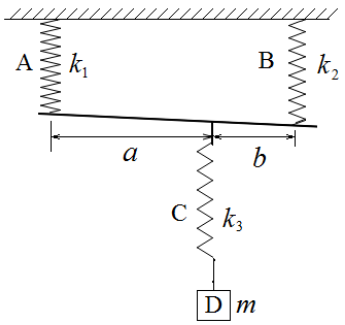
第 32 届全国中学生物理竞赛决赛试题及参考答案

理论试题

本试卷可能需要用到下列公式：

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x}=\ln\frac{x_2}{x_1}\,;\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C\,;\quad \ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2},\ \text{当}|x|<<1\text{。}$$

一、一轻杆通过分别连在其两端的轻质弹簧 A 和 B 悬挂在天花板下，一物块 D 通过轻质弹簧 C 连在轻杆上；A、B 和 C 的劲度系数分别为 k_1、k_2 和 k_3，D 的质量为 m，C 与轻杆的连接点到 A 和 B 的水平距离分别为 a 和 b；整个系统的平衡时，轻杆接近水平，如图所示。假设物块 D 在竖直方向做微小振动，A、B 始终可视为竖直，忽略空气阻力。



（1）求系统处于平衡位置时各弹簧相对于各自原长的伸长；

（2）求物块 D 上下微小振动的固有频率；

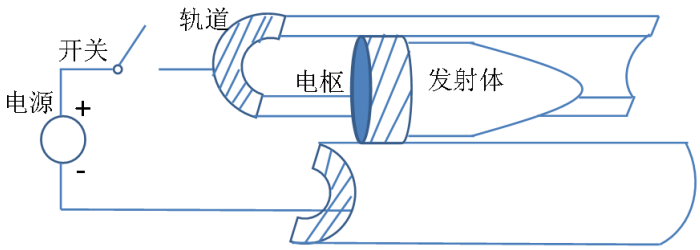
（3）当 a 和 b 满足什么条件时，物块 D 的固有频率最大？并求出该固有频率的最大值。

二、如图，轨道型电磁发射器是由两条平行固定长直刚性金属导轨、高功率电源、接触导电性能良好的电枢和发射体等构成。电流从电流源输出，经过导轨、电枢和另一条导轨构成闭合回路，在空间中激发磁场。载流电枢在安培力作用下加速，推动发射体前进。已知电枢质量为 m_s，发射体质量为 m_a；电枢每向前行进单位长度整个回路的电阻和电感的增加量分别为 R_r' 和 L_r'；电枢引入的电阻和电感分别为 R_s 和 L_s；回路连线引入的电阻和电感分别为 R_0 和 L_0。导轨与电枢间摩擦以及空气阻力可忽略。

（1）试画出轨道型电磁发射器的等效电路图，并给出回路方程；

（2）求发射体在导轨中运动加速度的大小与回路电流的关系；

（3）设回路电流为恒流（平顶脉冲电流）、电枢和发射体的总质量为 $m_s+m_a=0.50$ kg、导轨长度为 $x_{sm}=500$ m、导轨上每单位长度电感增加量 $L_r'=1.0$ μH/m，若发射体开始时静止，出口速度为 $v_{sm}=3.0\times10^3$ m/s，求回路电流 I 和加速时间 τ。



三、俄国火箭专家齐奥尔科夫斯基将火箭发射过程进行模型简化，得出了最早的理想火箭方程，为近代火箭、导弹工程提供了理论依据。该简化模型为：待发射火箭静止于惯性参考系 S 中的某点，忽略火箭所受的地球引力等外力的作用，火箭（包含燃料）的初始静止质量为 M_i；在 $t=0$ 时刻点火，火箭向左排出气体，气体相对于火箭的速度恒为 V_e，使得火箭向右发射。在 S 系中观测，火箭的速度为 V_1，排出气体的速度为 V_2，如图所示。根据此模型，火箭运行一段时间后，当其静止质量由 M_i 变为 M 时，

（1）用牛顿力学推导火箭所获得的速度 V_1 与质量比 M/M_i 之间的关系；

（2）用狭义相对论力学推导火箭所获得的速度 V_1 与质量比 M/M_i 之间的关系；

（3）当V_1远小于真空中的光速c时，计算以上两种结果之差，保留至$(V_1/c)^2$项。



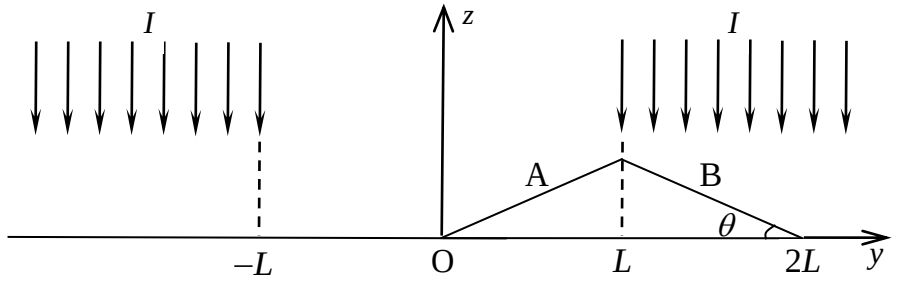
四、光在物体表面反射或者被吸收时，光子将其动量传给物体，产生光的辐射压力（光压）。利用光压，可实现对某些微小粒子的精确操控（光镊）。设在$|y|\geq L$的区域有一匀强激光场，沿z轴的负方向入射，其强度（单位时间内通过单位横截面积的光能）为I；在$y\in(-L,L)$之间没有光场，其横截面如图所示。一个密度为ρ的三棱柱形小物体（其横截面是底边长为$2L$、底角为θ的等腰三角形）被置于光滑的水平面xy上，其朝上的A和B两面涂有特殊反射层，能完全反射入射光。小物体初始时静止，位置如图。

（1）假定光子的反射角等于入射角，且反射前后光子的频率不变。试求：

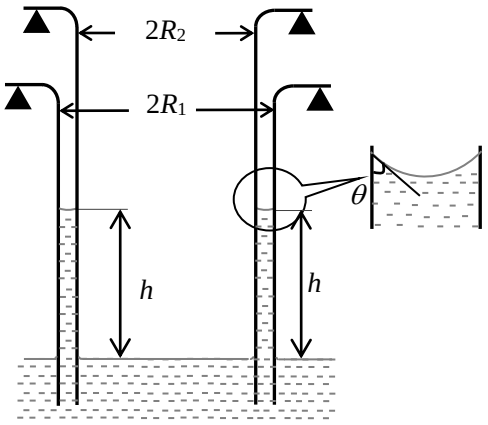
（a）小物体在受到激光场照射后的动力学方程；

（b）小物体从初始位置向y轴负方向移动$3L/2$的距离所需的时间；

（2）若考虑小物体运动对反射光子频率的影响，反射光子频率会有微小的变化；在小物体从初始位置向y轴负方向移动到距离为$3L/2$的过程中，定性比较反射光子与入射光子频率的大小及其随时间的变化。



五、如图，一个上端固定、内半径为R_1的玻璃圆筒底部浸没在大容器中的水面之下，未与容器底接触；将另一个外半径为R_2（R_2略小于R_1）的同质玻璃制成的圆筒（上端固定）放置其中，不接触容器底，保持两玻璃圆筒的中轴线重合且竖直。设水与玻璃之间的接触角为θ（即气-液界面在水的最高处的切线与固-液界面的夹角，见局部放大图）。已知水的密度和表面张力系数分别为ρ和α，地面重力加速度的大小为g。



