel}'=c_A v^2$$

车在水平面上做匀速圆周运动，地面静摩擦力沿径向的分量$F_{\perp}'$提供向心力

$$F_{\perp}'=\frac{mv^2}{r} \qquad ⑬$$

地面为赛车提供的总摩擦力不应大于最大静摩擦力$\mu_S N'$，因而

$$F_{\parallel}'^2+F_{\perp}'^2\leq\left(\mu_S N'\right)^2$$

将⑪⑬式代入上式得

$$av^4+bv^2+c\geq 0 \qquad ⑭$$

其中

$$a=c_B{}^2\mu_S^2-\frac{m^2}{r^2}-c_A^2,\ b=2\varepsilon mgc_B\mu_S^2,\ c=m^2g^2\mu_S^2>0$$

不等式⑭左边是v^2的一次或二次函数。下面分情况讨论满足⑭式的速度取值范围：

情况（A）：当$a=0$时，可知

情况（A.1）：如果$\varepsilon=1$，为使⑭式成立，显然任何速率v均适合，即

$$v_{\max}=\infty \qquad ⑮$$

情况（A.2）：如果$\varepsilon=-1$，则应有

$$v\leq\sqrt{\frac{mg}{2c_B}} \qquad ⑯$$

情况（B）：当$a\neq 0$时，记⑭式取等号时的两个根为$v_1{}^2$和$v_2{}^2$，有

$$v_1^{\,2}=-\frac{mg\mu_S}{\varepsilon c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}},\ v_2^{\,2}=-\frac{mg\mu_S}{\varepsilon c_B\mu_S-\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}. \qquad ⑰$$

为进一步求出有关速度的范围，需再分情况讨论：

情况（B1）：如果$a>0$，即$c_B\mu_S>\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}$，则⑭式左边为开口向上的$v^2$的二次函数，且$v_1^{\,2}\cdot v_2^{\,2}=c/a>0$

情况（B1.1）：如果$\varepsilon=1$，则

$v_2^{\,2}<v_1^{\,2}<0$，

即二次函数与横轴的交点都小于零。为使⑭式成立，显然任何速率v均适合，即

$v_{\max}=\infty$ ⑱

情况（B1.2）：如果$\varepsilon=-1$，则

$0<v_2^{\,2}<v_1^{\,2}$，

即二次函数与横轴的交点都大于零。为使⑭式成立，显然速率v应满足

$v\ge\sqrt{v_1^2}$ 或 $0\le v\le v_{\max}=\sqrt{v_2^2}$

前者不满足⑫式，后者满足要求，故

$$0\le v\le v_{\max}=\sqrt{v_2^2}=\sqrt{\frac{mg\mu_S}{c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}} \qquad ⑲$$

情况（B2）：如果$a<0$，则对$\varepsilon=\pm1$，都有

$v_1^{\,2}<0<v_2^{\,2}$

且⑭式左边为开口向下的v^2的二次函数，其与横轴的交点一个大于零，另一个小于零。为使⑭式成立，要求$0\le v^2\le v_2^2$，即

$$0\le v\le v_{\max}=\sqrt{v_2^2}=\sqrt{\frac{mg\mu_S}{-\varepsilon c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}} \qquad ⑳$$

总结各情况可知：

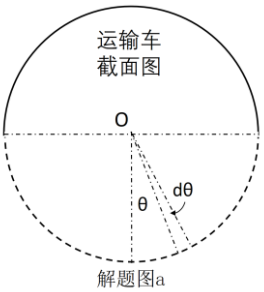
当导流板后翘时，如果$a<0$，满足要求的速率范围由⑳式取$\varepsilon=1$给出；其他情况时，满足要求的速率范围可以合并由⑱式给出。

当导流板前翘时，⑯⑲⑳各情况下对速度的要求可以合并为一个表达式，即满足要求的速率范围由⑲式给出。

因此，比较以上几种情况可知，无论在何种条件下，导流板后翘都要比前翘所允许的最大速度更大。

6. （1）对于每个喷气细孔，已知内、外压强分别为P、P_{low}，细孔内部气体流速为零，内外高度差可忽略。设细孔外部稳定流速设为v，对细孔内外对应流管应用伯努利方程可得

