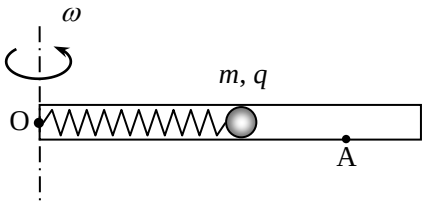
第 31 届全国中学生物理竞赛决赛

理论考试试题与参考答案

一、一转速测量和控制装置的原理如图所示．在 O 点有电量为 Q 的正电荷，内壁光滑的轻质绝缘细管可绕通过 O 点的竖直轴在水平面内转动，在管内距离 O 为 L 处有一光电触发控制开关 A，在 O 端固定有一自由长度为 $L/4$ 的轻质绝缘弹簧，弹簧另一端与一质量为 m、带有正电荷 q 的小球相连接．



开始时，系统处于静态平衡．细管在外力矩作用下，作定轴转动，小球可在细管内运动．当细管转速 ω 逐渐变大时，小球到达细管的 A 处刚好相对于细管径向平衡，并触发控制开关，外力矩瞬时变为零，从而限制转速过大；同时 O 点的电荷变为等量负电荷 $-Q$．通过测量此后小球相对于细管径向平衡点的位置 B，可测定转速．若测得 OB 的距离为 $L/2$，求

（1）弹簧系数 k_0 及小球在 B 处时细管的转速；

（2）试问小球在平衡点 B 附近是否存在相对于细管的径向微振动？如果存在，求出该微振动的周期.

参考解答：

（1）设细管的角速度 ω_A，小球在 A 点相对细管平衡时，有

$$k_0\frac{3}{4}L-k\frac{qQ}{L^2}=Lm\omega_A^2 \qquad ①$$

球在 B 点，细管的角速度 ω_B 满足

$$k_0\frac{1}{4}L+k\frac{qQ}{L^2/4}=\frac{L}{2}m\omega_B^2 \qquad ②$$

由角动量守恒有

$$mL^2\omega_A=m\frac{L^2}{4}\omega_B \qquad ③$$

则有

$$\omega_B=4\omega_A$$

代入②式得

$$k_0\frac{1}{4}L+k\frac{qQ}{L^2/4}=8Lm\omega_A^2 \qquad ④$$

由①和④式得

$$k_0=k\frac{48qQ}{23L^3} \qquad ⑤$$

代入②式得细管的角速度 ω_B 为

$$\omega_B=4\sqrt{\frac{13kqQ}{23mL^3}} \qquad ⑥$$

（2）令 $r=r_b+x$（$|x|\ll r$），相对于细管而言，小球平衡点附近所受合力为

$$F(x)=-k_0(\frac{L}{4}+x)-k\frac{qQ}{(\frac{L}{2}+x)^2}+(\frac{L}{2}+x)m\omega_x^2 \qquad ⑦$$

由角动量守恒有

$$m(\frac{L}{2}+x)^2\omega_x = m\left(\frac{L}{2}\right)^2\omega_B \qquad ⑧$$

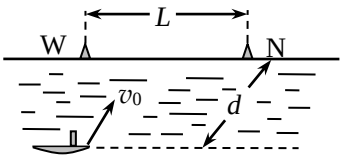
平衡点附近展开至 x 的一阶项得，小球相对于细管所受的径向合力为

$$F(x) = -(k_0 + 3m\omega_B^2 - k\frac{16qQ}{L^3})x = -\frac{304}{23}\frac{kqQ}{L^3}x \qquad ⑨$$

所以，小球在平衡点 B 附近存在相对于细管的径向微振动. 小球相对于细管的径向微振动周期为

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{23}{19}\frac{mL^3}{kqQ}} \qquad ⑩$$

二、多弹头攻击系统是破解导弹防御体系的有效手段．如图所示，假设沿某海岸有两个军事目标 W 和 N，两者相距 L，一艘潜艇沿平行于该海岸线的航线游弋，并监视这两个目标，其航线离海岸线的距离为 d．潜艇接到攻击命令后浮出海面发射一颗可分裂成多弹头的母弹，发射速度为 v_0（其大小远大于潜艇在海里游弋速度的大小），假设母弹到达最高点时分裂成三个分弹头，每个分弹头的质量相等，分离时相对原母弹的速度大小均为 v，且分布在同一水平面内，分弹头 1、2 为实弹，分弹头 3 为迷惑对方雷达探测的假弹头．如果两个实弹能够分别击中军事目标 W 和 N，试求潜艇发射母弹时的位置与发射方向，并给出相应的实现条件．



参考解答（一）：

以两个目标 W 和 N 连线的中点 O 为原点建立如图 1 的坐标系，假设潜艇发射母弹时的位置为 $(x,0,d)$，母弹发射方向的仰角为 θ（与 xoz 平面的夹角），与航线的夹角为 α（在 xoz 平面内，发射方向的投影线与 x 轴的夹角）．按题意母弹到达最高点的时间为

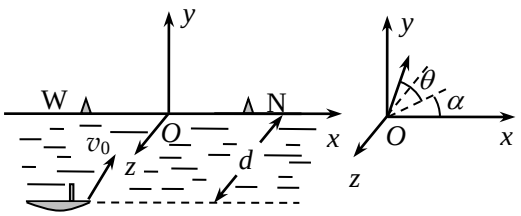


图 1

$$t = \frac{v_0\sin\theta}{g} \qquad ①$$

沿发射方向在海面上质心运动的距离（即射程）为

$$s = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \qquad ②$$

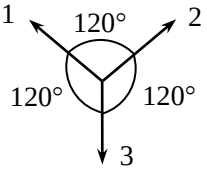


图 2

根据题意与动量守恒定律，在母弹参考系中，三个分弹头的飞行方向一定在水平面内呈对称分布，且假弹头 3 飞行方向与海岸线垂直（如图 2 所示）．分弹头 1、2 在与海岸线垂直的方向上飞行的距离为

$$d = (\frac{v}{2} + v_0\cos\theta\cdot\sin\alpha)\cdot t + v_0\cos\theta\cdot\sin\alpha\cdot t \qquad ③$$

分弹头 1 在与海岸线平行的方向上飞行的距离为

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}v - v_0\cos\theta\cdot\cos\alpha)\cdot t = (\frac{L}{2} - |x| + \frac{s}{2}\cos\alpha) \qquad ④$$

分弹头 2 在与海岸线平行的方向上飞行的距离为

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}v + v_0\cos\theta\cdot\cos\alpha)\cdot t = (|x| + \frac{L}{2} - \frac{s}{2}\cos\alpha) \qquad ⑤$$