（1）在毛细现象中，系统毛细作用引起的势能变化，可以等效地看作固-液-气分界线上液体表面张力在液面上升或下降过程中做的功。试证：以大容器中的水面处为系统势能零点，则当水由于毛细作用上升高度为h时，系统毛细作用的势能为

$$E_s(h)=-2\pi\alpha\cos\theta(R_1+R_2)h;$$

（2）试导出系统在水由于毛细作用上升的过程中释放的热量；

（3）如果在超万米高空飞机中短时间内做此实验，飞机可视为做匀速直线运动。测得该系统在同样过程中放出的热量为Q，试估计此时飞机距离地面高度。假定该飞机内水的表面张力系数和接触角与地面情形相同。

以上计算不考虑地球自转。

六、太阳系内行星的公转方向是基本相同的。地球上的观测者所看到的行星位置实际上是该行星在遥远的背景星空中的投影。由于各行星的公转速度以及它们在轨道上位置的不同，地球上的观测者看到的行星在背景星空中移动的方向与地球公转方向并非总是相同。人们把看到的行星移动方向与地球公转方向相同时的行星视运动叫顺行，方向相反的叫逆行。当行星位于由顺行转成逆行或由逆行转成顺行的转折点时，行星看来好像停留在星空不动，该位置叫留。天文学把地外行星运行到太阳和地球所在的直线上、且太阳和地外行星位于地球的两侧的情形叫行星冲日。火星冲日是常见的天文现象。设地球和火星都在同一平面内绕太阳做圆周运动，且只考虑太阳对行星的引力。已知火星轨道半径R_{m}为地球轨道半径R_0的 1.524 倍，不考虑地球自转，试计算火星在经历相邻两次冲日的时间间隔内其视运动为逆行和顺行的时间间隔。

七、飞行时间质谱仪(TOFMS)的基本原理如图 1 所示，主要由离子源区、漂移区和探测器三部分组成。带正电的离子在离子源中形成后被电场E_{s}加速，经过漂移区（真空无场），到达离子探测器。设离子在离子源区加速的距离为S，在漂移区漂移的距离为L。通过记录离子到达探测器的时间，可以把不同的离子按质荷比m/q的大小进行分离，这里m和q分别表示离子的质量和电量。分辨率是 TOFMS 最重要的性能指标，本题将在不同情况下进行讨论或计算。忽略重力的影响。

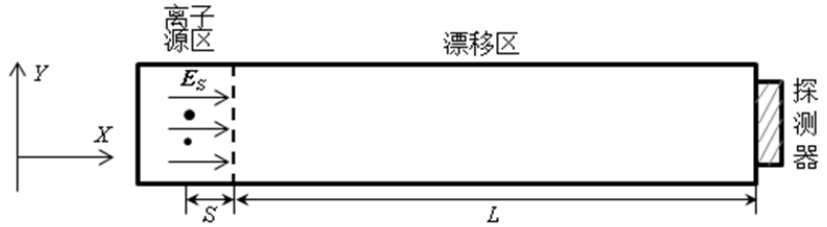


图1

（1）对于理想的 TOFMS，不同离子在离子源 X 轴方向同一位置、同一时刻$t=0$产生，且初速度为 0。探测器可以测定离子到达探测器的时刻t，其最小分辨时间为Δt（即探测器所测时刻t的误差）。定义仪器的分辨率为$R=m/\Delta m$，其中Δm为最小分辨时间Δt对应的最小分辨质量。此种情形下，R完全由Δt决定，试推导R与t和Δt之间的关系。

（2）实际上，离子产生的位置也有微小的差别ΔS（$\Delta S << S$），这导致具有相同质荷比的离子不能同时到达探测器，从而影响质谱仪的分辨率。如图 2 所示，在离子源后引入第二加速电场E_1，该电场区域的长度为D_1，通过适当选择漂移区的长度L，可使同一时刻在不同位置产生的质荷比相同的离子尽量同时到达探测器，以使分辨率受ΔS的影响最小，试求L的值。

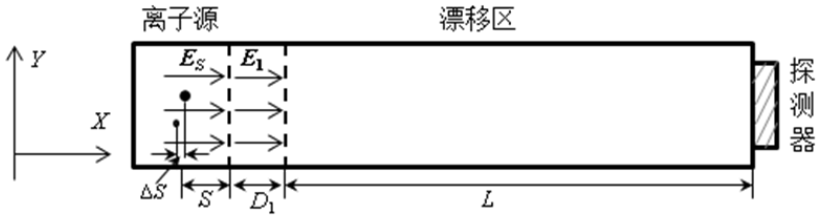


图2

（3）为进一步降低离子产生位置的离散性对分辨率的影响，通常采用如图 3 所示的反射式 TOFMS。这里在二级加速电场（E_s 和 E_1）的基础上增加了反射器，它由两级电场 E_2 和 E_3 组成，通过这两级电场对离子的飞行方向进行反转，以使分辨率受 ΔS 的影响最小，试求 L 的值。为简化计算，假设离子的运动是平行于 X 方向的直线运动。（装置的各参数间满足关系 $E_sS+E_1D_1\le E_2D_2+E_3D_3$，以使所有离子飞行方向的反转都可以实现。）

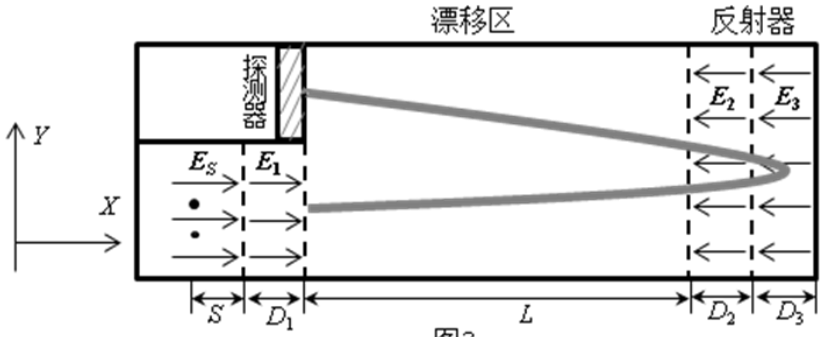
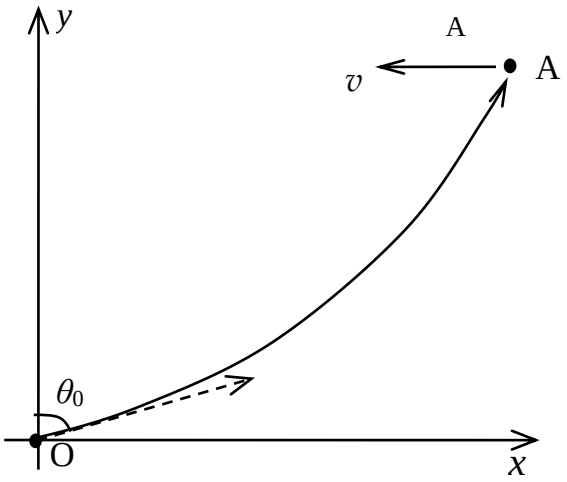


