第三十二届全国中学生物理竞赛实验试题

实验一　二极管正向伏安特性精确测量 (30 分)

二极管是典型的非线性元件，其伏安特性满足$I = I_0(e^{\frac{qU}{nkT}} - 1)$，其中$I_0$为反向饱和电流（其值取决于材料、温度、掺杂浓度和截面积等），q 为电子电量（$q = 1.602 \times 10^{-19}C$），$k$ 为玻尔兹曼常数（$k = 1.38 \times 10^{-23}J / K$），$U$ 为二极管的外加电压，T 为绝对温度，n 为理想因子。精确测量其伏安特性时，必须设计合理电路，以消除电流表和电压表内阻对测量的影响。已知待测二极管为硅管，正向开启电压约为0.5V，导通时电压约为0.6-0.8V。

实验器材

直流稳压电源 1 台；数字式万用表 2 只；电位器 2 只；标准电阻箱 1 只；直流检流计 1 台；恒温水浴锅一台；待测二极管（置于封闭的石英管中）一个；可编程计算器一台；导线若干。

实验要求

1.根据所给实验器材设计实验方案，精确测量在 $t = 27^0$℃ 时二极管的正向伏安特性（电流变化范围：0.5~1000 μA，测量不少于 20 组数据）：

(1) 画出实验电路图，说明实验原理，写出实验步骤；

(2) 设计表格并记录实验数据；

(3) 画出二极管正向伏安特性曲线，用最小二乘法或作图法得出反向饱和电流 I_0 和理想因子 n。

2.二极管中的电流恒定时，其两端电压会随温度变化而变化。设定二极管的电流分别为 5μA、15μA 和 20μA，确定其电压与温度的关系，推导出在绝对零度时的二极管电压 $U_{g(0)}$；并在此基础上讨论并消除电流大小对二极管 $U_{g(0)}$的影响（建议温度范围 27^0℃~70^0℃）：

(1) 说明实验原理，写出实验步骤；

(2) 设计表格并记录实验数据；

(3) 分别画出电流为 5μA、10μA 和 15μA 时二极管电压 U 与热力学温度 T 的关系曲线、得出 U 与 T 的关系式、推导出在绝对零度时的二极管电压 $U_{g(0)}$；分析不同恒定电流条件下，所获得绝对零度时二极管正向结电压的特点及其产生原因，并试图消除。

仪器说明

1.直流稳压电源后侧面已有市电接入，打开电源，输出指示灯会点亮。输出电压已设定为5V。

2.数字式万用表，除用于判定二极管正负极外，仅用作直流电流表和直流电压表（内阻未知）。

3.电位器是十圈连续可调电阻器，其1、3接线端为固定端，2为滑动端。电阻调节范围分别为0~2KΩ和0~5KΩ。

4.检流计满偏电流约为0.3μA（而非表上标示的10μA），谨慎使用，以免烧坏。

5.恒温水浴锅控温范围：室温至100℃；控温精度：0.5℃。水浴锅已加好适量的水，待测二极管置于封闭的石英管中，测量时需尽量靠近测温点。

6.可编程计算器可用于线性回归计算。

注意事项

实验过程中请注意电表读数，以防烧坏电表和器件。

求助说明

本实验过程中可有1次求助机会。

求助卡　申请提供实验电路图，扣7分。

第三十二届全国中学生物理竞赛实验试题

实验二 测量透明容器和液体的折射率（30 分）

实验器材

透明圆桶形容器 1 个（易碎品），激光笔 1 支，坐标纸 3 张，直尺 1 把，矩形光屏 1 个，待测液体 1 瓶（装于矿泉水瓶中），计算器 1 个，铅笔 1 支。

实验内容与要求

1. 测量透明圆桶形容器器壁的折射率。

（1）画出光路图，说明实验原理，给出其计算公式，要求写出必要的推导过程；

（2）简述实验步骤；

（3）在坐标纸上记录实际光路图；

（4）记录相关实验数据，根据相关实验数据计算容器器壁的折射率，要求写出简要的计算过程。

2. 用光学方法测量透明圆桶形容器外半径与内半径之比 *R*/*r*。

（1）画出光路图，说明实验原理，给出其计算公式，要求写出必要的推导过程；

（2）简述实验步骤；

（3）在坐标纸上记录实际光路图；

（4）记录相关的实验数据，根据相关实验数据计算容器外半径与内半径之比 *R*/*r*，要求写出简要的计算过程。

3. 将待测液体缓慢倒入透明圆桶形容器中，测量液体折射率。

（3）画出光路图，说明实验原理，给出其计算公式，要求写出必要的推导过程；

（2）简述实验步骤；

（3）在坐标纸上记录实际光路图；

（4）记录相关的实验数据，并根据相关实验数据计算液体折射率，要求写出简要的计算过程。

器材使用说明

1. 本实验采用普通的激光笔作为光源，按面板上的开/关键激光打开，再按则关闭。激光笔持续亮 3 分钟后会自动关闭以达到自我保护，此时再按开/关键激光笔重新打开。切不可将激光直接射入眼睛。

2. 激光笔固定于矩形盒的上方，使光源保持一定的高度，矩形盒已固定于实验桌上请不要移动。矩形盒旁边的纸片可垫在激光笔的下方用于调节激光的仰角。

3. 待测液体装于矿泉水瓶中，将待测液体倒入透明容器时要防止溢出到桌面或沾到皮肤，一旦液体溢出或沾到皮肤应马上用面巾纸擦干。矿泉水瓶仅用于装待测液体，不可用于测量。

4. 计算器的使用：ON 为开关键、SHIFT 为功能切换键（黄色和白色标识运算符之间切换）、按 SHIFT 键再按 AC 键可关闭计算器。

5. 转笔刀只用于削铅笔用，透明胶带仅用于固定坐标纸，塑料杯只能用于装可能的废液，面巾纸只用于擦干可能溢出的待测液体。

求助说明

本实验过程中可有 2 次求助机会。

求助卡 1　申请测量容器器壁折射率实验原理，扣 4 分。

求助卡 2　申请测量液体折射率实验原理，扣 6 分。

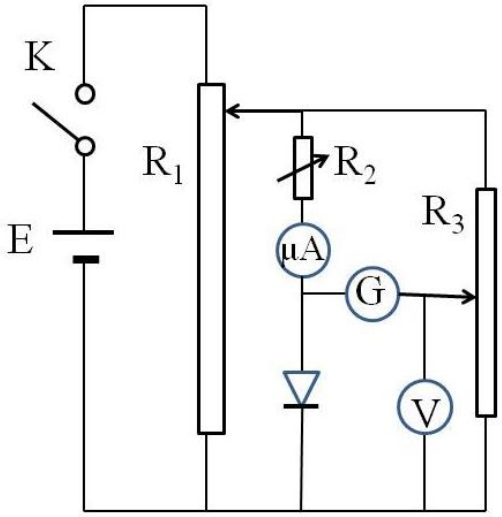
第三十二届全国中学生物理竞赛（实验一）

1．精确测量二极管在 27 ℃ 时的正向伏安特性

（1）根据所给实验器材设计实验方案，以消除直流电流表和直流电压表的未知内阻对测量的影响，并说明设计原理与实验操作步骤

说明实验原理并画出实验电路图

[参考测量电路]



实验步骤

[参考实验步骤]

1. 设定水浴锅的温度为 27 ℃；
2. 按原理图连接电路；调节电位器 R_1 和 R_3 的初值，使分压电路输出电压为零，设定电阻箱 R_2 的值为 10000 欧，检流计调零；
3. 待温度稳定后，接通电源，慢慢调节电位器 R_1，使电流表读书增加；反复调节电位器 R_1 和 R_3 和电阻箱 R_2，使电桥在设定电压值处平衡；依次记录相对应的电压值和电流值。