$$P = P_{\text{low}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad ①$$



解题图a

对于单个细孔，由喷射气体造成的垂直于细孔横截面（即沿径向）的有效推力大小为

$$f = -\frac{dm}{dt}v = \rho s v^2 = 2(P - P_{\text{low}})s \qquad ②$$

对运输车，细孔提供的净有效压强为

$$P_{\text{eff}} = \frac{f}{s} = 2(P - P_{\text{low}})$$

运输车在竖直方向上受重力和净有效压力作用。以横截面中心为原点，竖直向下为极轴方向建立极坐标，记极角为θ（见解题图 a）。因细孔面积很小，故可采用分离变量连续化的方法。此外，按题设，除细孔外其他车厢表面均受环境压强P_{low}，则极角为θ到$\theta + \mathrm{d}\theta$之间的运输车窄条提供的竖直向上的力为

$$\mathrm{d}N = P_{\text{eff}} nslR\mathrm{d}\theta\cos\theta$$

从 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 到 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 之间细孔提供的总的向上的力为

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_{\text{eff}} nslRd\theta\cos\theta = 2nslRP_{\text{eff}} = 4nslR\left(P - P_{\text{low}}\right) \qquad ③$$

为将运输车刚好托离管壁，在竖直方向上力的平衡给出

$$4nslR\left(P - P_{\text{low}}\right) = Mg \qquad ④$$

由此得

$$P = \frac{Mg}{4nslR} + P_{\text{low}} \qquad ⑤$$

(2) 设长度为D的导轨的电阻为R_1，运输车上每根导线电阻为$R_2 = 2R_1$，则有

$$R_1 = \rho_d \frac{D}{\pi r_d^2} \qquad ⑥$$

以导线 1（见题图 d）进入磁场的时刻为计时零点。设在导线 2 未进入磁场的某时刻t，导线速度为$v(t)$，切割磁力线产生的感应电动势为E为

$$E = B\cdot 2D\cdot v(t) \qquad ⑦$$

设I是通过的导线 1、2 和导轨构成的回路中的电流，由欧姆定律有

$$E = I(2R_2 + 2R_1) \qquad ⑧$$

导线 1 中的电流在磁场中受力应与回路运动方向相反。由牛顿定律有

$$-M\dot{v}(t) = I\cdot 2D\cdot B \qquad ⑨$$

联立⑥⑦⑧⑨式求解，并利用初始条件$v(t=0) = v_0$得

$$v(t)=v_0\exp\left(-\frac{2B^2D^2}{3MR_1}t\right) \qquad ⑩$$

设导线 2 到达磁场边界的时刻为t_1，应有

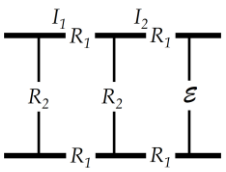
$$\int_0^{t_1}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}v_0\exp\left(-\frac{2B^2D^2}{3MR_1}t\right)\mathrm{d}t=D \qquad ⑪$$

由⑪式可得t_1，由⑩式可求得对应的速度v_1，此即导线 2 进入磁场后的滑行速度

$$t_1=-\frac{3MR_1}{2B^2D^2}\ln\left(1-\frac{2B^2D^3}{3MR_1v_0}\right),\quad v_1=v(t=t_1)=v_0-\frac{2\pi B^2D^2r_\mathrm{d}^2}{3M\rho_\mathrm{d}} \qquad ⑫$$

【若把电流近似为恰好通过导轨轴线，则⑦到⑩以及⑫式中 D 应写为 $D+r_\mathrm{d}$。】

（3）将滑轨上的电流（如等效电路图解题图 b 所示）记为I_1和I_2。由导线左右两侧的对称性可知两侧对应导轨段上的电流大小相同。对电源、导轨和导线 1 构成的回路，以及电源、导轨与导线 2 构成的回路根据欧姆定律有



解题图b

$$\begin{cases}(I_2-I_1)R_2+I_2(2R_1)=\mathcal{E},\\ I_1(R_2+2R_1)+I_2(2R_1)=\mathcal{E}.\end{cases} \qquad ⑬$$

联立⑥、⑬式解得

$$I_1=\frac{1}{10}\frac{\mathcal{E}}{R_1},\quad I_2=\frac{3}{10}\frac{\mathcal{E}}{R_1}。 \qquad ⑭$$

当导轨和电源线上通有电流时，就会在导线位置产生垂直于导轨-导线平面的磁场，而通电导线在这个磁场中会受到安培力的作用。为求安培力的大小，我们首先计算导轨和电源线在导线位置产生的磁场。由题给出

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)$$

由几何关系，一段导轨和紧邻、次紧邻的一段导线之间夹角分别满足

紧邻：　$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$，　$|\cos\theta_2|=\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}$