图3

八、激光瞄准系统的设计需考虑空气折射率的变化。由于受到地表状况、海拔高度、气温、湿度和空气密度等多种因素的影响，空气的折射率在大气层中的分布是不均匀的，因而激光的传播路径并不是直线。为简化起见，假设某地的空气折射率随高度 y 的变化如下式所示

$$n^2=n_0^2+\alpha^2 y\ ,$$

式中 n_0 是 $y=0$ 处（地面）空气的折射率，n_0 和 α 均为大于零的已知常量。激光本身的传播时间可忽略。激光发射器位于坐标原点 O，如图。



（1）若激光的出射方向与竖直方向 y 轴的夹角为 θ_0（$0\le\theta_0\le\pi/2$），求描述该激光传播路径的方程。

（2）假定目标 A 位于第 I 象限。当目标 A 的高度为 y_a 时，求激光发射器可照射到的目标 A 的最大 x-坐标值 $x_{a\max}$。

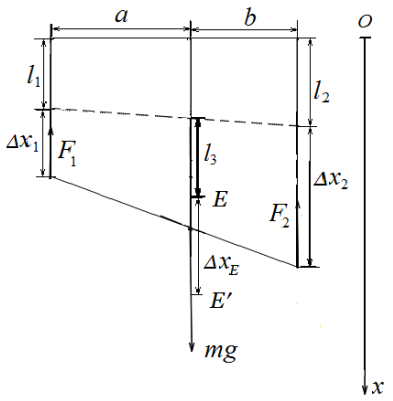
（3）激光毁伤目标需要一定的照射时间。若目标 A 处在激光发射器的可攻击范围内，其初始位置为 (x_0,y_0)，该目标在同一高度上以匀速度 v 接近激光发射器。为了使激光能始终照射该目标，激光出射角 θ_0 应如何随时间 t 而变化？

（4）激光发射器的攻击通常遵从安全击毁的原则，即既要击毁目标飞行器 A，又必须使目标飞行器 A 水平投出的所有炸弹，都不能炸到激光发射器（炸弹在投出时相对于 A 静止）。假定 A 一旦进入激光发射器可攻击范围，激光发射器便立即用激光照射它。已知水平飞行

目标 A 的高度为 y_a，击毁 A 需要激光持续照射的时间为 t_a，且位于坐标原点 O 的激光器能安全击毁它；试求 A 的速度范围。不考虑空气阻力，重力加速度大小为 g。

理论试题参考解答

一、（1）沿竖直方向建立如图所示的坐标轴 ox（原点 o 在天花板下沿，方向竖直向下）。记弹簧 A、B 和 C 的原长分别为 l_1、l_2 和 l_3，不妨设 $l_2 > l_1$。设系统处于平衡位置时，弹簧 A、B 和 C 相对于各自原长的伸长分别为 Δx_1、Δx_2 和 Δx_3；此时物块 D 处于平衡状态，有



$$mg = k_3\Delta x_3 \qquad ①$$

即

$$\Delta x_3 = \frac{mg}{k_3} \qquad ②$$

设此时弹簧 A 和 B 的末端对轻杆的拉力分别为 F_1 和 F_2。以弹簧 C 与轻杆的连接点为支点，由力矩平衡有

$$F_1 a = F_2 b \qquad ③$$

竖直方向轻杆所受合力为零，有

$$F_1 + F_2 - mg = 0 \qquad ④$$

由胡克定律有

$$F_1 = k_1\Delta x_1 \qquad ⑤$$

$$F_2 = k_2\Delta x_2 \qquad ⑥$$

由③④⑤⑥式得

$$\Delta x_1 = \frac{mgb}{(a+b)k_1} \qquad ⑦$$

$$\Delta x_2 = \frac{mga}{(a+b)k_2} \qquad ⑧$$

（2）挂上物块 D 前，系统平衡时弹簧 C 的末端 E 点的坐标 x_E 为

$$x_E = l_1 + l_3 + \frac{a(l_2 - l_1)}{a+b} \qquad ⑨$$

挂上物块 D 后，系统重新处于平衡位置时，弹簧 C 的末端从 E 点移动到 E' 点。E' 点的坐标 $x_{E'}$ 为

$$x_{E'} = l_1 + \Delta x_1 + l_3 + \Delta x_3 + \frac{a(l_2 - l_1 + \Delta x_2 - \Delta x_1)}{a+b} \qquad ⑩$$

将系统视为一等效弹簧，则系统处于静平衡时等效弹簧伸长为

$$\Delta x_E = x_{E'} - x_E = \Delta x_1 + \Delta x_3 + \frac{a(\Delta x_2 - \Delta x_1)}{a+b} \qquad ⑪$$

将②⑦⑧式代入⑪式，得系统处于静平衡时等效弹簧的伸长为

$$\Delta x_E = \frac{mg(a^2k_1 + b^2k_2)}{(a+b)^2k_1k_2} + \frac{mg}{k_3} \qquad ⑫$$

因此，等效弹簧的等效劲度系数为

$$k_e = \frac{mg}{\Delta x_E} = \frac{(a+b)^2k_1k_2k_3}{a^2k_1k_3 + b^2k_2k_3 + (a+b)^2k_1k_2} \qquad ⑬$$

物块 D 上下微小振动的固有频率为

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2k_1k_2k_3}{m[a^2k_1k_3 + b^2k_2k_3 + (a+b)^2k_1k_2]}} \qquad ⑭$$

（3）物块 D 的最大固有频率满足

$$\frac{d\omega_e}{da}=0 \qquad ⑮$$

将⑭式代入⑮式有

$$a=\frac{k_2}{k_1}b \qquad ⑯$$

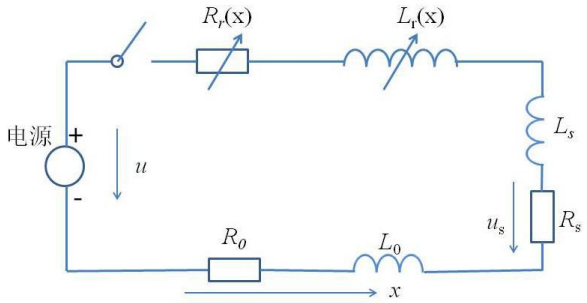
此时

$$\frac{d^2\omega_e}{da^2}=-\frac{k_1^3}{k_2b^2\sqrt{m}}\left(\frac{k_3}{(k_1+k_2)(k_1+k_2+k_3)}\right)^{3/2}<0 \qquad ⑰$$

因此，⑯式为物块 D 固有频率取最大值的条件；其最大固有频率的值为

$$\omega_e==\sqrt{\frac{(k_1+k_2)k_3}{(k_1+k_2+k_3)m}} \qquad ⑱$$

二、（1）轨道型电磁发射器的等效电路如图所示：



以导轨所在直线为 x 轴，电枢运动方向为 x 轴正方向，导轨近电源端为坐标原点。设电路的总电感为 $L(x)$ 、总电阻为 $R(x)$ ，则：

$$L(x)=L_0+L_r'x+L_s \qquad ①$$

$$R(x)=R_0+R_r'x+R_s \qquad ②$$

利用等效电路，回路方程（基尔霍夫定律）为：

$$u=\frac{d}{dt}[L(x)i]+R(x)i=L(x)\frac{di}{dt}+iL_r'v_s+iR(x) \qquad ③$$

式中 u 为电源端电压， i 为回路电流， v_s 为发射体运动速度。

（2）电源输出功率为：

$$p=iu=L(x)i\frac{di}{dt}+i^2L_r'v_s+i^2R(x) \qquad ④$$

设在 dt 时间内，输入给电磁发射系统的电能为 dE ，由能量守恒有

$$\begin{aligned}dE&=dE_m+dE_k+dE_R\\&=d[\frac{1}{2}L(x)i^2]+d[\frac{1}{2}(m_s+m_a)v_s{}^2]+i^2R(x)dt\end{aligned} \qquad ⑤$$