（2）设计表格并记录实验数据，电流范围：**0.5**~1000 μA 。

实验测量与数据记录

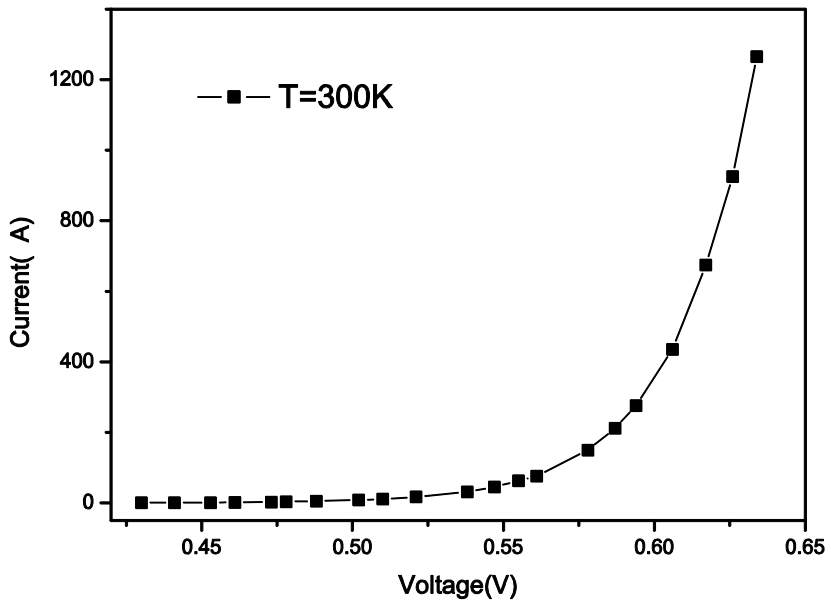
[参考数据]

电压/V	0.430	0.441	0.453	0.461	0.473	0.488	0.502	0.510	0.521
电流/μA	0.52	0.77	1.20	1.63	2.58	4.81	8.14	10.89	16.92
电压/V	0.538	0.547	0.555	0.561	0.578	0.587	0.594	0.606	0.617
电流/μA	31.8	45.0	62.8	76.6	149	212.0	276.0	435.0	675.0
电压/V	0.626								
电流/μA	926.0								

（3）画出二极管正向伏安特性曲线，用最小二乘法或作图法得出反向饱和电流 I_0 和理想因子 n。

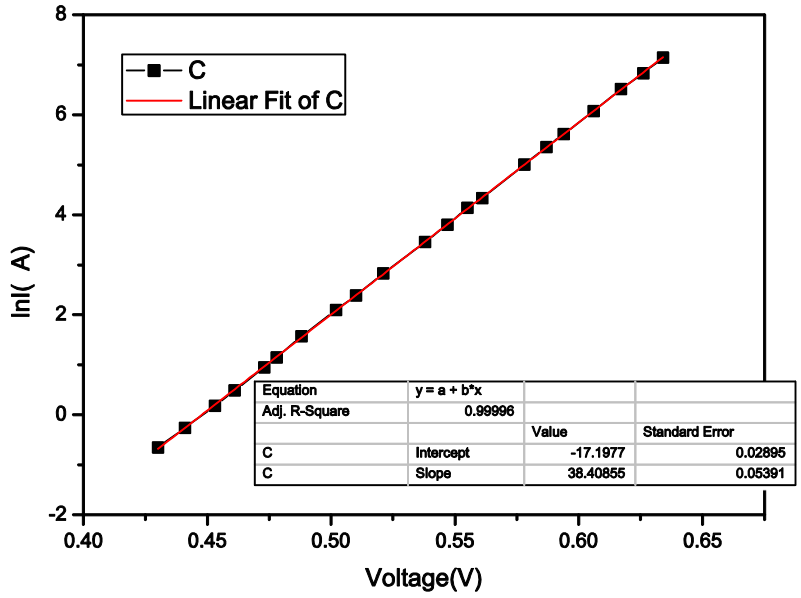
画出二极管正向 I-V 曲线

[参考曲线]



用最小二乘法或作图法得出反向饱和电流 I_0 和理想因子 n

[参考计算结果]



I_0 = 3.397×10^{-14} A　　n = 1.001

2. 二极管正向结电压与温度的关系

（1）分别确定恒定电流为 5、10 和 15μA 时，二极管正向端电压与温度的关系，以及二极管在绝对零度时的结电压；在此基础上讨论并消除电流大小对二极管在绝对零度时端电压的影响。

说明实验原理和实验步骤

1. 设定水浴锅的温度为 27 ℃；
2. 待温度稳定后，调节电位器 R_1 和 R_3 和电阻箱 R_2，使电桥在电流表读数为 5μA、10μA 和 15μA 处平衡；分别记录对应的电压值依次记录相对应的电压值；
3. 改变水浴锅的温度分别为 37 ℃、47 ℃、57 ℃ 和 67 ℃。重复第二步测量。

（2）设计表格并记录实验数据，（建议温度范围 27-70℃，至少 5 个温度点）。

实验测量与数据记录

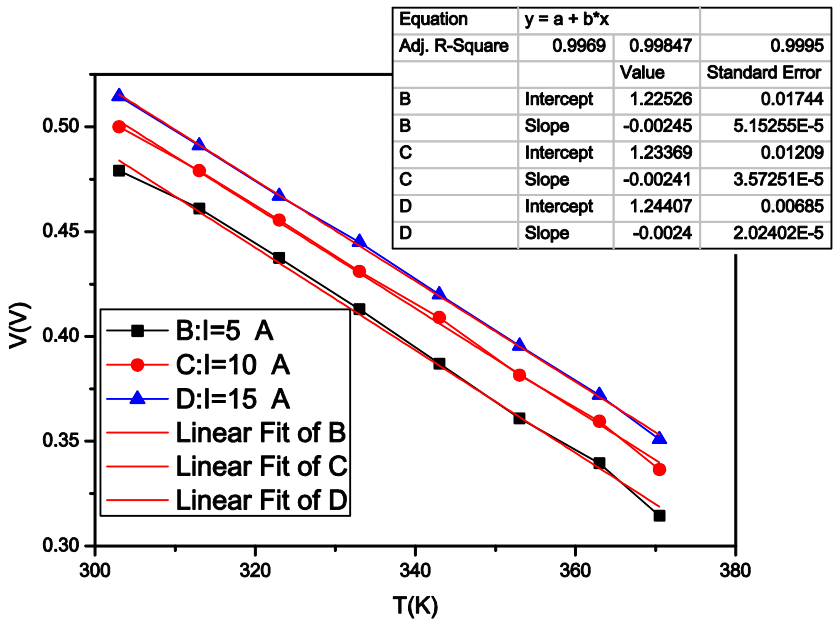
[参考数据]

温度/K	303.0	313.0	323.0	333.0	343.0
电压/V(5uA)	0.479	0.461	0.438	0.413	0.387
电压/V(10uA)	0.5	0.479	0.4555	0.431	0.409
电压/V(15uA)	0.515	0.491	0.467	0.445	0.420

（3）画出二极管正向端电压与温度的特性曲线，用最小二乘法或作图法得出端电压与温度的关系表达式。

画出恒流（5μA、10μA 和 15μA）下二极管正向结电压与温度关系 *V-T* 曲线

[参考曲线]



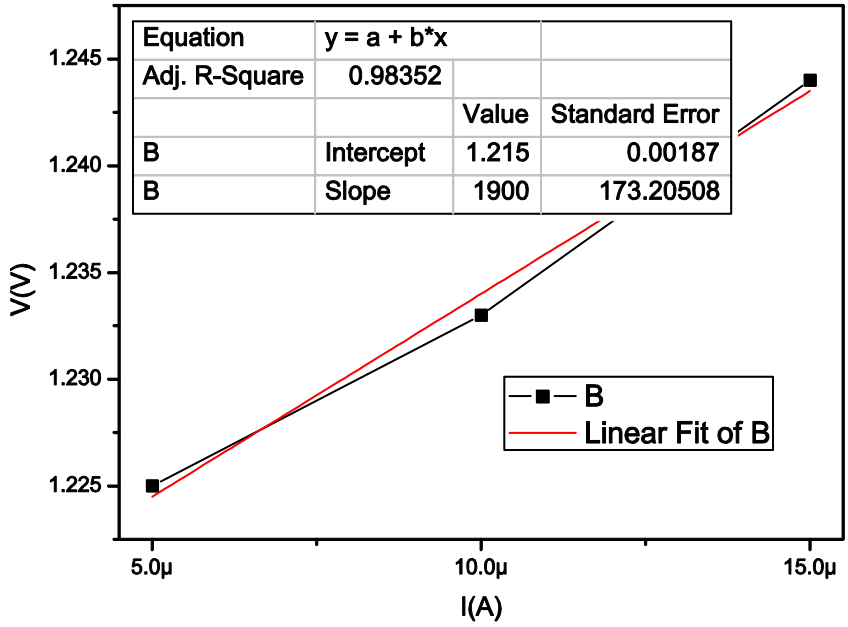
分别得出恒定电流（5μA、10μA 和 15μA）下二极管正向端电压与温度的关系表达式和绝对零度时二极管的正向端电压