次紧邻：　$|\cos\theta_1|=\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}$，　$|\cos\theta_2|=\dfrac{2D}{\sqrt{r_0^2+4D^2}}$　　（*）

因此，一段导轨在紧邻和次紧邻导线位置产生的磁感应强度大小分别为

紧邻：　$|B_n|=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{r_0}\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}$

次紧邻：　$|B_{nn}|=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{r_0}\left(\dfrac{2D}{\sqrt{r_0^2+4D^2}}-\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}\right)$　　⑮

由安培力公式，紧邻、次紧邻的导轨产生的磁场对电流为I_c的导线的安培力为沿导轨方向，大小为

紧邻：$F=\int_{r_d}^{2D+r_d}|B_n|I_c dr_0=\int_{r_d}^{2D+r_d}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot I_c}{r_0}\frac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}dr_0=\frac{\mu_0 I\cdot I_c}{4\pi}\Pi_n$，

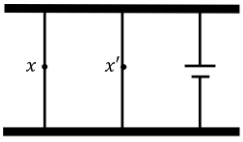
次紧邻：$F=\int_{r_d}^{2D+r_d}|B_{nn}|I_c dr_0=\int_{r_d}^{2D+r_d}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot I_c}{r_0}\left(\frac{2D}{\sqrt{r_0^2+4D^2}}-\frac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}\right)dr_0=\frac{\mu_0 I\cdot I_c}{4\pi}(\Pi_{nn}-\Pi_n)$，⑯

其中在积分中使用了题给公式有

$$\Pi_n=\ln\left(\frac{2D+r_d}{r_d}\frac{D+\sqrt{D^2+r_d{}^2}}{D+\sqrt{D^2+(2D+r_d)^2}}\right),\Pi_{nn}=\ln\left(\frac{2D+r_d}{r_d}\frac{2D+\sqrt{4D^2+r_d{}^2}}{2D+\sqrt{4D^2+(2D+r_d)^2}}\right)$$

对导线 1，其上电流为I_1，同侧与之紧邻的一段导轨上的电流为I_1，与之次紧邻的一段导轨上的电流为I_2；对导线 2，其上电流为I_2-I_1，同侧与之紧邻的两段导轨上的电流为I_1和I_2。由题意知，电动势$\mathcal{E}$上端为正，两侧导轨对导线 1 和 2 所施加的安培力均为向左。可得导线 1 和 2 受到导轨的总安培力F_{1G}和F_{2G}大小分别为：

$$|F_{1G}|=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[I_1\Pi_n+I_2(\Pi_{nn}-\Pi_n)\right],$$
$$|F_{2G}|=\frac{\mu_0(I_2-I_1)}{2\pi}(I_2+I_1)\Pi_n.$$ ⑰



解题图c

其次，电源所接导线在导线 1 上x点和导线 2 上x'点（见解题图 c）产生的垂直于导线的磁感应强度B_1和B_2大小为

$$|B_1|=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2}{2D}\left(\frac{2D-x}{\sqrt{(2D-x)^2+(2D)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+(2D)^2}}\right),$$
$$|B_2|=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2}{D}\left(\frac{2D-x'}{\sqrt{(2D-x)^2+D^2}}+\frac{x'}{\sqrt{x^2+D^2}}\right).$$ ⑱

由左手定则可知，电源所接导线对固定在运输车上的导线 1 和导线 2 的安培力$F_{1\varepsilon}$和$F_{2\varepsilon}$方向向左；由安培力公式得，$F_{1\varepsilon}$和$F_{2\varepsilon}$的大小为

$$|F_{1\varepsilon}|=\int_0^{2D}I_1\cdot|B_1(x)|dx=\frac{1}{2\pi}\mu_0 I_1 I_2(\sqrt{2}-1),$$
$$|F_{2\varepsilon}|=\int_0^{2D}(I_2-I_1)\cdot|B_2(x)|dx=\frac{1}{2\pi}\mu_0(I_2-I_1)I_2(\sqrt{5}-1).$$ ⑲

导线产生的磁场对彼此之间的力属于系统内力，不会引起整体加速度，可不予考虑。

由⑰⑲式可求得导线 1 和 2 所受总安培力F_{total}

$$F_{\text{total}}=|F_{1G}|+|F_{2G}|+|F_{1\varepsilon}|+|F_{2\varepsilon}|$$
$$=\frac{3\mu_0\mathcal{E}^2}{200\pi R_1^2 D}\left(2\Pi_n+\Pi_{nn}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3\right)$$