式中， dE_m 和 dE_k 分别是回路磁能、电枢和发射体的总动能的改变， dE_R 是回路的热损耗。由⑤式得

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=\frac{d[\frac{1}{2}L(x)i^2]}{dt}+\frac{d[\frac{1}{2}(m_s+m_a)v_s{}^2]}{dt}+i^2R(x)\\&=L(x)i\frac{di}{dt}+\frac{1}{2}L_r'i^2v_s+(m_s+m_a)v_s\frac{dv_s}{dt}+i^2R(x)\end{aligned} \qquad ⑥$$

由

$$p=\frac{dE}{dt}$$

与④⑥式可得

$$L(x)i\frac{di}{dt}+i^2L_r'v_s+i^2R(x)$$
$$=L(x)i\frac{di}{dt}+\frac{1}{2}L_r'i^2v_s+(m_s+m_a)v_s\frac{dv_s}{dt}+i^2R(x) \qquad ⑦$$

由⑦式得发射体加速度大小与回路电流的关系为

$$a_s=\frac{dv_s}{dt}=\frac{1}{2(m_s+m_a)}L_r'i^2 \qquad ⑧$$

（3）若回路电流为恒流 I，则由⑧式可知，电枢和发射体在时刻 t 的加速度

$$a_s=\frac{dv_s}{dt}=\frac{1}{2(m_a+m_s)}L_r'I^2 \qquad ⑨$$

可见，电枢和发射体在导轨中做初速为零的匀加速直线运动。要使发射体出口速度 v_{sm} 达到 3.0×10^3 m/s，则题给数据得

$$a_{sm}=\frac{v_{sm}^2}{2x_{sm}}=\frac{9.0\times10^9}{2\times5.0}\ \text{m/s}^2=9.0\times10^8\ \text{m/s}^2 \qquad ⑩$$

由⑨⑩式得

$$I=\sqrt{\frac{2(m_s+m_a)a_{sm}}{L_r'}}=\sqrt{\frac{2\times0.50\times9.0\times10^6}{1.0\times10^{-6}}}\ \text{A}=3.0\times10^6\text{A} \qquad ⑪$$

加速时间为

$$\tau=\frac{v_{sm}}{a_{sm}}=\frac{3.0\times10^3}{9.0\times10^6}\ \text{s}=3.3\times10^{-4}\ \text{s} \qquad ⑫$$

三、（1）用牛顿力学求火箭获得的速度与质量比之间的关系。

根据动量守恒定律，火箭动量的变化等于排出质量为 dm 的气体引起的动量的变化

$$d(MV_1)=V_2dm \qquad ①$$

由质量守恒定律得

$$dM+dm=0 \qquad ②$$

由速度叠加原理有

$$V_2=V_e-V_1 \qquad ③$$

将③式代入①式得

$$d(MV_1)=(V_e-V_1)dm \qquad ④$$

将②式代入④式得

$$\frac{dM}{M}=-\frac{dV_1}{V_e} \qquad ⑤$$

两边积分得

$$\int_{M_i}^{M}\frac{dM}{M}=-\frac{1}{V_e}\int_0^{V_1}dV_1 \qquad ⑥$$

利用题给积分公式完成积分，并考虑初始条件，得

$$\ln\frac{M}{M_i}=-\frac{V_1}{V_e} \qquad ⑦$$

或

$$V_1=-V_e\ln\frac{M}{M_i} \qquad ⑧$$

（2）用狭义相对论求火箭获得的速度与质量比之间的关系。

根据相对论动量守恒定律，火箭动量的变化等于排出质量为dm的气体引起的动量变化

$$d\left(\frac{MV_1}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}\right)=V_2\frac{dm}{\sqrt{1-V_2^2/c^2}} \qquad ⑨$$

根据相对论能量守恒定律，火箭能量的减少等于排出质量dm的气体对应的能量

$$-d\left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}\right)=\frac{dmc^2}{\sqrt{1-V_2^2/c^2}} \qquad ⑩$$

由相对论速度叠加原理有

$$V_2=\frac{V_e-V_1}{1-V_1V_e/c_2} \qquad ⑪$$

将⑪式代入⑨式并利用⑩式得

$$d\left(\frac{MV_1}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}\right)=\frac{V_1-V_e}{1-V_1V_e/c_2}d\left(\frac{M}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}\right) \qquad ⑫$$

此即

$$\frac{dM}{M}=-\frac{dV_1}{V_e(1-V_1^2/c^2)}。 \qquad ⑬$$

对⑬式两边积分，并利用恒等式

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

得

$$\int_{M_i}^{M}\frac{dM}{M}=-\frac{1}{2V_e}\left(\int_0^{V_1}\frac{dV_1}{1-V_1/c}+\int_0^{V_1}\frac{dV_1}{1+V_1/c}\right) \qquad ⑭$$

利用题给积分公式完成积分，并考虑初始条件，得

$$\ln\frac{M}{M_i}=-\frac{c}{2V_e}\ln\left(\frac{1+V_1/c}{1-V_1/c}\right), \qquad ⑮$$

或

$$\frac{M}{M_i}=\left(\frac{1-V_1/c}{1+V_1/c}\right)^{\frac{c}{2V_e}}, \qquad ⑯$$

或

$$V_1=\frac{1-\left(M/M_i\right)^{\frac{2V_e}{c}}}{1+\left(M/M_i\right)^{\frac{2V_e}{c}}}c。 \qquad ⑰$$

（3）当火箭速度V_1很小时，利用公式

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2},\quad 当|x|<<1$$

得

$$\ln\left(1+\frac{V_1}{c}\right)\approx\frac{V_1}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{c}\right)^2 \quad 和 \quad \ln\left(1-\frac{V_1}{c}\right)\approx-\frac{V_1}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{c}\right)^2 \qquad ⑱$$

将⑱式代入用相对论力学求得的结果⑮式，并利用⑧式，得

$$\left(\ln\frac{M}{M_i}\right)_{相对论}(V_1)-\left(\ln\frac{M}{M_i}\right)_{牛顿力学}(V_1)$$
$$=-\frac{c}{2V_e}\ln\left(\frac{1+V_1/c}{1-V_1/c}\right)-\left(-\frac{V_1}{V_e}\right)=O\left(\left(\frac{V_1}{c}\right)^3\right) \qquad ⑲$$

可见，在火箭速度V_1很小的情况下，相对论力学的结果与牛顿力学的结果之差直至$\left(\frac{V_1}{c}\right)^2$量级为零，实际上为$\left(\frac{V_1}{c}\right)^3$的量级。