[参考数据]

	$V_{g(0)}$ (V)	-S(V/K)
5（uA）	1.225	0.00245
10（uA）	1.233	0.00241
15（uA）	1.244	0.0024

分析在不同恒定电流下，所获得绝对零度时二极管正向端电压的特点及其产生的原因，并试图消除

[参考数据]



$$V（T）=1.215 -0.0024T$$

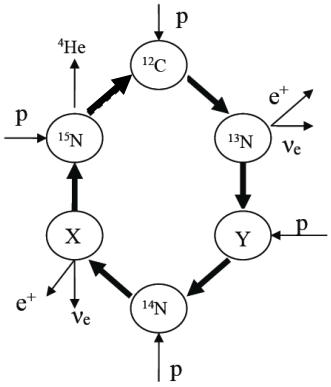
第 32 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题解答

2015 年 9 月 19 日

0 一、（15 分）

（1）图中 X 和 Y 代表的核素分别为

$^{15}\mathrm{O}$ 和 $^{13}\mathrm{C}$ ①



（2）一个循环所有的核反应方程式依循换次序为

$$\mathrm{p}+{}^{12}\mathrm{C}\rightarrow{}^{13}\mathrm{N} \quad ②$$

$${}^{13}\mathrm{N}\rightarrow{}^{13}\mathrm{C}+\mathrm{e}^{+}+\nu_{\mathrm{e}} \quad ③$$

$$\mathrm{p}+{}^{13}\mathrm{C}\rightarrow{}^{14}\mathrm{N} \quad ④$$

$$\mathrm{p}+{}^{14}\mathrm{N}\rightarrow{}^{15}\mathrm{O} \quad ⑤$$

$${}^{15}\mathrm{O}\rightarrow{}^{15}\mathrm{N}+\mathrm{e}^{+}+\nu_{\mathrm{e}} \quad ⑥$$

$$\mathrm{p}+{}^{15}\mathrm{N}\rightarrow{}^{12}\mathrm{C}+{}^{4}\mathrm{He} \quad ⑦$$

（3）整个循环的核反应，相当于

$$4\mathrm{p}\rightarrow{}^{4}\mathrm{He}+2\mathrm{e}^{+}+2\nu_{\mathrm{e}} \quad ⑧$$

完成一个碳循环过程释放的核能为

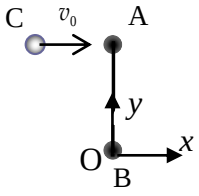
$$\begin{aligned}\Delta E&=(4m_{\mathrm{p}}-M_{{}^{4}\mathrm{H_e}}-2m_{\mathrm{e}})c^{2}\\&=[(4\times1.0078-4.0026)\times931.494-2\times0.511]\ \mathrm{MeV}\\&\approx25.619\ \mathrm{MeV}\end{aligned} \quad ⑨$$

评分参考：第（1）问 4 分，X 和 Y 正确，各 2 分；第（2）问 6 分，②③④⑤⑥⑦式各 1 分；第（3）问 5 分，⑧式 2 分，⑨式 3 分。

二、（15 分）

（1）（解法一）

取碰前 B 球所在位置 O 为原点，建立坐标系（如图）。碰撞前后系统的动量及其对细杆中心的角动量都守恒，有



$$mv_0=mv_x+MV_{\mathrm{A}x}+MV_{\mathrm{B}x} \quad ①$$

$$0=mv_y+MV_{\mathrm{A}y}+MV_{\mathrm{B}y} \quad ②$$

$$m\frac{L}{2}v_0=m\frac{L}{2}v_x+M\frac{L}{2}V_{\mathrm{A}x}-M\frac{L}{2}V_{\mathrm{B}x} \quad ③$$

式中，v_x 和 v_y 表示球 C 碰后的沿 x 方向和 y 方向的速度分量。由于轻杆长度为 L，按照图中建立的坐标系有

$$[x_{\mathrm{A}}(t)-x_{\mathrm{B}}(t)]^{2}+[y_{\mathrm{A}}(t)-y_{\mathrm{B}}(t)]^{2}=L^{2} \quad ④$$

由上式对时间求导得

$$[x_{\mathrm{A}}(t)-x_{\mathrm{B}}(t)][V_{\mathrm{A}x}(t)-V_{\mathrm{B}x}(t)]+[y_{\mathrm{A}}(t)-y_{\mathrm{B}}(t)][V_{\mathrm{A}y}(t)-V_{\mathrm{B}y}(t)]=0 \quad ⑤$$

在碰撞后的瞬间有

$$\begin{aligned}&x_{\mathrm{A}}(t=0)=x_{\mathrm{B}}(t=0),\\&y_{\mathrm{A}}(t=0)-y_{\mathrm{B}}(t=0)=L\end{aligned} \quad ⑥$$

利用⑥式，⑤式在碰撞后的瞬间成为

$$V_{\mathrm{A}y}\equiv V_{\mathrm{A}y}(t=0)=V_{\mathrm{B}y}(t=0)\equiv V_{\mathrm{B}y} \quad ⑦$$

由①②⑦式得

$$V_{\mathrm{A}y}=V_{\mathrm{B}y}=-\frac{m}{2M}v_y \quad ⑧$$

由①②③式得

$$V_{Ax}=\frac{m}{M}(v_0-v_x) \tag{9}$$

$$V_{Bx}=0 \tag{10}$$

利用⑧⑨⑩式，碰撞后系统的动能为

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}M(V_{Ax}^2+V_{Ay}^2)+\frac{1}{2}M(V_{Bx}^2+V_{By}^2)\\&=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}M(V_{Ax}^2+2V_{Ay}^2)\\&=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v_0-v_x)^2+\frac{2M+m}{4M}mv_y^2\end{aligned} \tag{11}$$

（解法二）

取碰前 B 球所在位置 O 为原点，建立坐标系（如图）。设碰撞后，小球 C 的运动速率为$\boldsymbol{v}$，细杆中心的运动速度为$\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}$，细杆绕中心转动的角速度为$\omega$。碰撞前后系统的动量及其对细杆中心的角动量都守恒，有

$$mv_0=mv_x+2MV_{Cx} \tag{1}$$

$$0=mv_y+2MV_{Cy} \tag{2}$$

$$m\frac{L}{2}v_0=m\frac{L}{2}v_x+2M\left(\frac{L}{2}\omega\right)\frac{L}{2} \tag{3}$$

式中，v_x 和 v_y 表示球 C 碰后的沿 x 方向和 y 方向的速度分量。由①②③式得

$$V_{cx}=\frac{m}{2M}(v_0-v_x) \tag{4}$$

$$V_{Cy}=-\frac{m}{2M}v_y \tag{5}$$

$$\omega=\frac{m}{ML}(v_0-v_x) \tag{6}$$

碰撞后系统的动能为

$$E=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}(2M)(V_{Cx}^2+V_{Cy}^2)+2\times\frac{1}{2}M\left(\omega\frac{L}{2}\right)^2 \tag{7}$$

利用④⑤⑥式，系统动能⑦式可表示成

$$E=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v_0-v_x)^2+\frac{2M+m}{4M}mv_y^2 \tag{8}$$

（2）解法（一）的⑪式或者解法（二）的⑧式即为

$$E=\frac{1}{2}\frac{(M+m)m}{M}\left(v_x-\frac{m}{M+m}v_0\right)^2+\frac{2M+m}{4M}mv_y^2+\frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v_0^2 \tag{12}$$