联立①④⑤式可得

$$\sqrt{3}v\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g} = L$$

$$\sin\theta=\frac{gL}{\sqrt{3}v_0v}\qquad\cos\theta=\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}\qquad⑥$$

将①⑥式代入③式，若母弹在海面上空爆炸，有

$$d=(\frac{v}{2}+2v_0\cos\theta\cdot\sin\alpha)\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

$$\sin\alpha=\pm\frac{(2\sqrt{3}d-L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}\qquad\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9v^4\left(d-\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2}{L^2(3v_0^2v^2-g^2L^2)}}\qquad⑦$$

其中，⑦式中“+”号表示母弹发射速度的水平分量倾向海岸方向，“–”号表示母弹发射速度的水平分量背向海岸方向．将上述结果代入④或⑤式可得

$$x=\pm\sqrt{\frac{4L^2}{9v^4}(3v_0^2v^2-g^2L^2)-(d-\frac{L}{2\sqrt{3}})^2}\qquad⑧$$

为了实现所述操作，需满足的条件为

$$0<\frac{gL}{\sqrt{3}v_0v}\le1,\quad\left|\frac{(2\sqrt{3}d-L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}\right|\le1,\quad d>0\qquad⑨$$

其中前两个条件是⑦式所要求的，后一个条件是题意所给的限制.

如果母弹在陆地上空爆炸，只有⑦⑧⑨式有变化，变化后的结果为

$$x=\pm\sqrt{\frac{4L^2}{9v^4}(3v_0^2v^2-g^2L^2)-(d+\frac{L}{2\sqrt{3}})^2}\qquad⑦$$

$$\sin\alpha=\frac{(2\sqrt{3}d+L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}\qquad\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9v^4\left(d+\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2}{L^2(3v_0^2v^2-g^2L^2)}}\qquad⑧$$

$$0<\frac{gL}{\sqrt{3}v_0v}\le1,\quad\frac{(2\sqrt{3}d+L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}\le1,\quad d>0\qquad⑨$$

参考解答（二）：

以两个目标 W 和 N 连线的中点 O 为原点建立如图 1 的坐标系，假设潜艇发射母弹时的位置为 $(x,0,d)$，母弹发射方向的仰角为 θ（与 xoy 平面的夹角），与航线的夹角为 α（xoz 平面内与 x 轴的夹角），按题意母弹到达最高点的时间为

$$t=\frac{v_0\sin\theta}{g}\qquad①$$

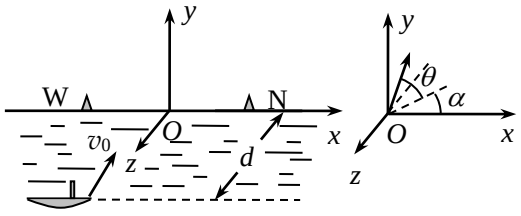


图 1

按题意多弹头母弹的运动可分解为母弹的质心运动及分弹头相对质心的运动，沿发射方向在海面上质心运动的距离（即射程）为

$$s=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}\qquad②$$

如果要求分弹头1、2能够击中军事目标（按题意，必须是同时击中），则质心必须落在两个军事目标 W 和 N 连线的垂直中分线上（海面上或

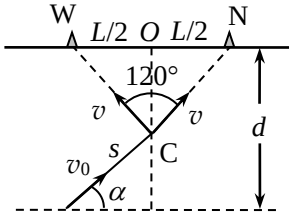


图 3

陆地上），其俯视图如图 3 所示（此处仅画出质心落点在海面上的情形）．分析可知有

$$\frac{v}{2}\cdot t=\frac{L}{2\sqrt{3}} \qquad ③$$

$$x^2+\left(d\pm\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2=s^2 \qquad ④$$

④式右端“–”号和“+”号分别对应于质心落点在海面和地面上的情形.

将①式代入③式得

$$\sin\theta=\frac{gL}{\sqrt{3}v_0v},\quad \cos\theta=\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}} \qquad ⑤$$

将①⑤式代入②式，对于质心落点在海面上的情形，有

$$s=\frac{2L}{3v^2}\sqrt{3v_0^2v^2-g^2L^2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{4L^2}{9v^4}(3v_0^2v^2-g^2L^2)-(d-\frac{L}{2\sqrt{3}})^2} \qquad ⑥$$

$$|x|=s\cos\alpha \qquad ⑦$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9v^4\left(d-\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2}{L^2(3v_0^2v^2-g^2L^2)}} \qquad \sin\alpha=\pm\frac{(2\sqrt{3}d-L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}} \qquad ⑧$$

其中，⑧式中“+”号表示母弹发射速度的水平分量倾向海岸方向，“–”号表示母弹发射速度的水平分量背向海岸方向．为了实现所述操作，需满足的条件为

$$0<\frac{gL}{\sqrt{3}v_0v}\le 1,\quad \left|\frac{(2\sqrt{3}d-L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}\right|\le 1,\quad d>0 \qquad ⑨$$

其中前两个条件是⑧式所要求的，后一个条件是题意所给的限制.

对于质心落点在陆地上的情形，只有⑥⑧⑨式有变化，变化后的结果为

$$x=\pm\sqrt{\frac{4L^2}{9v^4}(3v_0^2v^2-g^2L^2)-(d+\frac{L}{2\sqrt{3}})^2} \qquad ⑥$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9v^4\left(d+\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2}{L^2(3v_0^2v^2-g^2L^2)}} \qquad \sin\alpha=\frac{(2\sqrt{3}d+L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}} \qquad ⑧$$

$$0<\frac{gL}{\sqrt{3}v_0v}\le 1,\quad \frac{(2\sqrt{3}d+L)v}{4Lv_0\sqrt{1-\frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}\le 1,\quad d>0 \qquad ⑨$$

三、如图所示，某绝热容器被二块装有阀门 K_1 和 K_2 的固定绝热隔板分隔成相等体积 V_0 的三室 A、B、C，$V_A=V_B=V_C=V_0$．容器左端用绝热活塞 H 封闭，左侧 A 室装有 $\nu_1=1$ 摩尔单原子分子气体，处在压强为 P_0、温度为 T_0 的平衡态；中段 B 室为真空；右侧 C 室装有 $\nu_2=2$ 摩尔双原子分子气体，测得其平衡态温度为 $T_c=0.50T_0$．初始时刻 K_1 和 K_2 都处在关闭状态．然后系统依次经历如下与外界无热量交换的热力学过程：

（1）打开K_1，让V_A中的气体自由膨胀到中段真空V_B中；等待气体达到平衡态时，缓慢推动活塞H压缩气体，使得A室体积减小了30%（$V_A'=0.70V_0$）．求压缩过程前后，该部分气体的平衡态温度及压强；