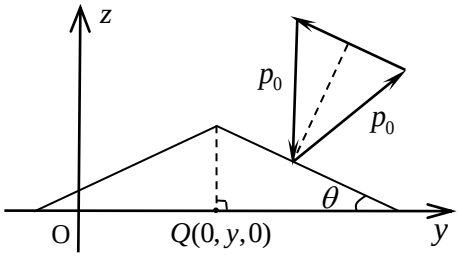
四、（1）（a）先计算每个光子对于物体的作用。假定光的频率为ν，每个光子的能量和动量大小分别为

$$E_0 = h\nu \qquad ①$$

$$p_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \qquad ②$$

式中，h为普朗克常量。

现分析光子反射后（相对于反射前）动量的变化。如 yz 剖面图所示，光子沿 z 轴负向入射到物体的 B 面，入射角和反射角都等于等腰三角形的底角θ，光子出射方向与 z 轴成2θ角；由题设，光子动量的大小在反射前后基本不变。光子在反射时给物体的冲量的 x-分量为零，z-分量与 xy 平面支持力的冲量相互抵消，只有 y-分量不为零；且 xy 平面光滑，所以物体只会沿水平 y 轴运动。可用等腰三角形顶点在 y 轴上垂足$Q(0,y,0)$的 y-坐标随时间的变化来表征整个物体的运动。单个光子在 B 面反射给物体的冲量 y-分量的大小为



$$\left|I_{0y}\right| = \frac{h\nu}{c}\sin 2\theta \qquad ③$$

方向指向坐标原点O。

再计算当$Q(0,y,0)$点处在 y 轴的正半轴上不同位置即$y \geq 0$时，单位时间内入射到斜面 B 上的光子数。这时，激光束入射到物体的 B 面，其横截面积为

$$s = yd \qquad ④$$

式中，d 为该三棱柱形小物体的棱长。此时物体接受到的激光的入射功率为

$$w = Is = Iyd \qquad ⑤$$

每单位时间内入射物体 B 面的光子数为

$$n = \frac{w}{E_0} = \frac{Iyd}{h\nu} \qquad ⑥$$

同理，当$Q(0,y,0)$点处在 y 轴的负半轴上即$y \leq 0$时，每单位时间内入射到物体的 A 面的光子数为

$$n = \frac{w}{E_0} = -\frac{Iyd}{h\nu} \qquad ⑦$$

光束在反射时给物体施加的作用力的 z-分量以及物体本身的重力始终与 xy 平面的支持力抵消。由③式结果，并考虑到单个光子反射给物体的冲量的 y-分量的方向总是指向坐标原点，可知物体受到的合外力 F 与物体上$Q(0,y,0)$点的 y-坐标的关系为

$$F = nI_{0y} = -\frac{Id\sin 2\theta}{c}y = -ky \qquad ⑧$$

式中$k = \frac{Id\sin 2\theta}{c}$。这是一个线性回复力。

由⑧式可知，物体从初始位置开始、在受到激光场照射后，以坐标原点为中心沿着 y 轴做简谐运动，对应的振动角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{Id\sin 2\theta / c}{\rho L^2 d\tan\theta}} = \sqrt{\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}} \qquad ⑨$$

式中 $m=\rho L^2 d\tan\theta$。物体上 $Q(0,y,0)$ 点只有 y-坐标随时间 t 而变化，其动力学方程为

$$\ddot{y}(t)+\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}y(t)=0 \qquad ⑩$$

（b）考虑到 $Q(0,y,0)$ 点的初始位置为 $(0,L,0)$，简谐运动方程⑩的解 $y(t)$ 为

$$y(t)=L\cos\left(t\sqrt{\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}}\right) \qquad ⑪$$

小物体从初始位置向 y 轴负方向移动 $3L/2$ 的距离的时候 $y=-\frac{1}{2}L$，由⑩式得

$$-\frac{1}{2}L=L\cos\left(t_1\sqrt{\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}}\right)$$

式中，t_1 是小物体从初始位置向 y 轴负方向移动 $3L/2$ 的距离的时间。由上式得

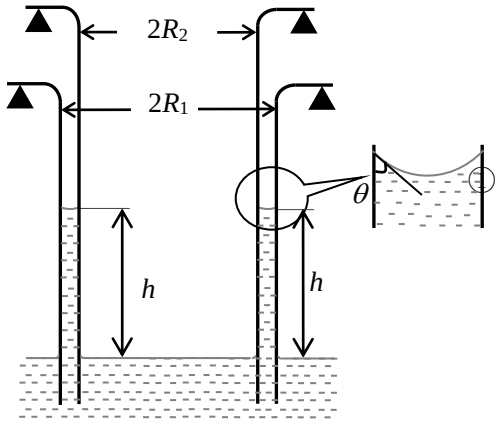
$$t_1=\frac{2\pi L}{3\cos\theta}\sqrt{\frac{c\rho}{2I}} \qquad ⑫$$

（2）当小物体从题图的初始位置开始向 y 轴负方向移动到距离为 L 的过程中，由于反射光子速度的 y-分量与小物体的运动方向相反，根据多普勒效应，反射光子的频率比入射光子的频率小；随着时间的增加，反射光子的频率会越来越小（即与入射光子的频率的差距越来越大）。

当小物体继续向 y 轴负方向移动到离初始位置的距离为 $3L/2$ 的过程中，由于反射光子速度的 y-分量与小物体运动方向相同，根据多普勒效应，反射光子的频率比入射光子的频率大；随着时间的增加，反射光子的频率会越来越小（即与入射光子频率差距越来越小）。

五、（1）作用在两筒壁之间的水面与玻璃壁的交界线上水面的表面张力沿器壁方向的投影 F_s 的大小为

$$F_s=2\pi R_1\alpha\cos\theta+2\pi R_2\alpha\cos\theta$$



该力大小不变，方向竖直向下。当水由于毛细作用上升到相对于大容器中的水面高度为 h 时，力 F_s 所做的功为

$$W_s=-F_s h \qquad ②$$

系统毛细作用引起的势能变化为

$$E_s(h)-E_s(0)=W_s \qquad ③$$

式中，$E_s(0)$ 是系统毛细作用的势能在 $h=0$ 处的值。由题设有

$$E_s(0)=0 \qquad ④$$

联立①②③④式得

$$E_s(h)=-2\pi\alpha\cos\theta(R_1+R_2)h \qquad ⑤$$

（2）两圆筒之间水面上升 h 所引起的重力势能的改变为

$$E_G=\frac{1}{2}\rho g(\pi R_1^2-\pi R_2^2)h^2 \qquad ⑥$$

联立⑤⑥式，可知系统达到平衡时的系统毛细作用的总势能为

$$E(h)=E_{\mathrm{s}}(h)+E_{\mathrm{G}}(h)=\frac{1}{2}\pi\rho g\left(R_1^2-R_2^2\right)h^2-2\pi\alpha\cos\theta\left(R_1+R_2\right)h \qquad ⑦$$

根据系统平衡时势能最小原理

$$\left.\frac{dE(h)}{dh}\right|_{h=h_{\mathrm{e}}}=0$$

可知

$$\rho g h_{\mathrm{e}}\left(R_1^2-R_2^2\right)=2R_1\alpha\cos\theta+2R_2\alpha\cos\theta \qquad ⑧$$

系统平衡时，两圆筒之间水面上升的高度是

$$h_{\mathrm{e}}=\frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g\left(R_1-R_2\right)} \qquad ⑨$$