可见，在条件

$$\begin{aligned}v_x&=\frac{m}{M+m}v_0,\\v_y&=0\end{aligned} \tag{13}$$

下，碰后系统动能达到其最小值

$$E=\frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v_0^2 \tag{14}$$

它是小球仅与球 A 做完全非弹性碰撞后系统所具有的动能。

评分参考：第（1）问 10 分，（解法一）①②③④⑤⑦⑧⑨⑩⑪式各 1 分；（解法二）①②式各 1 分，③式 2 分，④⑤⑥各 1 分，⑦式 2 分，⑧式 1 分；第（2）问 5 分，⑫⑬式各 2 分，⑭式 1 分。

三、（20 分）

（1）设圆环的质量为 m，它在碰撞过程中受到的地面对它的水平冲量为 I_t；碰撞后圆环质心的速度大小为 v，v 与竖直向上方向的夹角（按如图所示的顺时针方向计算）为 β，圆环的角速度为 ω。规定水平向右方向和顺时针方向分别为水平动量和角速度的正方向。在水平方向，由动量定理有

$$mv\sin\beta - mv_0\sin\theta = I_t \qquad ①$$

由对质心的动量矩定理有

$$rm(r\omega) - rm(r\omega_0) = -rI_t \qquad ②$$

按题意，圆环在弹起前刚好与地面无相对滑动，因而此时圆环上与地面的接触点的水平速度为零，即

$$v\sin\beta - r\omega = 0 \qquad ③$$

由题意知

$$\frac{0 - v\cos\beta}{v_0\cos\theta - 0} = k \qquad ④$$

联立①②③④式得

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2v_0^2\cos^2\theta + (r\omega_0 + v_0\sin\theta)^2} \qquad ⑤$$

$$\tan\beta = -\frac{1}{2k}(\tan\theta + \frac{r\omega_0}{v_0\cos\theta}) \qquad ⑥$$

$$\omega = \frac{1}{2r}(r\omega_0 + v_0\sin\theta) \qquad ⑦$$

（2）若圆环与地面碰后能竖直弹起，则其速度与竖直方向的夹角

$$\beta = 0$$

将上式代入⑥式得，使圆环在与地面碰后能竖直弹起的条件为

$$\sin\theta = -\frac{r\omega_0}{v_0} \qquad ⑧$$

在此条件下，在与地面刚刚碰后的瞬间有

$$\omega = 0，\quad v = -v_0k\cos\theta \qquad ⑨$$

即圆环做竖直上抛运动。圆环上升的最大高度为

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2k^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{k^2(v_0^2 - r^2\omega_0^2)}{2g} \qquad ⑩$$

（3）由于忽略空气阻力，圆环再次弹起后，角速度保持为 ω 不变，质心做以初速度为 v 的斜抛运动。圆环第二次落地点到首次落地点之间的水平距离 s 随 θ 变化的函数关系式为

$$s = \frac{v^2\sin 2\beta}{g} = -\frac{kv_0\cos\theta}{g}(v_0\sin\theta + r\omega_0) \qquad ⑪$$

s 取最大值时，θ 的取值 $\bar{\theta}$ 满足

$$\left.\frac{ds}{d\theta}\right|_{\bar{\theta}} = -\frac{kv_0}{g}(v_0\cos 2\bar{\theta} - r\omega_0\sin\bar{\theta}) = 0 \qquad ⑫$$

由得⑫式得

$$\sin\bar{\theta} = \frac{-r\omega_0 \pm \sqrt{r^2\omega_0^2 + 8v_0^2}}{4v_0} \qquad ⑬$$

将⑬代入⑪式得

$$s_1=\frac{k(\sqrt{r^2\omega_0^2+8v_0^2}+3r\omega_0)\sqrt{8v_0^2-2r\omega_0(r\omega_0-\sqrt{r^2\omega_0^2+8v_0^2})}}{16g} \qquad ⑭$$

$$s_2=-\frac{k(\sqrt{r^2\omega_0^2+8v_0^2}-3r\omega_0)\sqrt{8v_0^2-2r\omega_0(r\omega_0+\sqrt{r^2\omega_0^2+8v_0^2})}}{16g} \qquad ⑮$$

式中 s_1 和 s_2 分别对应于⑬式右端根号前取正和负号的情形。由以上两式可知，s 的最大值为

$$s_{\max}=\frac{k(\sqrt{r^2\omega_0^2+8v_0^2}+3r|\omega_0|)\sqrt{8v_0^2-2r|\omega_0|(r|\omega_0|-\sqrt{r^2\omega_0^2+8v_0^2})}}{16g} \qquad ⑯$$

又因为

$$-1<\sin\bar{\theta}<1$$

由上式得，当 s 取最大值时，r、v_0 和 ω_0 应满足

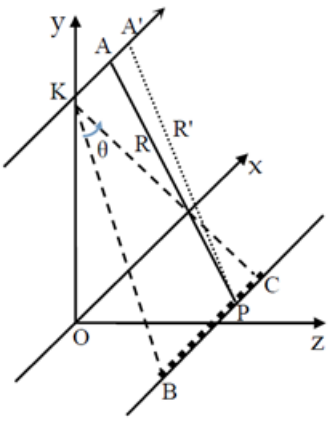
$$v_0>r|\omega_0| \qquad ⑰$$

评分参考：第（1）问 9 分，①②式各 2 分，③④⑤⑥⑦式各 1 分；第（2）问 4 分，⑧⑨式各 1 分，⑩式 2 分；第（3）问 7 分，⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰式各 1 分。

四、（25 分）

（1）解法（一）

按照题给坐标系，设待测点 P 的位置为 $(x_P,0,a)$，飞机在 $t=0$ 时所在点 K 的位置为 $(0,h,0)$。在时刻 t_1，飞机所在位置 A 点的坐标为 $(x_1=x_A,h,0)$，机载雷达此时发出一光信号；该信号到达 P 点，经反射后，于时刻 t_2 返回至飞机的机载雷达被接受，此时飞机的机载雷达的位置为 $(x_2=x_{A'},h,0)$，如图所示。由于光速不变，飞机做匀速直线运动，有



图（a）

$$\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_2-x_P)^2}=c(t_2-t_1) \qquad ①$$

$$x_2-x_1=v(t_2-t_1) \qquad ②$$

式中 $R_0=\sqrt{h^2+a^2}$。现设在时刻 t_1'，飞机所在位置 A 点的坐标为 $(x_1',h,0)$，机载雷达此时发出另一光信号；该信号到达 P 点，经反射后，于时刻 t_2' 返回至飞机的机载雷达被接受，此时飞机的机载雷达的位置为 $(x_2',h,0)$。同理有

$$\sqrt{R_0^2+(x_1'-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_2'-x_P)^2}=c(t_2'-t_1') \qquad ③$$

$$x_2'-x_1'=v(t_2'-t_1') \qquad ④$$

$$x_1'-x_1=v(t_1'-t_1) \qquad ⑤$$

$$x_2'-x_2=v(t_2'-t_2)$$

由①②式和 $v\ll c$ 得

$$\begin{aligned}t_2-t_1&=\frac{1}{c}\left[\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P+x_2-x_1)^2}\right]\\&=\frac{1}{c}\left[\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2+2(x_2-x_1)(x_1-x_P)+(x_2-x_1)^2}\right]\\&=\frac{1}{c}\left[\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2+2v(t_2-t_1)(x_1-x_P)+v^2(t_2-t_1)^2}\right]\\&\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}{c}+\frac{x_1-x_P}{\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}\frac{v}{c}(t_2-t_1)\end{aligned} \qquad ⑥$$

上式右端已略去了 $(v/c)^2$ 级的高阶项。由⑥式解得

$$t_2-t_1\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}}{c}\frac{1}{1-\dfrac{v}{c}\dfrac{x_1}{\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}}}$$

$$\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}}{c}\left(1+\frac{v}{c}\frac{x_1-x_\mathrm{P}}{\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}}\right) \qquad ⑦$$

$$=\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}}{c}+\frac{2v}{c^2}(x_1-x_\mathrm{P})$$