（2）保持K_1开启，打开K_2，让容器中的两种气体自由混合后共同达到平衡态．求此时混合气体的温度和压强；

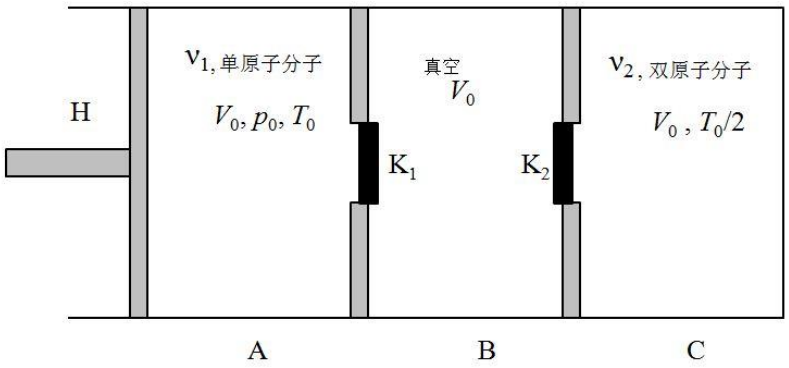
（3）保持K_1和K_2同时处在开启状态，缓慢拉动活塞H，使得A室体积恢复到初始体积$V_A''=V_0$．求此时混合气体的温度和压强．

提示：上述所有过程中，气体均可视为理想气体，计算结果可含数值的指数式或分式．根据热力学第二定律，当一种理想气体构成的热力学系统从初态(p_i,T_i,V_i)经过一个绝热可逆过程（准静态绝热过程）到达终态(p_f,T_f,V_f)时，其状态参数满足方程：

$$(\Delta S_1)_{if}=\nu_1 C_{V_1}\ln(\frac{T_f}{T_i})+\nu_1 R\ln(\frac{V_f}{V_i})=0 \qquad (I)$$

其中，ν_1为该气体的摩尔数，C_{V_1}为它的定容摩尔热容量，R为普适气体常量；而当热力学系统由二种理想气体组成，则方程（I）需修改为

$$(\Delta S_1)_{if}+(\Delta S_2)_{if}=0 \qquad (II)$$



参考解答

（1）对于理想气体的自由膨胀过程（它是非准静态的），外界没有对气体做功，系统与外界也没有热交换．由热力学第一定律得，容器内气体膨胀前后的内能改变为零，$\Delta U=0(\Delta T=0)$，从而系统的温度没有改变，只是系统的体积增加了一倍，使得压强减少为原来的1/2．

$$T_1=T_0,\quad P_1=\frac{1}{2}P_0 \qquad ①$$

此后，气体从$(\frac{1}{2}P_0,T_1,2V_0)$经过准静态绝热压缩过程，达到新的$(P',T',1.7V_0)$平衡态．该绝热过程满足方程

$$\frac{1}{2}P_0(2V_0)^{\gamma}=P'(1.70V_0)^{\gamma}$$

式中，$\gamma=\frac{5}{3}$是单原子分子理想气体的热容比．于是

$$P'=0.85^{-\frac{5}{3}}\times\frac{P_0}{2} \qquad ②$$

由上式和平衡态(P_0,T_0,V_0)和$(P',T',1.70V_0)$的状态方程

$$P_0V_0=\nu_1RT_0$$

$$P'\times 1.70V=\frac{1}{2}\times 0.85^{-\frac{5}{3}}P_0\times 1.70V_0=\nu_1RT'$$

得

$$T'=\frac{P_0V_0}{\nu_1R}\times 0.85\times 0.85^{-\frac{5}{3}}=0.85^{-\frac{2}{3}}T_0 \qquad ③$$

（2）当容器内的两种气体交换混合共同达到$(2.7V_0,p'',T'')$平衡态时，由能量守恒有

$$\nu_1\frac{3}{2}RT'+\nu_2\frac{5}{2}RT_c=(\nu_1\frac{3}{2}R+\nu_2\frac{5}{2}R)T''$$

$$T''=\frac{3\nu_1T'+5\nu_2T_c}{3\nu_1+5\nu_2}=\frac{3T'+10T_c}{13}=\frac{3\times 0.85^{-\frac{2}{3}}+5}{13}T_0=0.64T_0 \qquad ④$$

由理想气体方程有，

$$p_1''=n_1kT'',\quad p_2''=n_2kT'';\quad p''=nkT'' \qquad ⑤$$

其中，k为波尔兹曼常量，p_1'',p_2''分别为单原子分子和双原子分子气体的压强，n_1,n_2分别为相应的两种分子的分子数密度，n为混合气体的分子数密度. 利用

$$n=n_1+n_2$$

和⑤式得

$$p''=nkT''=(n_1+n_2)\,kT''=p_1''+\,p_2''=\frac{(\nu_1+\nu_2)}{2.7V_0}RT'' \qquad ⑥$$

代入数据得

$$p''=\frac{3}{2.70V_0}R\frac{3\times 0.85^{-\frac{2}{3}}+5}{13}T_0=\frac{9\times 0.85^{-\frac{2}{3}}+15}{35.1}p_0 \qquad ⑦$$

式中应用了

$$p_1''=\frac{\nu_1}{2.7V_0}RT'',\quad p_2''=\frac{\nu_2}{2.7V_0}RT'',\quad P_0V_0=\nu_1RT_0$$

（3）最后，混合气体从$(P'',T'',2.7V_0)$经过准静态绝热膨胀达到$(P''',T''',3V_0)$平衡态. 该绝热过程满足方程：

$$p''(2.70V_0)^{\gamma_m}=P'''(3V_0)^{\gamma_m} \qquad ⑧$$

式中，γ_m是两种混合气体的热容比由下式决定（证明见后文）

$$\gamma_m=\frac{\nu_1C_{p1}+\nu_2C_{p2}}{\nu_1C_{V1}+\nu_2C_{V2}} \qquad ⑨$$

这里，C_{pi},C_{Vi}分别为第i种理想气体的定压和定容摩尔热容量. 由题意得

$$C_{V1}=\frac{3}{2}R,\quad C_{p1}=C_{V1}+R=\frac{5}{2}R;\quad C_{V2}=\frac{5}{2}R,\quad C_{p2}=\frac{7}{2}R.$$

从而由⑨式得到混合气体的热容比：

$$\gamma_m=\frac{\nu_1C_{p1}+\nu_2C_{p2}}{\nu_1C_{V1}+\nu_2C_{V2}}=\frac{5+14}{3+10}=\frac{19}{13}$$

将上式代入⑧式并利用⑦式得

$$P''' = 0.90^{\gamma_m} P'' = 0.90^{\frac{19}{13}} \times \frac{9 \times 0.85^{-\frac{2}{3}} + 15}{35.1} p_0 \qquad ⑩$$