由牛顿第二定律得，总安培力 F_{total} 为运输车提供的加速度大小为

$$a=\frac{F_{\text{total}}}{M}$$
$$=\frac{3\pi\mu_0 r_d^4\mathcal{E}^2}{200(\rho_d D)^2 M}\left[\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3+\ln\left(\frac{(2D+r_d)^3}{r_d^{\,3}}\frac{\left(D+\sqrt{D^2+r_d^{\,2}}\right)^2}{\left(D+\sqrt{D^2+(2D+r_d)^2}\right)^2}\frac{2D+\sqrt{4D^2+r_d^{\,2}}}{2D+\sqrt{4D^2+(2D+r_d)^2}}\right)\right]. \quad ⑳$$

7. （1）（i）当引力波穿过时，在原点附近， x-y 平面上两临近点 (x,y) 和 $(x+dx,y+dy)$ 之间的距离 dr 满足

$$dr=\sqrt{(1+A\sin\omega t)(dx)^2+(1-A\sin\omega t)(dy)^2} \quad ①$$

在没有引力波的情形下， (x,y) 可用极坐标 (ρ,θ) 表示

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta \quad ②$$

于是当引力波穿过时，对固定的 θ 方向，有

$$\begin{aligned}dr&=\sqrt{(1+A\sin\omega t)\cos^2\theta+(1-A\sin\omega t)\sin^2\theta}\,d\rho\\&=\sqrt{1+A\sin\omega t(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,d\rho\\&=\sqrt{1+A\sin\omega t\cos 2\theta}\,d\rho\end{aligned} \quad ③$$

在与 x 轴夹角为 θ 方向上，两个微探测器之间的距离为

$$D=R\sqrt{1+A\sin\omega t\cos 2\theta} \quad ④$$

由引力波的振幅 $A<<1$ 得

$$D=R(1+\frac{1}{2}A\cos 2\theta\sin\omega t) \quad ⑤$$

两个微探测器之间的距离相对于 R 的偏离为

$$D-R=R\left(\frac{1}{2}A\cos 2\theta\right)\sin\omega t \quad ⑥$$

这是在 R 附近的振幅为 $\frac{1}{2}RA\cos 2\theta$ 、角频率为 ω 的简谐振动。

（ii）无引力波穿过时，微探测器阵列分布在 x-y 平面上以 R 为半径、原点为圆心的圆周上

$$x^2+y^2=R^2 \quad ⑦$$

引力波穿过原点时，系数 f_1 和 f_2 产生了变化；为了使时空形式上成为平直的，可定义

$$X=\sqrt{1+A\sin\omega t}\,x,\ Y=\sqrt{1-A\sin\omega t}\,y \quad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$\frac{X^2}{[R\sqrt{1+A\sin\omega t}]^2}+\frac{Y^2}{[R\sqrt{1-A\sin\omega t}]^2}=1 \quad ⑨$$

得到以下方程也视为正确

$$\frac{X^2}{[R(1+\frac{1}{2}A\sin\omega t)]^2}+\frac{Y^2}{[R(1-\frac{1}{2}A\sin\omega t)]^2}=1$$

因此，对于给定的时刻t，微探测器阵列分布在如⑨式所示的椭圆上；该椭圆的长轴和短轴的长度是随时间而变的。

（iii）在$z=0$处两列波发生干涉，合成结果为

$$A_{\text{tot}}\sin(\omega_{\text{tot}}t+\Phi)=A\sin\omega t+A\sin(\omega t+\phi) \qquad ⑩$$

它相当于振幅为A_{tot}、频率为ω_{tot}的一列引力波在$z=0$处产生的扰动，而Φ与时间t无关。由三角函数和差化积公式，⑩式右端可写为

$$2A\cos\frac{\phi}{2}\sin(\omega t+\frac{\phi}{2}) \qquad ⑪$$

此时，由第（1）（i）问结果可知，两个微探测器距离的扰动为

$$\Delta r=D-R=\left(AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta\right)\sin(\omega t+\frac{\phi}{2}) \qquad ⑫$$

两微探测器距离的扰动幅度最小为

$$AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta=0$$

解为

$$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}，\ \phi\text{任意；或}\theta\text{任意，}\ \phi=\pi. \qquad ⑬$$

（或：$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{4}$，$\phi$ 任意；或θ任意，$\phi=(2k+1)\pi$）

两微探测器距离的扰动幅度最大为

$$\left|AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta\right|=AR$$

解为

$$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}，\ \text{且}\phi=0 \qquad ⑭$$