同理，由③④式和 $v<<c$ 得

$$t_2'-t_1'\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1'-x_\mathrm{P})^2}}{c}+\frac{2v}{c^2}(x_1'-x_\mathrm{P}) \qquad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$(t_2'-t_2)-(t_1'-t_1)\approx\frac{2}{c}\left(\sqrt{R_0^2+(x_1'-x_\mathrm{P})^2}-\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}\right)+\frac{2v}{c^2}(x_1'-x_1) \qquad ⑨$$

利用⑤式，⑨式成为

$$(t_2'-t_2)-(t_1'-t_1)$$

$$\approx\frac{2}{c}\left(\sqrt{R_0^2+[x_1-x_\mathrm{P}+v(t_1'-t_1)]^2}-\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}\right)+\frac{2v^2}{c^2}(t_1'-t_1) \qquad ⑩$$

$$\approx\frac{2(x_1-x_\mathrm{P})}{\sqrt{R_0^2+(x_1-x_\mathrm{P})^2}}\frac{v}{c}(t_1'-t_1)$$

上式右端已略去了 $(v/c)^2$ 级的高阶项。令

$$t_1'-t_1=T_0 \qquad ⑪$$

式中，T_0 为机载雷达在发射的光信号的周期，则

$$t_2'-t_2=T \qquad ⑫$$

是机载雷达接受到相应的光信号的周期。⑩式可写成

$$T-T_0=\frac{2(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{P})}{\sqrt{R_0^2+(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{P})^2}}\frac{v}{c}T_0 \qquad ⑬$$

或

$$f_\mathrm{D}\equiv f-f_0=-\frac{2(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{P})}{\sqrt{R_0^2+(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{P})^2}}\frac{v}{c}f_0 \qquad ⑭$$

式中 x_1 已用 x_A 替代，而

$$f=\frac{1}{T},\quad f_0=\frac{1}{T_0}$$

是相应的光信号的频率，f_D 是接收到的回波信号的频率与发出信号的频率之差（频移）。⑭式也可写为

$$f_\mathrm{D}\equiv f-f_0=-2\frac{v}{c}f_0\cos\alpha \qquad ⑭$$

式中

$$\cos\alpha\equiv\frac{x_\mathrm{A}-x_\mathrm{P}}{\sqrt{R_0^2+(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{P})^2}}$$

即 α 为从机载雷达射出的光线与飞机航线之间的夹角。

解法（二）

取航线 KA 和直线 BC 所构成的平面为新的坐标平面。K 为坐标原点，航线 KA 为 x 轴，从 K 指向 BC 与 Z 轴交点的直线为 y 轴；在时刻 t_1，飞机所在位置 A 点的坐标为 $(x_1=x_\mathrm{A},0)$；目标点 P 的位置 (x_P,R_0) 在这个坐标系里是固定的。

设机载雷达于时刻t发出的发射信号的相位为

$$\Phi(t)=\omega_0 t+\varphi$$

式中ω_0和φ分别是相应的角频率和初相位。机载雷达于时刻t_1在A′点$(x_2=x_{A'}(t_1),0)$接收到的经P反射的信号是机载雷达于时刻$t_1-\tau$在A点$(x_1=x_A(t_1-\tau),0)$发出的，其相位为

$$\Phi'(t_1)=\omega_0(t_1-\tau)+\varphi \qquad ①$$

式中τ为信号往返过程所需的时间，它满足

$$\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_2-x_P)^2}=c\tau \qquad ②$$

$$x_2-x_1=v\tau \qquad ③$$

经过时间间隔Δt，同理有

$$\Phi'(t_1+\Delta t)=\omega_0(t_1+\Delta t-\tau')+\varphi \qquad ④$$

$$\sqrt{R_0^2+(x_1'-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_2'-x_P)^2}=c\tau' \qquad ⑤$$

$$x_2'-x_1'=v\tau' \qquad ⑥$$

另外，由于同样的原因（飞机作匀速直线运动），还有

$$x_1'-x_1=v\Delta t \qquad ⑦$$

$$x_2'-x_2=v\Delta t$$

设机载雷达收到的信号的圆频率为ω，则应有

$$\Phi'(t_1+\Delta t)-\Phi'(t_1)=\omega\Delta t \qquad ⑧$$

由②③式和$v\ll c$得

$$\tau=\frac{1}{c}\left[\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P+x_2-x_1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{c}\left[\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2+2(x_2-x_1)(x_1-x_P)+(x_2-x_1)^2}\right] \qquad ⑨$$

$$=\frac{1}{c}\left[\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}+\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2+2v\tau(x_1-x_P)+v^2\tau^2}\right]$$

$$\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}{c}+\frac{x_1-x_P}{\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}\frac{v}{c}\tau$$

上式右端已略去了$(v/c)^2$级的高阶项。由⑨式解得

$$\tau\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}{c}\frac{1}{1-\frac{v}{c}\frac{x_1}{\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}}$$

$$\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}{c}\left(1+\frac{v}{c}\frac{x_1-x_P}{\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}\right) \qquad ⑩$$

$$=\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1-x_P)^2}}{c}+\frac{2v}{c^2}(x_1-x_P)$$

同理，由⑤⑥式和$v\ll c$得

$$\tau'\approx\frac{2\sqrt{R_0^2+(x_1'-x_P)^2}}{c}+\frac{2v}{c^2}(x_1'-x_P) \qquad ⑪$$

由①④⑧式得

$$\omega\Delta t=\omega_0(\Delta t-\tau')-\omega_0(-\tau) \qquad ⑫$$

将

$$\omega=2\pi f \qquad ⑬$$

代入⑫式，利用⑦⑩⑪式，在Δt很小的情形下，略去Δt的高阶项，得

$$f_D\equiv f-f_0=-\frac{2(x_A-x_P)}{\sqrt{R_0^2+(x_A-x_P)^2}}\frac{v}{c}f_0 \qquad ⑭$$

或

$$f_{\mathrm{D}} \equiv f - f_0 = -2\frac{v}{c} f_0 \cos\alpha \qquad ⑭$$

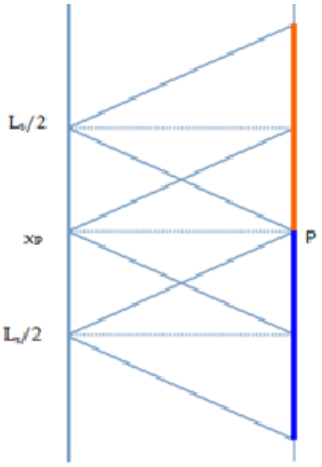
式中

$$\cos\alpha \equiv \frac{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{P}}}{\sqrt{R_0^2 + (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{P}})^2}}$$

即 α 为从机载雷达射出的光线与飞机航线之间的夹角。

（2）由于机载雷达天线发射的无线电波束面的张角的限制（见图（b）），有

$$\frac{\pi}{2} - \frac{L_s/2}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} + \frac{L_s/2}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \qquad ⑮$$



图（b）

频移 f_{D} 分别为正、零或负的条件是：

当 $\alpha < \pi/2$ （ $x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{P}}$ ）时，频移 $f_D > 0$；

当 $\theta = \pi/2$ （ $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{P}}$ ）时，即机载雷达发射信号时正好位于 P 点到航线的垂足处，频移

$$f_{\mathrm{D}} = 0 \qquad ⑯$$

当 $\theta > \pi/2$ （ $x_{\mathrm{A}} > x_{\mathrm{P}}$ ）时，频移 $f_D < 0$。

当 $\alpha = \pi/2 - L_s/2\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}$ （ $x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{P}} = -L_s/2$ ）时，即机载雷达发射信号时正好位于 $(x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{P}} - L_s/2, h, 0)$ 处，正的频移最大

$$f_{\mathrm{D1}} = \frac{L_s}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \frac{v}{c} f_0 \qquad ⑰$$

当 $\alpha = \pi/2 + L_s/2\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}$ （ $x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{P}} = L_s/2$ ）时，即机载雷达发射信号时正好位于 $(x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{P}} + L_s/2, h, 0)$ 处，负的频移的绝对值最大

$$f_{\mathrm{D2}} = -\frac{L_s}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \frac{v}{c} f_0 \qquad ⑱$$