利用状态方程

$$\frac{P''(2.70V_0)}{T''} = \frac{P''(3V_0)}{T'''}$$

⑧式可改写为

$$T''(2.70V_0)^{\gamma_m - 1} = T'''(3V_0)^{\gamma_m - 1} \qquad ⑪$$

由上式和④式得

$$T''' = 0.90^{(\gamma_m - 1)} T'' = 0.90^{\frac{6}{13}} \times \frac{3 \times 0.85^{-\frac{2}{3}} + 5}{13.0} T_0 \qquad ⑫$$

现证明两种混合气体的热容比为

$$\gamma_m = \frac{\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}}{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}} \qquad ⑨$$

证法（a）

由提示，对于由两种理想气体构成的热力学体系的绝热过程有

$$(\Delta S_1)_{if} + (\Delta S_2)_{if} = 0$$

此即

$$\nu_1 C_{V_1} \ln(\frac{T_f}{T_i}) + \nu_1 R \ln(\frac{V_f}{V_i}) + \nu_2 C_{V_2} \ln(\frac{T_f}{T_i}) + \nu_2 R \ln(\frac{V_f}{V_i}) = 0$$

它可改写为

$$(\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}) \ln(\frac{T_f}{T_i}) = -(\nu_1 R + \nu_2 R) \ln(\frac{V_f}{V_i}) = (\nu_1 R + \nu_2 R) \ln(\frac{V_i}{V_f})$$

此即

$$(\frac{T_f}{T_i}) = (\frac{V_i}{V_f})^{\frac{\nu_1 R + \nu_2 R}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}}}$$

或

$$T_f V_f{}^g = T_i V^g, \quad g = \frac{\nu_1 R + \nu_2 R}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}} \qquad （a1）$$

由理想气体状态方程可得

$$p_i V_i = (p_{i1} + p_{i2}) V_i = (\nu_1 + \nu_2) R T_i$$
$$p_f V_f = (p_{f1} + p_{f2}) V_f = (\nu_1 + \nu_2) R T_f$$

式中，p_{i1}, p_{i2} 和 p_{f1}, p_{f2} 分别表示混合气体初态和末态中第 1 与 2 种气体组分的分压强. 利用上式和（a）式有

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{T_f}{T_i} \frac{V_i}{V_f} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^g \frac{V_i}{V_f} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{g+1}$$

即

$$p_f V_f^{\gamma_m} = p_i V_i^{\gamma_m} \qquad (a2)$$

式中

$$\gamma_m = g + 1 = \frac{\nu_1 R + \nu_2 R}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}} + 1 = \frac{\nu_1 C_{p_1} + \nu_2 C_{p_2}}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}}$$

其中 $C_{p_1} = C_{V_1} + R, \quad C_{p_2} = C_{V_2} + R$.

证法（b）：不利用提示，但需要定积分公式

$$\int_i^f \alpha \frac{\mathrm{d}x}{x} = \alpha \ln(\frac{x_f}{x_i}) = \ln(\frac{x_f}{x_i})^{\alpha}$$

从绝热过程方程 $\mathrm{d}Q = 0$，和热力学第一定律得，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q &= \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_2 = (p_1 \mathrm{d}V + \nu_1 C_{V1} \mathrm{d}T) + (p_2 \mathrm{d}V + \nu_2 C_{V2} \mathrm{d}T) \\ &= (p_1 + p_2)\mathrm{d}V + (\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2})\mathrm{d}T = p\mathrm{d}V + (\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2})\mathrm{d}T = 0 \end{aligned} \qquad (b1)$$

式中，$\mathrm{d}Q_i$ 是第 i 种理想气体在过程中吸收的热量. 由理想气体状态方程有

$$pV = vRT = (\nu_1 + \nu_2)RT \qquad (b2)$$

对上式两边取微分得

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = (\nu_1 + \nu_2)R\mathrm{d}T \qquad (b3)$$

从(b1)和(b3)中, 消去 $p\mathrm{d}V$ 项有

$$V\mathrm{d}p = (\nu_1 + \nu_2)R\mathrm{d}T + (\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2})\mathrm{d}T = (\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2})\mathrm{d}T \qquad (b4)$$

其中，$C_{p1} = C_{V1} + R,\ C_{p2} = C_{V2} + R$. 利用（b2）有

$$V = (\nu_1 + \nu_2)RT / p$$

将上式代入（b4）式得，

$$(\nu_1 + \nu_2)R\frac{\mathrm{d}p}{p} = (\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2})\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

此即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{(\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2})}{(\nu_1 + \nu_2)R}\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\gamma_m}{\gamma_m - 1}\frac{\mathrm{d}T}{T} \qquad (b5)$$

将（b5）从初态 (p_i, T_i, V_i) 到末态 (p_f, T_f, V_f) 积分可得

$$p_f T_f^{\gamma_m/(1-\gamma_m)} = p_i T_i^{\gamma_m/(1-\gamma_m)}, \qquad (b6)$$

进而，由（b2）和（b6），消去 T 或 p，可分别得

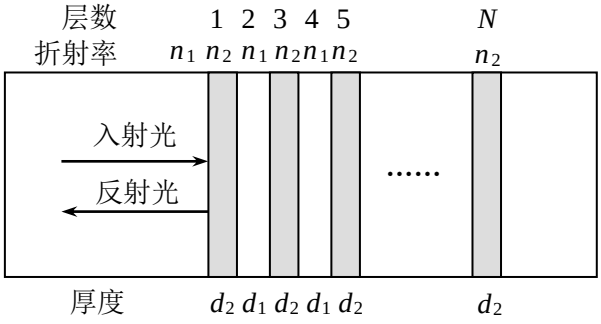
$$p_f V_f^{\gamma_m} = p_i V_i^{\gamma_m}, \quad T_f V_f^{\gamma_m - 1} = T_i V^{\gamma_m - 1} \qquad (b7)$$

四、光纤光栅是一种介质折射率周期性变化的光学器件．设一光纤光栅的纤芯基体材料折射率为 $n_1 = 1.51$；在光纤中周期性地改变纤芯材料的折射率，其改变了的部分的材料折射率为 $n_2 = 1.55$；折射率分别为 n_2 和 n_1、厚度分别为 d_2 和 d_1 的介质层相间排布，总层数为 N，其纵向剖面图如图(a)所示．在该器件设计过程中，一般只考虑每层界面的单次反射，忽略光在介质传播过程中的吸收

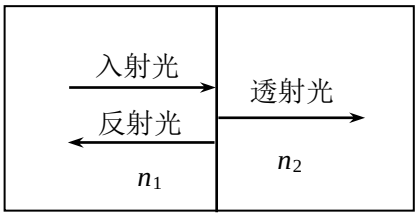
损耗．假设入射光在真空中的波长为$\lambda=1.06\mu m$，当反射光相干叠加加强时，则每层的厚度d_1和d_2最小应分别为多少？若要求器件反射率达到8%，则总层数N至少为多少？