因此，在平衡时，由⑤⑥⑨式得

$$E_{\mathrm{s}}(h_{\mathrm{e}})=-\frac{4\pi\alpha^2\cos^2\theta\left(R_1+R_2\right)}{\rho g\left(R_1-R_2\right)} \qquad ⑩$$

$$E_{\mathrm{G}}(h_{\mathrm{e}})=\frac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta\left(R_1+R_2\right)}{\rho g\left(R_1-R_2\right)} \qquad ⑪$$

毛细作用势能的减小，一部分转化为水的重力势能，另一部分用来克服系统摩擦而做的功，这部分的功转化为热耗散了。因此，系统平衡时释放的热量为

$$Q=[-E_{\mathrm{s}}(h_{\mathrm{e}})]-E_{\mathrm{G}}(h_{\mathrm{e}}) \qquad ⑫$$

由⑩⑪⑫式得

$$Q=\frac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta\left(R_1+R_2\right)}{\rho g\left(R_1-R_2\right)} \qquad ⑬$$

（3）设飞机处在距离地球地面高度 z 处，根据

$$mg_z=\frac{GMm}{\left(R_{地}+z\right)^2},\quad g=\frac{GM}{R_{地}^{\ 2}} \qquad ⑭$$

式中 $R_{地}$ 为地球半径，G 为万有引力常数，M 为地球质量。可得重力加速度随地面高度的变化规律为

$$g_z=\frac{g}{(1+z/R_{地})^2} \qquad ⑮$$

将⑮式代入⑬式，可得在地球不同高度处，所释放的热量随高度的变化关系为

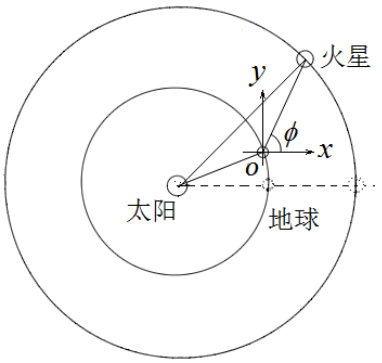
$$Q=\frac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta\left(R_1+R_2\right)}{\rho g\left(R_1-R_2\right)}\left(1+\frac{z}{R_{地}}\right)^2 \qquad ⑯$$

飞机距离地球地面高度 z 为

$$z = R_{地}\left(\sqrt{\frac{Q\rho g(R_1 - R_2)}{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1 + R_2)}} - 1\right) \qquad ⑰$$

六、（解法一）

选如图所示地球、火星和太阳三点共线（火星冲日）时为计时零点，逆时针方向为ϕ角的正方向。经过时间t后，火星在如图所示的以地心为原点的平动坐标系o-xy中的位置为:



$$x = R_{\mathrm{m}}\cos\omega_{\mathrm{m}}t - R_0\cos\omega_0 t \qquad ①$$

$$y = R_{\mathrm{m}}\sin\omega_{\mathrm{m}}t - R_0\sin\omega_0 t\ , \qquad ②$$

ω_{m}和ω_0分别为火星和地球的公转角速度。火星与地球的连线在地球坐标系o-xy中与x轴的夹角ϕ为

$$\tan\phi = \frac{R_{\mathrm{m}}\sin\omega_{\mathrm{m}}t - R_0\sin\omega_0 t}{R_{\mathrm{m}}\cos\omega_{\mathrm{m}}t - R_0\cos\omega_0 t} \qquad ③$$

③式两边对时间求导，得

$$\frac{\dot{\phi}}{\cos^2\phi} = \frac{\omega_{\mathrm{m}}R_{\mathrm{m}}^2 + \omega_0 R_0^2 - (\omega_{\mathrm{m}} + \omega_0)R_{\mathrm{m}}R_0\cos[(\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}})t]}{(R_{\mathrm{m}}\cos\omega_{\mathrm{m}}t - R_0\cos\omega_0 t)^2} \qquad ④$$

火星的顺行或逆行分别对应于$\dot{\phi}$为正或为负的情形。令$\dot{\phi} = 0$，有

$$\omega_{\mathrm{m}}R_{\mathrm{m}}^2 + \omega_0 R_0^2 - (\omega_{\mathrm{m}} + \omega_0)R_{\mathrm{m}}R_0\cos[(\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}})t] = 0 \qquad ⑤$$

解得

$$t = \pm\frac{1}{\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}}}\arccos\frac{\omega_{\mathrm{m}}R_{\mathrm{m}}^2 + \omega_0 R_0^2}{(\omega_{\mathrm{m}} + \omega_0)R_{\mathrm{m}}R_0} \qquad ⑥$$

火星在经历相邻两次冲日的时间间隔内，仅当

$$t \in \left(-\frac{1}{\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}}}\arccos\frac{\omega_{\mathrm{m}}R_{\mathrm{m}}^2 + \omega_0 R_0^2}{(\omega_{\mathrm{m}} + \omega_0)R_{\mathrm{m}}R_0},\ \frac{1}{\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}}}\arccos\frac{\omega_{\mathrm{m}}R_{\mathrm{m}}^2 + \omega_0 R_0^2}{(\omega_{\mathrm{m}} + \omega_0)R_{\mathrm{m}}R_0}\right)$$

时，$\dot{\phi}$恒为负（由于$t = 0$时④式右端分子小于零）。因此，在经历相邻两次冲日的过程中，火星视运动逆行的总时间为

$$t_{逆} = \frac{2}{\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}}}\arccos\frac{\omega_{\mathrm{m}}R_{\mathrm{m}}^2 + \omega_0 R_0^2}{(\omega_{\mathrm{m}} + \omega_0)R_{\mathrm{m}}R_0} \qquad ⑦$$

根据开普勒第三定律，有

$$\omega_{\mathrm{m}}^2 R_{\mathrm{m}}^3 = \omega_0^2 R_0^3 \qquad ⑧$$

将⑧式代入⑦式得

$$t_{逆} = \frac{2}{\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}}}\arccos\frac{\omega_{\mathrm{m}}R_{\mathrm{m}}^2 + \omega_0 R_0^2}{(\omega_{\mathrm{m}} + \omega_0)R_{\mathrm{m}}R_0} = \frac{T_0}{\pi(1 - n^{-3/2})}\arccos\frac{n + n^{1/2}}{n^{3/2} + 1} \qquad ⑨$$

式中$n = \dfrac{R_{\mathrm{m}}}{R_0}$，$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$。代入数据$n = 1.524$，$T_0 = 365\mathrm{d}$，得

$$t_{逆} = 0.1991T_0 = 72.7\mathrm{d} \approx 73\ \mathrm{d} \qquad ⑩$$

火星经历相邻两次冲日的时间T满足

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega_{\mathrm{m}}} = \frac{T_0 T_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{m}} - T_0} = \frac{T_0}{1 - n^{-3/2}} \approx 779\ \mathrm{d} \qquad ⑪$$