（注：答$\theta=\frac{k\pi}{2}$且$\phi=2k\pi$也正确）

（2）双星系统质量相等，因此系统质心与两星体距离相等，即为$\frac{L}{2}$。假设在$t=0$时刻，两星体在其质心系中的坐标可近似为

$$x_1'(0)=\frac{L}{2},y_1'(0)=0;\ x_2'(0)=-\frac{L}{2},y_2'(0)=0 \qquad ⑮$$

在任意时刻t，两组坐标值可表示为

$$x_1'(t)=\frac{L}{2}\cos\Omega t,\qquad y_1'(t)=\frac{L}{2}\sin\Omega t;$$
$$x_2'(t)=-\frac{L}{2}\cos\Omega t,\quad y_2'(t)=-\frac{L}{2}\sin\Omega t. \tag{16}$$

代入题给 I_1、I_2 的表达式得

$$I_1(t)=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{d^2}{dt^2}M\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)\right]=-\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\cos 2\Omega t$$
$$I_2(t)=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{d^2}{dt^2}\left[x_1'(t)y_2'(t)\right]=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\sin 2\Omega t$$

于是得到引力波在到双星系统质心的距离为 l 处的表达式为

$$f_1=-\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\cos 2\Omega(t-\frac{l}{c}),$$
$$f_2=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\sin 2\Omega(t-\frac{l}{c}). \tag{17}$$

由⑰式可知，f_1, f_2 的振幅分别为 $\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}$，$\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}$；双星系统的角频率 Ω 是引力波频率 ω 的一半即 $\Omega=\frac{\omega}{2}$。应用牛顿万有引力定律和牛顿第二定律有

$$G\frac{M^2}{L^2}=M\Omega^2\frac{L}{2}=M\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\frac{L}{2} \tag{18}$$

由⑱式得，两星体之间的距离为

$$L=2\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \tag{19}$$

将上式代入引力波的振幅表达式 $\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}$，$\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}$，可得引力波 f_1, f_2 的振幅为

$$\frac{16\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3},\frac{8\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3} \tag{20}$$

8. （1）考虑氢原子的基态。设电子相对于质子的距离为 r，相对于质子的速度大小为 v，则在 p-e$^-$ 体系质心系中，质子、电子各自的运动方程为

$$k\frac{e^2}{r^2}=m_i\frac{v_i^2}{r_i}=\mu_{\mathrm{H}}\frac{v^2}{r},\ i=\mathrm{p},\mathrm{e}^-;\qquad \mu_{\mathrm{H}}=\frac{m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{e}}} \tag{①}$$

式中 m_{p}、m_{e} 分别是质子、电子的质量，而 r_{p}、r_{e} 和 v_{p}、v_{e} 分别为质子、电子相对于质心的距离和速度大小

$$r_{\mathrm{p}}=\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{e}}}r,\qquad r_{\mathrm{e}}=\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{e}}}r$$
$$v_{\mathrm{p}}=\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{e}}}v,\qquad v_{\mathrm{e}}=\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{e}}}v$$

e 是质子电荷，而 μ_{H} 被称为 p-e$^-$ 体系的约化质量。利用考虑到质子质量有限性的氢原子量子化条件，质心系轨道总角动量为

$$L = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 = \mu_{\mathrm{H}} v r = n\frac{h}{2\pi},\ \ n = 1, 2, \cdots \qquad ②$$

式中 n 是氢原子能级量子数。氢原子的基态（$n=1$）能为

$$E_{n=1}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}\mu_{\mathrm{H}} v^2 - \frac{ke^2}{r} = -\mu_{\mathrm{H}}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{\left(ke^2\right)^2}{2} \qquad ③$$

可见，氢原子基态能正比于其约化质量 μ_{H}。e$^+$-e$^-$ 体系的约化质量为 $\mu_{\mathrm{Ps}} = m_{\mathrm{e}}/2$。类比③式，利用题给数据，电子偶素（Ps）原子基态（$n=1$）能量为

$$\begin{aligned} E_{n=1}^{\mathrm{Ps}} &= -\mu_{\mathrm{Ps}}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{\left(ke^2\right)^2}{2} = \frac{\mu_{\mathrm{Ps}}}{\mu_{\mathrm{H}}} E_{n=1}^{\mathrm{H}} = \frac{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}}{2m_{\mathrm{p}}} E_{n=1}^{\mathrm{H}}, \qquad ④ \\ &= -\frac{1}{2}\times\frac{1837}{1836}\times 13.60\ \mathrm{eV} \approx -6.804\ \mathrm{eV} \end{aligned}$$