提示：如图(b)所示，当光从折射率n_1介质垂直入射到折射率n_2介质时，界面上产生反射和透射，有：

$$\frac{\text{反射光电场强度}}{\text{入射光电场强度}}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2},\quad \frac{\text{透射光电场强度}}{\text{入射光电场强度}}=\frac{2n_1}{n_1+n_2},\quad \text{反射率}=\left|\frac{\text{反射光电场强度}}{\text{入射光电场强度}}\right|^2$$



图(a)



图(b)

参考答案：先分析光波在第一层介质中的来回传播．当光从光纤（基体折射率为n_1）入射到折射率为n_2的第一层介质表面时，假设入射光场（电场强度）为a，则其反射光场为

$$a_{r1}=r_1a \qquad ①$$

式中$r_1=\dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$，其透射光场为

$$a_{t1}=t_1a \qquad ②$$

式中$t_1=\dfrac{2n_1}{n_1+n_2}$，当光波射到折射率为$n_1$的第二层介质表面时，先不考虑光波在第一层介质中传播过程中的相位变化，其反射光场为

$$a_{r2}=r_2t_1a=\frac{n_2-n_1}{n_1+n_2}t_1a=-r_1t_1a \qquad ③$$

注意到$t_1>0$，可知③式等式右端的因子(-1)表示a_{r2}和a_{r1}之间存在$180°$相位差.

现考虑光波在第一层介质中来回传播过程中的相位变化．如果第一层介质最小厚度（即小于光波在该介质中的波长）为

$$d_2=\frac{\lambda}{4n_2}=\frac{1060\text{nm}}{4\times1.55}\approx171\text{ nm} \qquad ④$$

则反射光场a_{r2}在入射处界面要附加$180°$相位差，它与反射光场a_{r1}正好相干叠加加强．则在入射处界面反射光场为

$$a'_{r2}=t_1r_1a \qquad ⑤$$

它透过第一层介质后成为

$$a''_{r2} = t_2 t_1 r_1 a \qquad ⑥$$

式中

$$r_1 = -r_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},\ t_1 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},\ t_2 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \qquad ⑦$$

再分析光波在第一、二层介质的来回传播. 当光波射到折射率为 n_1 的第二层介质的前界面时，先不考虑光波在第一、二层介质中传播过程中的相位变化，其透射光场为

$$a_{t2} = t_2 a_{t1} = t_2 t_1 a \qquad ⑧$$

则按照前面类似的分析，a_{t2} 在通过第二层介质经第二、三层介质界面反射并返回至在入射处界面，反射光场应为

$$a'_{r3} = (t_1 t_2)^2 r_1 a \qquad ⑨$$

现考虑光波在第一、二层介质中传播过程中的相位变化，若第二层介质取最小厚度

$$d_1 = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{1060\text{nm}}{4 \times 1.51} \approx 175\text{nm} \qquad ⑩$$

则光波在第一、二层介质中往返引起的相位变化为 360° 相位差. 因而从第三个界面处反射并返回至在入射处界面处时，其反射光场为

$$a''_{r3} = a'_{r3} = (t_1 t_2)^2 r_1 a \qquad ⑪$$

它与反射光场 a_{r1} 、 a''_{r2} 正好相干叠加加强.

这样，不考虑每层界面的多次反射，经反射器反射后，入射端的总光场可表示为：

$$E = r_1 a + r_1 t_1 t_2 a + r_1 t_1^2 t_2^2 a + \cdots + r_1 t_1^N t_2^N a = r_1 a \frac{1 - (t_1 t_2)^{N+1}}{1 - t_1 t_2} \qquad ⑫$$

从⑫式得

$$N = \frac{\ln\left[1 - \frac{\sqrt{R}(1 - t_1 t_2)}{|r_1|}\right]}{\ln(t_1 t_2)} - 1 = 20.68 \qquad ⑬$$

反射层总数至少为 21.

[另一方法：由于 n_1 与 n_2 非常接近，$t_1 t_2 \approx 1$，⑫式可近似为：

$$E = r_1 a \frac{1 - (t_1 t_2)^{N+1}}{1 - t_1 t_2} \approx (N + 1) r_1 a$$

如果要求反射率达到 8%，则应有

$$E^2 = \left[(N+1) r_1 a\right]^2 = (N+1)^2 r_1^2 a^2 = 0.08 a^2$$

由题给数据得

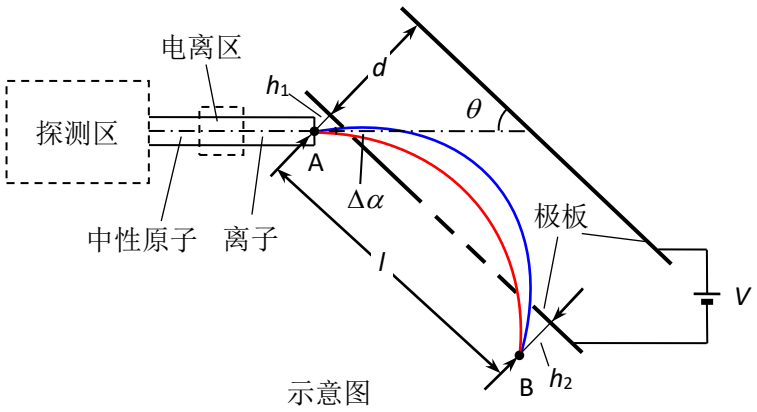
$$r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1.51 - 1.55}{1.51 + 1.55} \approx -0.01307$$

由⑭式得

$$N=\sqrt{\frac{0.08}{|r_1|^2}}-1\approx 20.64 \qquad ⑬$$

反射层总数至少为 21.　　]

五、中性粒子分析器(Neutral-Particle Analyser)是核聚变研究中测量快离子温度及其能量分布的重要设备. 其基本原理如图所示，通过对高能量（200 eV ~ 30 KeV）中性原子（它们容易穿透探测区中的电磁区域）的能量和动量的测量，可诊断曾与这些中性原子充分碰撞过的离子的性质.



示意图

为了测量中性原子的能量分布，首先让中性原子电离，然后让离子束以 θ 角入射到间距为 d 、电压为 V 的平行板电极组成的区域，经电场偏转后离开电场区域，在保证所测量离子不碰到上极板的前提下，通过测量入射孔 A 和出射孔 B 间平行于极板方向的距离 l 来决定离子的能量. 设 A 与下极板的距离为 h_1，B 与下极板的距离为 h_2，已知离子所带电荷为 q.