（3）在飞机持续发射的无线电波束前沿 BC 全部通过目标 P 点过程中，多普勒频移的带宽为

$$\Delta f_D \equiv |f_{D1} - f_{D2}| = \frac{2L_s}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \frac{v}{c} f_0 = 4\frac{v}{c} f_0 \sin\frac{\theta}{2} \qquad ⑲$$

由于 $R_0 >> L_s$，有 $\theta << 1$，故

$$\sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$$

将上式代入到⑲式得

$$\Delta f_D = f_0 \frac{2v}{c}\theta \qquad ⑳$$

评分参考：第（1）问 16 分，

(解法一) ①式 2 分，②式 1 分，③式 2 分，④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭式各 1 分；

(解法二) ①式 1 分，②式 2 分，③④式各 1 分，⑤式 2 分，⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭式各 1 分；

第（2）问 6 分，⑮式 2 分，频移 f_{D} 分别为正、零或负的条件正确（包括⑯式）给 2 分，⑰⑱式各 1 分；

第（3）问 3 分， ⑲式 2 分，⑳式 1 分。

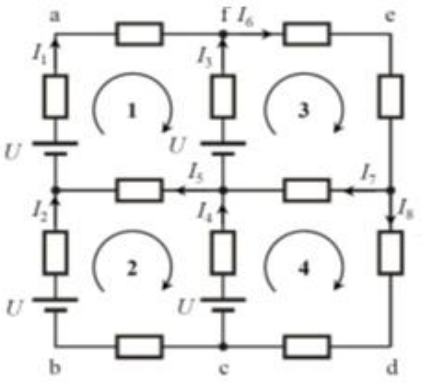
五、（20 分）

在 de 边未出磁场的过程中，ab、cf 和 de 三边切割磁力线运动，每条边产生的感应电动势相等，但感应电流为零，故不需要外力做功

$$W_1 = 0 \qquad ①$$

在 de 边出磁场但 cf 边未出磁场过程中，ab 和 cf 两条边做切割磁力线运动，导线框的等效电路如图 a 所示。等效电路中每个电阻的阻值 R=1.0Ω。按如图所示电流方向，根据基尔霍夫第一定律可得

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_6, \\ I_2 + I_5 = I_1, \\ I_6 = I_7 + I_8, \\ I_4 + I_7 = I_3 + I_5. \end{cases} \qquad ②$$



图a

由基尔霍夫第二定律，对 4 个回路可列出 4 个独立方程

$$\begin{cases} U - 2I_1R + I_3R - U - I_5R = 0, \\ U - 2I_2R + I_5R - U + I_4R = 0, \\ U - I_3R - 2I_6R - I_7R = 0, \\ U - I_4R + I_7R - 2I_8R = 0. \end{cases} \qquad ③$$

式中，感应电动势 U 为

$$U = blv = 0.20\text{V} \qquad ④$$

联立②③④式得：

$$I_1 = I_2 = 0.025\text{A} \qquad ⑤$$

$$I_3 = I_4 = 0.050\text{A} \qquad ⑥$$

此时，ab 边和 ed 边所受的安培力大小分别为

$$F_{ab} = BI_1l_{ab} = 0.0050\text{N} \qquad ⑦$$

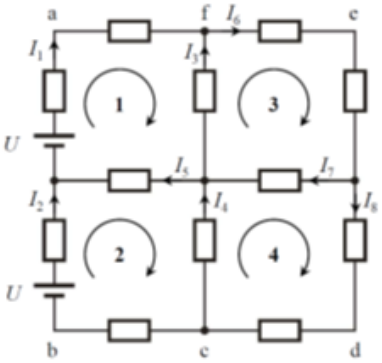
$$F_{cf} = BI_3l_{cf} = 0.010\text{N} \qquad ⑧$$

式中 l_{ab} 和 l_{ed} 分别为 ab 边和 ed 边的长度。外力所做的功为

$$W_2 = F_{ab}l_{ef} + F_{cf}l_{ef} = 0.0015\text{J} \qquad ⑨$$

式中 l_{ef} 表示 ef 边的长度。

在 cf 边移出磁场后，只有边 ab 切割磁力线运动产生感应电动势。此时，等效电路如图 b 所示，电路中电动势的大小和电阻阻值不变。根据基尔霍夫定律可得



图b

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_6, \\ I_2 + I_5 = I_1, \\ I_6 = I_7 + I_8, \\ I_4 + I_7 = I_3 + I_5. \end{cases} \qquad ⑩$$

和

$$\begin{cases} U - 2I_1R + I_3R - I_5R = 0, \\ U - 2I_2R + I_5R + I_4R = 0, \\ -I_3R - 2I_6R - I_7R = 0, \\ -I_4R + I_7R - 2I_8R = 0. \end{cases} \qquad ⑪$$

联立⑩⑪式得

$$I_1 = I_2 = 0.075\text{A} \qquad ⑫$$

此时，ab 边受到的安培力为

$$F_{ab} = BI_1l_{ab} = 0.015\text{N} \qquad ⑬$$

外力所做的功为

$$W_3 = F_{ab}l_{af} = 0.0015\text{J} \qquad ⑭$$

整个过程中外力做的功为

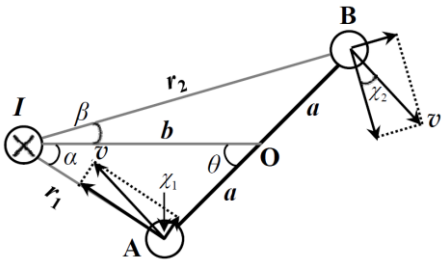
$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0.0030\text{J} \qquad ⑮$$

评分参考：①式 1 分，②③④式各 2 分，⑤⑥⑦⑧⑨式各 1 分，⑩⑪式各 2 分，⑫⑬⑭⑮式各 1 分。

六、（23 分）

（1）设 t 时刻导线框平面与长直导线和转轴组成平面之间的夹角为 θ 的值为 $\theta=\omega t$，如图 a 所示（俯视图），导线框旋转过程中只有左、右两边（图中分别用 A、B 表示）切割磁力线产生感应电动势。A、B 两条边的速度大小相等，

$$v = \omega a \qquad ①$$



图a

A、B 处对应的磁感应强度大小分别为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \qquad ②$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \qquad ③$$

其中，μ_0 为真空磁导率，r_1、r_2 分别为 A 和 B 到长直导线的垂直距离。A、B 两边对应的感应电动势分别为

$$E_1 = B_1 2av\sin\chi_1 = \frac{\omega a^2 \mu_0 I}{\pi r_1}\sin\chi_1$$

$$E_2 = B_2 2av\sin\chi_2 = \frac{\omega a^2 \mu_0 I}{\pi r_2}\sin\chi_2 \qquad ④$$

式中 $\frac{\pi}{2}-\chi_1$、$\frac{\pi}{2}-\chi_2$ 分别为 A、B 的速度方向与 r_1、r_2 的夹角。 根据几何关系得

$$\chi_1 = \theta + \alpha$$
$$\chi_2 = \theta - \beta \qquad ⑤$$

其中 α、β 分别为 r_1、r_2 与 x 方向的夹角。⑤式代入④式得导线框中的感应电动势为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\omega a^2 \mu_0 I_1}{\pi}\left[\frac{\sin(\theta+\alpha)}{r_1} + \frac{\sin(\theta-\beta)}{r_2}\right] \qquad ⑥$$

根据几何关系及三角形余弦定理得 α、β、r_1、r_2 与 a、b、θ 之间的关系为

$$\begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{b - a\cos\theta}{r_1} \\ \sin\alpha = \dfrac{a\sin\theta}{r_1}\end{cases} \qquad ⑦$$

$$\begin{cases}\cos\beta = \dfrac{b + a\cos\theta}{r_2} \\ \sin\beta = \dfrac{a\sin\theta}{r_2}\end{cases} \qquad ⑧$$

$$\begin{cases}r_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \\ r_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta\end{cases} \qquad ⑨$$