（2）(i) Ps 的静质量 m_{Ps} 为

$$m_{\mathrm{Ps}} = 2m_{\mathrm{e}} + \frac{E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}}{c^2} \approx 2m_{\mathrm{e}} \qquad ⑤$$

这里利用了 $E_{n=1}^{\mathrm{Ps}} << m_{\mathrm{e}}c^2$（见④式）。设电子偶素（Ps）基态原子相对实验室参照系以速度 v_0（$v_0 << c$）运动时发生湮没而生成两个光子 γ_1 和 γ_2。湮没前后体系的能量和动量守恒

$$2m_{\mathrm{e}}c^2 = E_1 + E_2 \qquad ⑥$$

$$2m_{\mathrm{e}}v_0 = p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 \qquad ⑦$$

$$0 = p_1\sin\theta_1 + p_2\sin\theta_2 \qquad ⑧$$

式中是，p_1 和 p_2 是两光子 γ_1 和 γ_2 动量的大小，它们分别满足

$$E_1 = p_1 c,\ \ E_2 = p_2 c \qquad ⑨$$

由⑥⑦⑧⑨式得

$$E_1 = m_{\mathrm{e}}c^2\left(1 + \frac{v_0}{c}\cos\theta_1\right) \qquad ⑩$$

$$E_2 = m_{\mathrm{e}}c^2\left(1 - \frac{v_0}{c}\cos\theta_1\right) \qquad ⑪$$

$$v_0 = \frac{\Delta\theta}{2\sin\theta_1}c \qquad ⑫$$

⑫式中 $\Delta\theta = \theta_2 - (\theta_1 + \pi)$，推导中已应用了 $\Delta\theta << 1$（若 $v_0 = 0$，则 $\Delta\theta = 0$；故当 $v_0 << c$ 时，应有 $\Delta\theta \propto \frac{v_0}{c} << 1$）。利用题给数据 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$，$\Delta\theta = 3.462\times10^{-3}$，由⑩⑪⑫式得

$$\begin{aligned} &v_0 = 2.000\times10^{-3}c = 5.996\times10^5\ \mathrm{m/s}, \\ &E_1 = 0.5115\mathrm{MeV}, \qquad ⑬ \\ &E_2 = 0.5105\mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

(ii) 由⑤式与⑩⑪两等式（不是约等于的结果）得

$$E_{1,2} = \frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2} = m_{\mathrm{e}}c^2 + \frac{E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}}{2}$$

于是由上式和④式得

$$\Delta E = E_{1,2} - m_{\mathrm{e}}c^2 = \frac{E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}}{2} = -3.402\ \mathrm{eV} \qquad ⑭$$

（3）基态电子偶素原子（Ps）以速度 $v_0 = c/2$ 运行时发生湮没，设湮没生成的两光子 γ_1 和 γ_2 的动量大小分别为 p_1 和 p_2，光子 γ_1 的运行方向相对于基态原子 Ps 动量的方向的夹角为 θ_1，光子 γ_2 的运行方向相对于 Ps 基态的动量的方向的夹角为 θ_2。湮没前后能量和动量守恒，有

$$\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = E_1 + E_2 \qquad ⑮$$

$$p_{\mathrm{Ps}} = \frac{m_{\mathrm{Ps}}v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 \qquad ⑯$$

两光子 γ_1 和 γ_2 的的能量和动量仍满足⑧⑨式，联立⑧⑨⑮⑯式得

$$E_1 = \frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \frac{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-\frac{v_0}{c}\cos\theta_1} \qquad ⑰$$

$$E_2 = \frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \frac{1-2\frac{v_0}{c}\cos\theta_1+\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-\frac{v_0}{c}\cos\theta_1} \qquad ⑱$$

$$\sin\theta_2 = -\frac{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-2\frac{v_0}{c}\cos\theta_1+\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}\sin\theta_1 \quad 或 \quad \sin\theta_1 = -\frac{1-2\frac{v_0}{c}\cos\theta_1+\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}\sin\theta_2 \qquad ⑲$$

将题给数据 $v_0 = \frac{c}{2}$、$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ 以及⑤式代入⑰⑱⑲式得

$$E_1 = E_2 = 0.5900\ \mathrm{MeV},\ \theta_2 = \frac{5\pi}{3}. \qquad ⑳$$

⑲式的另一解 $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$ 与⑯式矛盾，已舍去。