火星顺行的时间为

$$t_{顺}=(779-73)\ \mathrm{d}=706\ \mathrm{d} \qquad ⑫$$

（解法二）

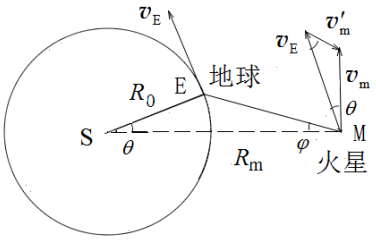
当火星相对于地球的速度

$$\boldsymbol{v}'_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}$$

的方向与地球、火星的连心线 $\overline{\mathrm{EM}}$ 平行

$$\boldsymbol{v}'_{\mathrm{m}}\parallel\overline{\mathrm{EM}} \qquad ①$$

时（即火星在相对于地球的切向速度为零时）的位置为留。留的位置如图所示。此时地球和火星相对于日心的位置矢量的大小满足



$$\frac{R_{\mathrm{m}}}{\sin(\theta+\varphi)}=\frac{R_0}{\sin\varphi} \qquad ②$$

速度大小 v_{m} 和 v_{E} 满足

$$\frac{v_{\mathrm{m}}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta-\varphi)}=\frac{v_0}{\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)} \qquad ③$$

根据开普勒第三定律，有

$$\omega_{\mathrm{m}}^2R_{\mathrm{m}}^3=\omega_0^2R_0^3 \qquad ④$$

由①②③④式得

$$\cos\theta=\frac{n+n^{1/2}}{n^{3/2}+1} \qquad ⑤$$

式中 $n=\dfrac{R_{\mathrm{m}}}{R_0}$。代入数据 $n=1.524$，$T_0=365\mathrm{d}$，得

$$\theta=\pm16.79^\circ \qquad ⑥$$

火星在经历相邻两次冲日的时间间隔内，仅当

$$\theta\in\left(-16.79^\circ,16.79^\circ\right)$$

时，火星的视运动为逆行。

火星经历相邻两次冲日的时间 T 满足

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0-\omega_{\mathrm{m}}}=\frac{T_0T_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{m}}-T_0}=\frac{T_0}{1-n^{-3/2}}\approx779\ \mathrm{d} \qquad ⑦$$

式中已利用 $T_0=365\mathrm{d}$。在经历相邻两次冲日的过程中，火星视运动逆行的总时间为

$$t_{逆}=\frac{2\times16.79^\circ}{360^\circ}T=0.09328T=73\mathrm{d} \qquad ⑧$$

火星顺行的时间为

$$t_{顺}=T-T_{逆}=(779-73)\ \mathrm{d}=706\ \mathrm{d} \qquad ⑨$$

七、（1）在离子源区，离子做初速度为零的匀加速直线运动，加速度大小为

$$a_0=\frac{qE_s}{m}$$

离子在离子源区的飞行时间为

$$t_s=\sqrt{\frac{2S}{a_1}}=\sqrt{\frac{2mS}{qE_s}} \qquad ①$$

在漂移区，离子做匀速直线运动，末速度大小为

$$v_0=a_0t_s=\sqrt{\frac{2qE_sS}{m}}$$

离子在漂移区的飞行时间为

$$t_L=\frac{L}{v_0}=L\sqrt{\frac{m}{2qE_sS}} \qquad ②$$

离子总飞行时间为

$$t=t_s+t_L=\sqrt{\frac{m}{q}}\left(\sqrt{\frac{2S}{E_s}}+\frac{L}{\sqrt{2E_sS}}\right) \qquad ③$$

③式可写成

$$\frac{m}{q}=\frac{t^2}{k_0^2} \qquad ④$$

其中 $k_0=\sqrt{\frac{2S}{E_s}}+\frac{L}{\sqrt{2E_sS}}$，所以质荷比 m/q 不同的离子的总飞行时间 t 不同。对④式两边微分得

$$\frac{1}{q}dm=\frac{2t}{k_0^2}dt \quad 或 \quad dm=\frac{2qt}{k_0^2}dt \qquad ⑤$$

于是

$$\frac{dm}{m}=\frac{2qt}{k_0^2}dt\frac{k_0^2}{qt^2}=\frac{2dt}{t}, \qquad ⑥$$

探测器此时分辨率 R 与 t 和 Δt 之间的关系为

$$R=\frac{m}{\Delta m}=\frac{t}{2\Delta t} \qquad ⑦$$

（2）离子在离子源区的飞行时间 t_s 仍如①式所示。在第二加速区，离子做初速度为 v_0 的匀加速直线运动，加速度大小为

$$a_1=\frac{qE_1}{m}$$

设离子在第二加速区的飞行时间为 t_{d1}，由运动学公式得

$$(v_0+a_1t_{d1})^2-v_0^2=2a_1D_1 \qquad ⑧$$

解得

$$t_{d1}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{E_1}(\sqrt{E_sS+E_1D_1}-\sqrt{E_sS}) \qquad ⑨$$

同理可得离子在漂移区的飞行时间 t_L

$$t_L=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}} \qquad ⑩$$

离子到达探测器的总时间为

$$t=t_s+t_{d1}+t_L$$

将上式两边对 S 微商得

$$\frac{dt}{dS}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{E_sS}}+\frac{E_s}{E_1\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{E_s}{E_1\sqrt{E_sS}}-\frac{L}{2}\frac{E_s}{\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}}\right) \qquad ⑪$$

要使 dt 受 dS 的影响最小，则要求 $\frac{dt}{dS}=0$，即

$$\frac{1}{\sqrt{E_sS}}+\frac{E_s}{E_1\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{E_s}{E_1\sqrt{E_sS}}-\frac{L}{2}\frac{E_s}{\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}}=0 \qquad ⑫$$

由⑫式得

$$L=2\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}\left(\frac{1}{E_s\sqrt{E_sS}}+\frac{1}{E_1\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{1}{E_1\sqrt{E_sS}}\right)$$
$$=2\left(\sqrt{k^3}-k(\sqrt{k}-1)\frac{E_s}{E_1}\right)S \qquad ⑬$$

式中$k=\dfrac{E_sS+E_1D_1}{E_sS}$。

（3）离子到达探测器的总时间为

$$t=t_s+t_{d1}+2t_L+2t_{d2}+2t_{d3} \qquad ⑭$$

式中，t_s、t_{d1}和t_L是离子在离子源区、第二加速区和漂移区的单程飞行时间，其结果仍分别如①、⑨和⑩式所示，而t_{d2}和t_{d3}分别是离子在反射区的两级电场区域的单程飞行时间，因子 2 是考虑到离子往返飞行过程的对称性的缘故。按照前述同样的考虑，有

$$t_{d2}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{E_2}(\sqrt{E_sS+E_1D_1}-\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}) \qquad ⑮$$

$$t_{d3}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{E_3}\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2} \qquad ⑯$$

将⑭式两边对S微商，并利用①⑨⑩⑮⑯式，得

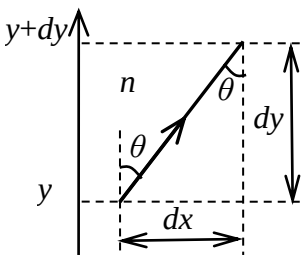
$$\frac{dt}{dS}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{E_sS}}+\frac{1}{E_1}\left(\frac{E_s}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{E_s}{\sqrt{E_sS}}\right)-L\frac{E_s}{\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}}\right.$$
$$+\frac{2}{E_2}\left(\frac{E_s}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{E_s}{\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}}\right) \qquad ⑰$$
$$\left.+\frac{2}{E_3}\frac{E_s}{\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}}\right]$$