（1）推导离子能量 E 与 l 的关系，并给出离子在极板内垂直于极板方向的最大飞行距离.

（2）被测离子束一般具有发散角 $\Delta\alpha$ ($\Delta\alpha=\ \theta$). 为了提高测量的精度，要求具有相同能量 E，但入射方向在 $\Delta\alpha$ 范围内变化的离子在同一小孔 B 处射出，求 h_2 的表达式；并给出此时能量 E 与 l 的关系.

（3）为了提高离子能量的分辨率，要求具有量程上限能量的离子刚好落在设备允许的 l 的最大值 $l_{\max}$ 处，同时为了减小设备的体积，在满足测量要求的基础上，要求极板间距 d 尽可能小，利用上述第（2）问的结果，求 d 的表达式；若 $\theta=30°$，结果如何？

（4）为了区分这些离子的质量，请设计后续装置，给出相应的原理图和离子质量表达式.

参考解答：

（1）对于微观粒子可以忽略地球重力的作用，因此离子在极板外做匀速直线运动，以入射孔所在处为坐标原点，以垂直于极板的方向为 Y 轴方向，平行于极板方向为 X 轴方向，则离子在坐标 $(h_1\cot\theta,\ h_1)$ 处进入极板区，进入极板区后离子做斜抛运动，初速度为

$$v_0=\sqrt{2E/m} \qquad ①$$

加速度大小为 $a_y=-qV/(md)$

Y 轴方向速度为零时，对应的坐标为

$$(h_1\cot\theta+Ed\sin 2\theta/(qV),\quad h_1+Ed\sin^2\theta/(qV)) \qquad ②$$

离子离开极板时，速度大小仍为 $v_0=\sqrt{2E/m}$，后作匀速直线运动，因此出射孔在 X 轴方向的坐标为

$$l=(h_1+h_2)\cot\theta+2Ed\sin(2\theta)/(qV) \qquad ③$$

离子的能量与l的关系为

$$E=qV[l-(h_1+h_2)\cot\theta]/(2d\sin 2\theta) \qquad ④$$

能量为E的离子在极板内垂直于极板方向的最大飞行距离

$$H=Ed\sin^2\theta/(qV) \qquad ⑤$$

（2）当$\Delta\alpha=\theta$时，若有

$$\begin{aligned} l&=(h_1+h_2)\cot(\theta+\Delta\alpha)+2Ed\sin[2(\theta+\Delta\alpha)]/(qV)\\ &=(h_1+h_2)\cot\theta+2Ed\sin(2\theta)/(qV)\end{aligned} \qquad ⑥$$

则可以达到要求．又

$$\begin{aligned}&\cot(\theta+\Delta\alpha)=(\cos\theta\cos\Delta\alpha-\sin\theta\sin\Delta\alpha)/(\sin\theta\cos\Delta\alpha+\cos\theta\sin\Delta\alpha)\\ &\approx(\cos\theta-\Delta\alpha\sin\theta)/(\sin\theta+\Delta\alpha\cos\theta)=(\cot\theta-\Delta\alpha)/(1+\Delta\alpha\cot\theta)\approx\cot\theta-\Delta\alpha(1+\cot^2\theta)\\ &=\cot\theta-\Delta\alpha/\sin^2\theta\end{aligned}$$

其中利用了关系式$\sin\Delta\alpha\approx\Delta\alpha$，$\cos\Delta\alpha\approx 1$；同样有

$$\begin{aligned}\sin[2(\theta+\Delta\alpha)]&=\sin(2\theta)\cos(2\Delta\alpha)+\cos(2\theta)\sin(2\Delta\alpha)\\ &\approx\sin(2\theta)+2\Delta\alpha\cos(2\theta)\end{aligned}$$

代入④式得

$$\Delta\alpha(h_1+h_2)/\sin^2\theta-4\Delta\alpha Ed\cos(2\theta)/(qV)=0$$

即

$$h_2=4Ed\sin^2\theta\cos(2\theta)/(qV)-h_1 \qquad ⑦$$

对应的能量表达式为

$$E=qVl/\{2d\sin(2\theta)[1+\cos(2\theta)]\} \qquad ⑧$$

（3）为了使所有量程范围的离子均不碰到上极板，则极板间距应大于⑤式的H，则可得

$$E_{\max}\le qV/\sin^2\theta \qquad ⑨$$

或者说，所加电压必须$V\ge E_{\max}\sin^2\theta/q$

由⑧式，并根据题意要求，可得$E_{\max}$与$l_{\max}$的关系为

$$E_{\max}=\frac{qVl_{\max}}{2d\sin(2\theta)[1+\cos(2\theta)]} \qquad ⑩$$

将上式代入⑨式，得到极板的最小间距为

$$d=\frac{l_{\max}\sin^2\theta}{2\sin(2\theta)[1+\cos(2\theta)]} \qquad ⑪$$

若$\theta=30°$，则要求

$$d=\frac{\sqrt{3}}{18}l_{\max} \qquad ⑫$$

（4）可以加如图所示的垂直于运动平面强度为B的半圆形均匀磁场，则离子将做回旋运动，其运动方程为

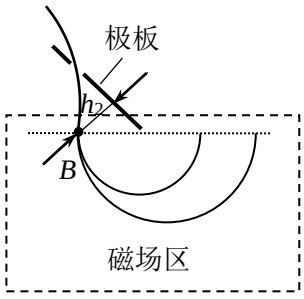
$$\frac{mv^2}{R}=qvB \qquad ⑬$$

即

$$mv=qBR$$

测出离子的回旋半径R，有

$$\begin{aligned}m&=(mv)^2/(2E)=qB^2R^2d\sin(2\theta)[1+\cos(2\theta)]/Vl\\ &=qB^2R^2l_{\max}\sin^2\theta/Vl\end{aligned} \qquad ⑭$$



六、超导体的一个重要应用是绕制强磁场磁体，其使用的超导线材属于第二类超导体．如果将这类超导体置于磁感应强度为B_a的外磁场中，其磁力线将以磁通量子（或称为磁通涡旋线）的形式穿透超导体，从而在超导体中形成正三角形的磁通格子，如图 1 所示．所谓的磁通量子，如图 2

所示，其中心是半径为ξ的正常态（电阻不为零）区域，而其周围处于超导态（电阻为零），存在超导电流，所携带的磁通量为$\Phi_0=\dfrac{h}{2e}=2.07\times10^{-15}\,\mathrm{Wb}$（磁通量的最小单位）.