将⑦⑧⑨式代入⑥式得导线框的感应电动势为

$$E=\frac{\omega a^2\mu_0 Ib\sin\theta}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\right)$$
$$=\frac{a^2b\mu_0 I\omega\sin\omega t}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}\right) \quad ⑩$$

（2）（解法一）

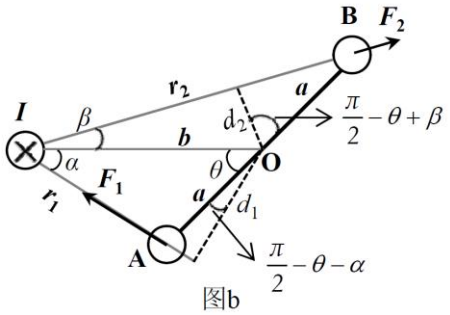
导线框在电流 I 的磁场中旋转，受到安培力相对于轴的合力矩 M_0 的作用，要使导线框保持角速度为 ω 的匀速旋转，所加的外力矩 M 必须满足

$$M+M_0=0 \quad ⑪$$

正方形导线框上、下两边所受安培力的方向与转轴平行，力矩为零，只有导线框左、右两边（分别用 A、B 表示）受到的安培力 F_1 和 F_2 对合力矩有贡献，如图 b 所示（俯视图）。由②③式和安培力公式得 F_1 和 F_2 的大小为

$$F_1=2aiB_1=\frac{\mu_0 aIi}{\pi r_1} \quad ⑫$$

$$F_2=2aiB_2=\frac{\mu_0 aIi}{\pi r_2} \quad ⑬$$



图b

式中 i 为导线框中的感应电流。由欧姆定律有

$$i=\frac{E}{R}=\frac{\omega a^2\mu_0 Ib\sin\omega t}{\pi R}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}\right) \quad ⑭$$

安培力的合力矩为

$$M_0=F_1d_1+F_2d_2$$
$$=F_1a\cos(\frac{\pi}{2}-\theta-\alpha)+F_2a\cos(\frac{\pi}{2}-\theta+\beta)$$
$$=F_1a\sin(\theta+\alpha)+F_2a\sin(\theta-\beta) \quad ⑮$$
$$=\frac{\mu_0 a^2Ii}{\pi}\left[\frac{\sin(\theta+\alpha)}{r_1}+\frac{\sin(\theta-\beta)}{r_2}\right]$$

其中，d_1 和 d_2 分别为 F_1 和 F_2 与转轴之间的垂直距离，$\frac{\pi}{2}-\theta-\alpha$ 和 $\frac{\pi}{2}-\theta+\beta$ 分别为 d_1 和 d_2 与 A、B 连线之间的夹角。

将⑦⑧⑨⑭式代入⑮式得需要加的外力矩为

$$M=-M_0=-\frac{\mu_0 a^2Iib\sin\omega t}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}\right)$$
$$=-\frac{\mu_0^2a^4b^2I^2\omega\sin^2\omega t}{\pi^2R}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}\right)^2 \quad ⑯$$
$$=-\frac{4\mu_0^2a^4b^2I^2\omega}{\pi^2R}\left(\frac{(a^2+b^2)\sin\omega t}{(a^2+b^2)-4a^2b^2\cos^2\omega t}\right)^2$$

（2）（解法二）

导线框在电流 I 的磁场中旋转，受到安培力相对于轴的合力矩 M_0 的作用，要使导线框保持角速度为 ω 的匀速旋转，所加的外力矩 M 必须满足

$$M+M_0=0 \quad ⑪$$

此时，安培力的合力矩的功率 P_0 应与导线框中感应电流的功率 P_i 相等，即

$$P_0=P_i \quad ⑫$$

式中

$$P_i=\frac{E^2}{R}=\frac{\omega^2a^4\mu_0^2I^2b^2\sin^2\omega t}{\pi^2R}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}\right)^2 \quad ⑬$$

安培力的合力矩为

$$M_0=\frac{P_0}{\omega}=\frac{P_i}{\omega}=\frac{\omega a^4\mu_0^2I^2b^2\sin^2\omega t}{\pi^2R}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}\right)^2 \quad ⑭$$

由⑪式可得，外力矩 M 为

$$M=-M_0=-\frac{\omega a^4\mu_0^2I^2b^2\sin^2\omega t}{\pi^2R}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}\right)^2$$

$$=-\frac{4\mu_0^2a^4b^2I^2\omega}{\pi^2R}\left(\frac{(a^2+b^2)\sin\omega t}{(a^2+b^2)-4a^2b^2\cos^2\omega t}\right)^2 \quad ⑮$$

评分参考：第（1）问 13 分，①②③式各 1 分，④式 2 分，⑤式 1 分，⑥式 2 分，⑦⑧⑨式各 1 分，⑩式 2 分； 第（2）问 10 分，（解法一）⑪⑫式各 2 分，⑬⑭式各 1 分，⑮⑯式各 2 分；（解法二）⑪⑫⑬⑭⑮式各 2 分。

七、（22 分）

（1）根据热力学第一定律，有

$$dU=\delta Q+\delta W \quad ①$$

这里，对于 1mol 理想气体经历的任一缓慢变化过程中，δQ，δW 和 dU 可分别表示为

$$\delta Q=C_\pi dT,\ \delta W=-pdV,\ dU=C_V dT \quad ②$$

将理想气体状态方程

$$pV=RT$$

两边对 T 求导，可得

$$p\frac{dV}{dT}+V\frac{dp}{dV}\frac{dV}{dT}=R \quad ③$$

式中利用了

$$\frac{dp}{dT}=\frac{dp}{dV}\frac{dV}{dT}$$

根据③式有

$$\frac{dV}{dT}=\frac{R}{p+V\frac{dp}{dV}} \quad ④$$

联立①②④式得

$$C_\pi=C_V+\frac{pR}{p+V\frac{dp}{dV}} \quad ⑤$$

（2）设 bc' 过程方程为

$$p=\alpha-\beta V \quad ⑥$$

根据

$$C_\pi=C_V+\frac{pR}{p+V\frac{dp}{dV}}$$

可得该直线过程的摩尔热容为

$$C_\pi=C_V+\frac{\alpha-\beta V}{\alpha-2\beta V}R \quad ⑦$$

式中，C_V 是单原子理想气体的定容摩尔热容，$C_V=\frac{3}{2}R$。对 bc' 过程的初态 $(3p_1,V_1)$ 和终态 $(p_1,5V_1)$，有

$$\begin{aligned}3p_1&=\alpha-\beta V_1\\ p_1&=\alpha-5\beta V_1\end{aligned} \quad ⑧$$

由⑧式得

$$\alpha=\frac{7}{2}p_1,\ \beta=\frac{p_1}{2V_1} \tag{⑨}$$

由⑥⑦⑧⑨式得

$$C_\pi=\frac{8V-35V_1}{4V-14V_1}R \tag{⑩}$$

（3）根据过程热容的定义有

$$C_\pi=\frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{⑪}$$

式中，ΔQ 是气体在此直线过程中，温度升高 ΔT 时从外界吸收的热量。由⑩⑪式得

$$\Delta T=\frac{4V-14V_1}{8V-35V_1}\frac{\Delta Q}{R} \tag{⑫}$$

$$\Delta Q=\frac{8V-35V_1}{4V-14V_1}R\Delta T \tag{⑬}$$

由⑫式可知，bc' 过程中的升降温的转折点 A 在 p-V 图上的坐标为

$$A\left(\frac{7}{2}V_1,\frac{7}{4}p_1\right) \tag{⑭}$$

由⑬式可知，bc' 过程中的吸放热的转折点 B 在 p-V 图上的坐标为

$$B\left(\frac{35V_1}{8},\frac{21p_1}{16}\right) \tag{⑮}$$

（4）对于 $abcda$ 循环过程，ab 和 bc 过程吸热，cd 和 da 过程放热

$$\begin{aligned}Q_{ab}&=nC_V\left(T_b-T_a\right)=1.5\left(RT_b-RT_a\right)=3p_1V_1\\Q_{bc}&=nC_p\left(T_b-T_a\right)=2.5\left(RT_c-RT_b\right)=15p_1V_1\end{aligned} \tag{⑯}$$