同样要求$dt/dS=0$，得

$$L=\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}\left[\frac{1}{E_s\sqrt{E_sS}}+\frac{1}{E_1}\left(\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{1}{\sqrt{E_sS}}\right)\right.$$
$$+\frac{2}{E_2}\left(\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}}\right) \qquad ⑱$$
$$\left.+\frac{2}{E_3}\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}}\right]$$
$$=(E_sS+E_1D_1)\left(\frac{\sqrt{k}}{E_s}+\frac{1-\sqrt{k}}{E_1}+\frac{2(1-\sqrt{k'})}{E_2}+\frac{2\sqrt{k'}}{E_3}\right)$$

式中，$k'=\dfrac{E_sS+E_1D_1}{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}$。

八、(1)把大气层分成许多水平薄层，设第i层上下的高度为y_i和$y_{i+1}=y_i+dy$，该层空气的折射率为$n(y_i)$，如右图所示。光线在该薄层下上两个界面上的折射角和入射角都是$\theta(y_i)$，由折射定律和几何关系得



$$n(y_{i-1})\sin\theta(y_{i-1})=n(y_i)\sin\theta(y_i)=n(y_{i+1})\sin\theta(y_{i+1})=\text{常数}$$

此即

$$n(y)\sin\theta(y)=\text{常数} \qquad ①$$

由几何关系得

$$\frac{dx}{dy}=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\theta}-1}} \qquad ②$$

由上两式可得

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{n^2}{n_0^2\sin^2\theta_0}-1} \qquad ③$$

把已知的大气折射率变化规律 $n^2=n_0^2+\alpha^2 y$ 代入③式中，得

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{n_0^2+\alpha^2 y}{n_0^2\sin^2\theta_0}-1}=\frac{\alpha}{n_0\sin\theta_0}\sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0+y} \qquad ④$$

即

$$\frac{dy}{\sqrt{\dfrac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0+y}}=\frac{\alpha}{n_0\sin\theta_0}dx \qquad ⑤$$

对上式积分得

$$2\sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0+y}+C=\frac{\alpha}{n_0\sin\theta_0}x \qquad ⑥$$

因为激光是从坐标原点O出射的，所以 $x=0$ 时 $y=0$，即

$$2\sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0+0}+C=0 \qquad ⑦$$

考虑到 n_0 和 α 均为正数且 $0\le\theta_0\le\pi/2$，可得

$$C=-2\sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0}=-2\frac{n_0}{\alpha}\cos\theta_0 \qquad ⑧$$

把⑧式代入⑥式中，经过整理即得激光的轨迹方程为

$$y=\left(\frac{\alpha}{2n_0\sin\theta_0}x+\frac{n_0}{\alpha}\cos\theta_0\right)^2-\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0=\frac{\alpha^2}{4n_0^2\sin^2\theta_0}x^2+\frac{x}{\tan\theta_0} \qquad ⑨$$

这是顶点 $\left(-\dfrac{n_0^2}{\alpha^2}\sin 2\theta_0,-\dfrac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0\right)$ 在第 III 象限、开口向上、且过O点的一段抛物线。

（2）从⑨式可以看出：当 y 给定时，若 θ_0 变大，则 x 也单调地变大，在 $\theta_0=\pi/2$ 时抛物线的顶点到达了 O 点，此时曲线也达到了 x 方向上最远的距离。把 $\theta_0=\pi/2$ 和 A 点的坐标 (x_a,y_a) 代入光线轨迹方程⑨式可得

$$x_{a\max}=\frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a} \qquad ⑩$$

这是飞行高度为 y_a 的目标飞行器A可被激光照射或攻击时的最大水平距离。

（3）将目标A的坐标 (x_a,y_a) 代入光线轨迹方程⑨式得

$$y_a=\frac{\alpha^2}{4n_0^2\sin^2\theta_0}x_a^2+\frac{x_a}{\tan\theta_0} \qquad ⑪$$

将三角函数关系 $\sin^2\theta_0=\dfrac{\tan^2\theta_0}{1+\tan^2\theta_0}$ 代入上式可得

$$y_a=\frac{\alpha^2x_a^2}{4n_0^2\tan^2\theta_0}(1+\tan^2\theta_0)+\frac{x_a}{\tan\theta_0} \qquad ⑫$$

进一步整理上式可得关于 $\tan\theta_0$ 的一元二次方程

$$(4n_0^2y_a-\alpha^2x_a^2)\tan^2\theta_0-4n_0^2x_a\tan\theta_0-\alpha^2x_a^2=0 \qquad ⑬$$

解得

$$\tan\theta_0=\frac{2n_0^2x_a}{4n_0^2y_a-\alpha^2x_a^2}\pm\sqrt{\left(\frac{2n_0^2x_a}{4n_0^2y_a-\alpha^2x_a^2}\right)^2+\frac{\alpha^2x_a^2}{4n_0^2y_a-\alpha^2x_a^2}}$$

因为目标A在第Ⅰ象限且处于可攻击范围内，所以由（2）中的结论可知

$$0\le x_a\le\frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}\ ,$$

同时$0\le\theta_0\le\frac{\pi}{2}$。故

$$\tan\theta_0\ge 0\ ,$$

于是，上述解的右端根号前应取正号，因而

$$\tan\theta_0=\frac{2n_0^2x_a}{4n_0^2y_a-\alpha^2x_a^2}+\sqrt{\left(\frac{2n_0^2x_a}{4n_0^2y_a-\alpha^2x_a^2}\right)^2+\frac{\alpha^2x_a^2}{4n_0^2y_a-\alpha^2x_a^2}}\qquad⑭$$

由题设可知目标A的运动轨迹为

$$x_a=x_0-vt,\quad y_a=y_0\qquad⑮$$

将⑮式代入⑭式，可得激光出射角度θ_0随时间t的变化规律为

$$\theta_0=\arctan\left(\frac{2n_0^2(x_0-vt)}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}+\sqrt{\left(\frac{2n_0^2(x_0-vt)}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}\right)^2+\frac{\alpha^2(x_0-vt)^2}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}}\right)\qquad⑯$$

（4）假设水平飞行器正好完成对激光器的投弹攻击，则其飞行时间可分为两部分，其一是它受到激光照射直至被摧毁的时间t_a，飞行器在其刚好被摧毁时投出炸弹；其二是炸弹从投出直至落到水平地面的时间t_g。炸弹自投出后做平抛运动，故

$$t_g=\sqrt{\frac{2y_a}{g}}\qquad⑰$$

目标飞行器A从被激光照射开始到最后炸弹落地的整个过程中水平运动的距离为

$$s=v\left(t_a+t_g\right)=v\left(t_a+\sqrt{\frac{2y_a}{g}}\right)\qquad⑱$$

位于坐标原点的激光器若能安全击毁目标飞行器A，应有

$$s<x_{a\max}\qquad⑲$$

式中$x_{a\max}$为飞行高度为y_a的飞行器A可以被激光照射时的最大水平距离（见⑩式）。由⑩⑱⑲式得，目标飞行器A的水平速度v应满足

$$v<\frac{\frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}}{t_a+\sqrt{\frac{2y_a}{g}}}=\frac{2n_0\left(t_a\sqrt{gy_a}-\sqrt{2}y_a\right)}{\alpha\left(gt_a^2-2y_a\right)}$$

换言之，该目标飞行器A的速度范围为

$$\left(0,\frac{2n_0\left(t_a\sqrt{gy_a}-\sqrt{2}y_a\right)}{\alpha\left(gt_a^2-2y_a\right)}\right)\qquad⑳$$