（1）若$B_a=5\times10^{-2}\mathrm{T}$，求此时磁通涡旋线之间距离$a$；

（2）随着B_a的增大，磁通涡旋线密度不断增加，当B_a达到某一临界值B_{c2}时，整块超导体都变为正常态．假设磁通涡旋线芯的半径为$\xi=5\times10^{-9}\mathrm{m}$，求所对应的临界磁场$B_{c2}$；

（3）对于理想的第二类超导体，当有电流I通过超导带材时，在安培力的驱动下，磁通涡旋线将会粘滞流动，在超导带内产生电阻（也称为磁通流阻），从而产生焦耳损耗，不利于超导磁体的运行．磁通涡旋线稳定粘滞流动的速度v与单位体积磁通涡旋线所受到的驱动力f_A和B_a的关系为$f_A=\eta\dfrac{B_a}{\Phi_0}v$，其中$\eta$为比例系数．外加磁场、电流方向，以及超导带材的尺寸如图3所示，请指出磁通涡旋线流动的方向，并求出磁通涡旋线流动所产生的电阻率（用B_a，Φ_0，η，超导体尺寸b，c，d表示）；

（4）要使超导材料真正实用化，消除这种磁通流阻成了技术的关键，请给出你的解决方案．

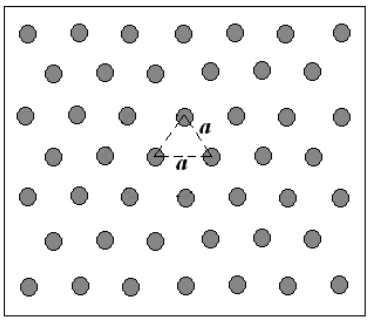


图1

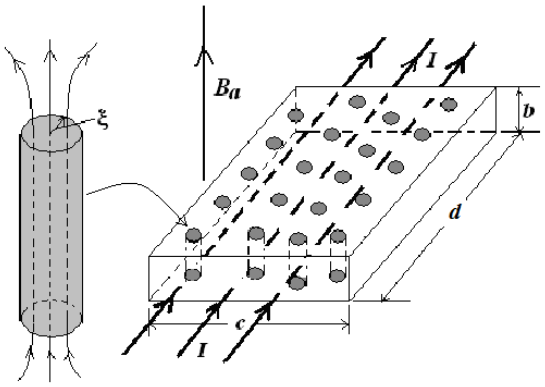


图2　　图3

参考解答：

（1）磁通量

$$\Phi=B_a\cdot A \qquad ①$$

由几何关系可知两个正三角形中包含一个磁通量子，所以

$$A=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \qquad ②$$

此时$\Phi=\Phi_0$，于是

$$\Phi_0=B_a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \qquad ③$$

$$a=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\Phi_0}{B_a}}=2.19\times10^{-7}\,\mathrm{m}=0.219\mu\mathrm{m} \qquad ④$$

（2）随着外加磁场的增加，每个磁通量子所对应面积减少，即磁通密度增大，当相邻两根磁通涡旋线的正常芯开始重叠时，即

$$a\le2\xi \qquad ⑤$$

整块超导体都变为正常态，此时所对应的磁场为上临界磁场

$$B_a=B_{c2}=\frac{\Phi_0}{\frac{\sqrt{3}}{2}(2\xi)^2}=\frac{2.07\times10^{-15}}{2\times\sqrt{3}\times25\times10^{-18}}\,\mathrm{T}=\frac{2.07\times10^{-15}}{3.47\times25\times10^{-18}}\,\mathrm{T}=23.85\,\mathrm{T} \qquad ⑥$$

（3）如图 3 所示，当超导带材中通以电流 I 时，这样在安培力的驱动下，磁通涡旋线将以速度 v 向右运动，等效于超导体以速度 v 向左做切割磁力线运动，从而在超导体的两端产生电势差

$$U = B_a v d \qquad ⑦$$

而

$$v = \frac{f_A \Phi_0}{\eta B_a} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Id\Phi_0}{bcd} \qquad ⑧$$

由于磁通流动所产生的电阻为：

$$R = \frac{U}{I} = \frac{B_a v d}{I} = \frac{\Phi_0 B_a I d^2}{\eta I (bcd)} = \frac{\Phi_0 B_a d^2}{\eta (bcd)} \qquad ⑨$$

根据电阻与电阻率 ρ 的关系

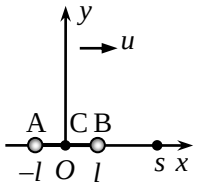
$$R = \rho \frac{d}{bc} \qquad ⑩$$

有

$$\rho = \frac{\Phi_0 B_a bcd}{\eta (bcd)} = \frac{\Phi_0 B_a}{\eta} \qquad ⑪$$

（4）在超导体内部引入缺陷，如空位，位错，填隙原子等，当磁通涡旋线落入这些缺陷时，就会产生磁通钉扎效应，使磁通涡旋线不易流动，即为非理想第二类超导体。

七、如图，两个质量均为 m 的小球 A 和 B（均可视为质点），固定在中心位于 C 、长为 $2l$ 的刚性轻质细杆的两端，构成一质点系．在竖直面内建立 Oxy 坐标，Ox 方向沿水平向右，Oy 方向竖直向上．初始时质点系中心 C 位于原点 O，并以初速度 v_0 竖直上抛，上抛过程中，ACB 三点连线始终水平．风速大小恒定为 u、方向沿 x 轴正向，小球在运动中所受空气阻力 $\boldsymbol{f}$ 的大小与相对于空气运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小成正比，方向相反，即 $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$，$k$ 为正的常量．当 C 点升至最高点时，恰好有一沿 y 轴正向运动、质量为 m_1、速度大小为 u_1 的小石块（视为质点）与小球 A 发生竖直方向的碰撞，设碰撞是完全弹性的，碰撞时间极短．此后 C 点回落到上抛开始时的同一水平高度，此时它在 Ox 方向上的位置记为 s，将从上抛到落回的整个过程所用时间记为 T，质点系旋转的圈数记为 n．求质点系



（1）转动的初始角速度 ω_0，及其回落到 s 点时角速度 ω_s 与 n 的关系；

（2）从开始上抛到落回到 s 点为止的过程中，空气阻力做的功 W_f 与 n、s、T 的关系．

参考解答

（1）设 A 运动速度为 v_A，B 运动速度为 v_B，A 和 B 所受空气阻力的分量式分别为

$$\begin{cases} f_{Ax} = -k(v_{Ax} - u) \\ f_{Ay} = -k v_{Ay} \end{cases}, \quad \begin{cases} f_{Bx} = -k(v_{Bx} - u) \\ f_{By} = -k v_{By} \end{cases}$$

细杆与小球的相互作用力为内力，对作用在系统上的合外力没有影响，考虑到重力，则系统所受合外力的分量式分别为

$$\begin{cases} F_x = -k(v_{Ax} - u) - k(v_{Bx} - u) = -2kv'_x \\ F_y = -2mg - kv_{Ay} - kv_{By} = -2mg - 2kv_y \end{cases} \qquad ①$$

式中 $v'_x = v_x - u$ 为质心 C 沿 x 方向相对风的速度；而

$$v_x = \frac{v_{Ax} + v_{Bx}}{2}$$

和

$$v_y=\frac{v_{Ay}+v_{By}}{2}$$

分别为质心 C 沿 x 方向和 y 方向上的运动速度.