式中，已利用已知条件 $n=1\text{mol}$，单原子理想气体定容摩尔热容 $C_V=\frac{3}{2}R$，定压摩尔热容 $C_p=\frac{5}{2}R$。气体在 $abcda$ 循环过程的效率可表示为循环过程中对外做的功除以总吸热，即

$$\eta_{abcda}=\frac{W_{abcda}}{Q_{ab}+Q_{bc}}=\frac{4p_1V_1}{18p_1V_1}=0.22 \tag{⑰}$$

对于 $abc'a$ 循环过程，ab 和 bB 过程吸热，Bc' 和 $c'a$ 过程放热。由热力学第一定律可得，bB 过程吸热为

$$Q_{bc'}=\Delta U_{bB}-W_{bB}=nC_V\left(T_B-T_b\right)+\frac{1}{2}\left(p_B+3p_1\right)\left(V_B-V_1\right)=11.39p_1V_1 \tag{⑱}$$

所以，循环过程 $abc'a$ 的效率为

$$\eta_{abc'a}=\frac{W_{abc'a}}{Q_{ab}+Q_{bc'}}=\frac{4p_1V_1}{14.39p_1V_1}=0.278 \tag{⑲}$$

由⑰⑲式可知

$$\eta_{abc'a}>\eta_{abcda} \tag{⑳}$$

评分参考：第（1）问 5 分，①②③④⑤式各 1 分；第（2）问 5 分，⑥⑦⑧⑨⑩式各 1 分；第（3）问 7 分，⑪式 1 分，⑫⑬式各 2 分，⑭⑮式各 1 分；第（4）问 5 分，⑯⑰⑱⑲⑳式各 1 分。

八、（20 分）

（1）对于光线在波导层和衬底层的折射情况，根据折射定律有

$$n_1\sin\theta_{i1}=n_0\sin\theta_{t0} \tag{①}$$

若要求光线不会折射到衬底中，即发生全反射，应有

$$\theta_{i1} \geq \theta_{10\,C} \qquad ②$$

式中，$\theta_{10\,C}$ 为光线在波导层和衬底层的交界面上发生全反射的临界角

$$\theta_{10\,C} = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right) \qquad ③$$

同理应有

$$\theta_{i2} \geq \theta_{12\,C} \qquad ④$$

式中，$\theta_{12\,C}$ 为光线在波导层和衬底层的交界面上发生全反射的临界角

$$\theta_{12\,C} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad ⑤$$

由题设 $n_1 > n_0 \geq n_2$，可知

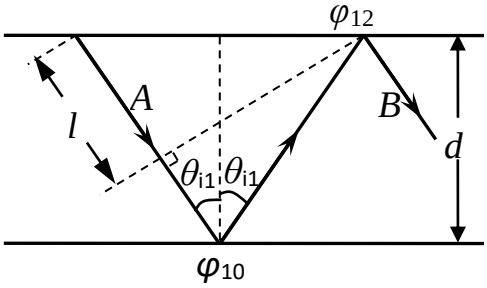
$$\theta_{10\,C} \geq \theta_{12\,C} \qquad ⑥$$

00251786240251785216251781120251782144251783168251784192 所以，当入射角 $\theta_{i1} \geq \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right)$ 时，光被完全限制在波导薄膜里。

（2）考虑光波在波导薄膜中传播时处于临界的全反射状态。此时光波的波长可由光的入射角

$$\theta_{i1} = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right)$$

决定。此时光在介质 n_1 与 n_0 交界面的反射处于全反射的临界状态，光在介质 n_1 与 n_2 交界面的反射也为全反射。如右图所示，φ_{10} 和 φ_{12} 分别为 1 和 0 界面以及 1 和 2 界面上的反射引入的相位（$r_{10} = e^{-i\varphi_{10}}$ 和 $r_{12} = e^{-i\varphi_{12}}$）。



过 1 和 2 界面上的反射点做直线（虚线）垂直于光线 A，设光线 A 到虚线之前的路程长为 l。此后，光线 A 与再经过两次反射的光线 B 之间的相位差应该为 2π 的整数倍，以致光可在波导薄膜中传输。故

$$\begin{aligned} 2m\pi &= \frac{2d\sec\theta_{i1} - l}{\lambda} 2\pi - \varphi_{10} - \varphi_{12} \\ &= \frac{2d\sec\theta_{i1} - 2d\tan\theta_{i1}\sin\theta_{i1}}{\lambda} 2\pi - \varphi_{10} - \varphi_{12} \\ &= \frac{4d\pi\cos\theta_{i1}}{\lambda} - \varphi_{10} - \varphi_{12} \\ &= \frac{4d\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}} - \varphi_{10} - \varphi_{12} \end{aligned} \qquad ⑦$$

式中，$m = 0,1,2,3,\cdots$，λ 为所传输光波在波导薄膜介质中的波长。

考虑介质 n_1 与 n_0 交界面的反射，由①式得

$$\sin\theta_{t0} = \frac{n_1\sin\theta_{i1}}{n_0} = 1 \qquad ⑧$$

考虑到⑧式，在介质 n_1 与 n_0 交界面的反射系数为

$$r_{10} = \frac{n_1\cos\theta_{i1} - n_0\cos\theta_{t0}}{n_1\cos\theta_{i1} + n_0\cos\theta_{t0}} = \frac{n_1\cos\theta_{i1}}{n_1\cos\theta_{i1}} = 1 \qquad ⑨$$

由上式可以得到介质 n_1 与 n_0 交界面的反射相位

$$\varphi_{10} = 0 \qquad ⑩$$

再考虑介质 n_1 与 n_2 交界面的反射，由①式得

$$\sin\theta_{t2} = \frac{n_1\sin\theta_{i1}}{n_2} = \frac{n_0}{n_2} \qquad ⑪$$

按照题给的推广的定义，上式右边大于或等于 1 也并不奇怪。当 $n_0 > n_2$ 时，按照题给的推广的正弦和余弦的定义可知，$\cos\theta_{t2}$ 是一个纯虚数，可以写为

$$\cos\theta_{t2} = i\sqrt{\frac{n_0^2}{n_2^2} - 1} \qquad ⑫$$

考虑到⑫式，则在介质 n_1 与 n_2 交界面的反射系数为

$$r_{12} = \frac{n_1\cos\theta_{i1} - n_2\cos\theta_{t2}}{n_1\cos\theta_{i1} + n_2\cos\theta_{t2}} = \frac{n_1\sqrt{1-\frac{n_0^2}{n_1^2}} - n_2 i\sqrt{\frac{n_0^2}{n_2^2}-1}}{n_1\sqrt{1-\frac{n_0^2}{n_1^2}} + n_2 i\sqrt{\frac{n_0^2}{n_2^2}-1}} = \exp\left(-2i\arctan\sqrt{\frac{n_0^2-n_2^2}{n_1^2-n_0^2}}\right) \qquad ⑬$$

由上式可以得到介质 n_1 与 n_2 交界面的反射相位为

$$\varphi_{12} = 2\arctan\sqrt{\frac{n_0^2-n_2^2}{n_1^2-n_0^2}} \qquad ⑭$$

将⑩和⑭式代入到⑦式中得，在给定 m 的情况下能在薄膜波导中传输的光波在该介质中的的最长波长（截止波长）为

$$\lambda = \frac{2\pi d\sqrt{1-\frac{n_0^2}{n_1^2}}}{m\pi + \arctan\sqrt{\frac{n_0^2-n_2^2}{n_1^2-n_0^2}}} \qquad ⑮$$

式中，$m = 0,1,2,3,\cdots$。当 $m = 0$ 时可得，能在薄膜波导中传输的光波在该介质中的的最长波长为

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi d\sqrt{1-\frac{n_0^2}{n_1^2}}}{\arctan\sqrt{\frac{n_0^2-n_2^2}{n_1^2-n_0^2}}} \qquad ⑯$$

评分参考：第（1）问 10 分，①②式各 2 分，③④式各 1 分，给出“入射角 $\theta_{i1} \geq \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right)$ 时，光被完全限制在波导薄膜里”的结论给 2 分，⑤⑥式各 1 分；第（2）问 10 分，⑦式 2 分，⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯式各 1 分。