（i）上抛过程中 y 方向上质心 C 的运动

由质心运动定律，有

$$F_y=-2mg-2kv_y=2m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} \qquad ②$$

化简上式并求和，有

$$-mg\sum\Delta t-k\sum v_y\Delta t=m\sum\Delta v_y$$

设质点系上抛至最高点时质心 C 上升高度为 y_1，所需时间为 T_1．解得

$$-mgT_1-ky_1=m(0-v_0) \qquad ③$$

（ii）碰撞过程

设碰撞后沿 y 方向上质心 C 的速度为 v_{y1}，小石块的速度为 u_2，由质点系 y 方向动量守恒，有

$$m_1u_1=2mv_{y1}+m_1u_2 \qquad ④$$

设 v_{Ay_1} 和 v_{By_1} 分别为碰撞后 A 和 B 沿 y 方向上的速度分量，则

$$v_{y1}=\frac{v_{Ay_1}+v_{By_1}}{2}$$

设碰后小球 A 绕质心 C 转动速度的 y 方向分量为 v_{c0}，则小球 B 绕质心转动速度的 y 方向分量为 $-v_{c0}$，由相对运动关系，v_{Ay_1} 等于 v_{c0} 与质心运动速度 $\boldsymbol{v}_{y1}$ 之和，v_{By_1} 等于 $-v_{c0}$ 与 $\boldsymbol{v}_{y1}$ 之和，即有

$$v_{Ay_1}=\boldsymbol{v}_{y1}+\boldsymbol{v}_{c0}\,,\quad v_{By_1}=\boldsymbol{v}_{y1}-\boldsymbol{v}_{c0}$$

碰撞给系统带来的动能贡献为

$$E_{ky}=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_{y1}+\boldsymbol{v}_{c0})^2+\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_{y1}-\boldsymbol{v}_{c0})^2=2\times\frac{1}{2}mv_{y1}^2+2\times\frac{1}{2}mv_{c0}^2$$

碰撞前后 x 方向速度没变，设为 v_x，由机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+2\times\frac{1}{2}mv_x^2=\frac{1}{2}(2m)v_{y1}^2+2\times\frac{1}{2}mv_{c0}^2+2\times\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}m_1u_2^2 \qquad ⑤$$

由对惯性系中瞬时与质心 C 重合的一点，由角动量守恒，有

$$m_1lu_1=2mlv_{c0}+m_1lu_2 \qquad ⑥$$

由角速度和线速度的关系有

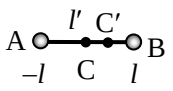
$$v_{c0}=l\omega_0$$

［或：由机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+2\times\frac{1}{2}mv_x^2=\frac{1}{2}m(v_{Ay_1}^2+v_{By_1}^2)+2\times\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}m_1u_2^2 \qquad ⑤$$

如图，设碰撞后瞬间，轻杆上静止的点为C′（瞬时转动中心），其距 A 为 l'，由对C′点的角动量守恒，有

$$m_1l'u_1=ml'v_{Ay_1}+m(2l-l')v_{By_1}+m_1l'u_2 \qquad ⑥$$



碰撞后质点系开始转动，对C′点的转动，有

$$v_{Ay_1}=l'\omega_0\,,\quad v_{By_1}=(2l-l')\omega_0\,,\quad v_{y1}=(l'-l)\omega_0 \qquad ］$$

联立上述各式，解得

$$v_{Ay_1}=2\frac{m_1}{m+m_1}u_1\,,\quad v_{By_1}=0 \qquad ⑦$$

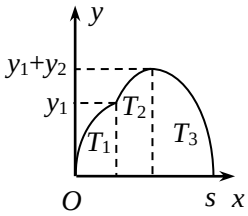
$$v_{y1}=v_{c0}=\frac{m_1}{m+m_1}u_1 \qquad ⑧$$

$$u_2=\frac{m_1-m}{m+m_1}u_1 \qquad ⑨$$

$$\omega_0=\frac{m_1}{m+m_1}\frac{u_1}{l} \qquad ⑩$$

（iii）再次上抛过程中 y 方向上质心 C 的运动

质心 C 的运动轨迹如图所示，碰撞后，质心 C 以 v_{y1} 沿 y 轴方向再次作上抛运动．设再次到达最高点时质心 C 又上升的高度为 y_2，所用时间为 T_2．类比③式，有



$$-mgT_2-ky_2=m(0-v_{y1}) \qquad ⑪$$

（iv）平抛过程中 y 方向上质心 C 的运动

质心再次到达最高点后，质心 C 的运动为平抛运动．设此过程所用时间为 T_3，在 y 方向上质心 C 受力为

$$F_y=-2mg-2kv_y \qquad ⑫$$

由牛顿第二定律，有

$$-2mg-2kv_y=2m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} \qquad ⑬$$

化简上式并求和，有

$$-mg\sum\Delta t-k\sum v_y\Delta t=m\sum\Delta v_y$$

注意到下落过程中有 $\sum v_y\Delta t=-(y_1+y_2)$，解得

$$-mgT_3+k(y_1+y_2)=m(-v_{ys}-0) \qquad ⑭$$

式中，v_{ys} 为落地时质心 C 在 y 方向上的速度大小，方向向下．由③⑧⑪⑭式及

$$T=T_1+T_2+T_3$$

得

$$v_{ys}=gT-v_0-\frac{m_1}{m+m_1}u_1 \qquad ⑮$$

（v）整个过程中 x 方向上质心 C 的运动

质心 C 沿 x 方向相对于风的速度为 $v'_x=v_x-u$，在 x 方向上，质心 C 的位移为 s（题给条件）．设末速度为 v_{xs}，由质心运动定理，有

$$F_x=-2kv'_x=-2k(v_x-u)=2m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad ⑯$$

化简上式并求和，有

$$-\frac{k}{m}(\sum v_x\Delta t-u\sum\Delta t)=\sum\Delta v_x$$

解得

$$v_{xs}=\frac{k}{m}(uT-s) \qquad ⑰$$

[或：建立随风运行的惯性参照系 $O'x'y'$，初始 $O'x'y'$ 坐标系与 Oxy 坐标系重合，整个运动过程中在 x' 方向上质心 C 只受空气阻力作用，该力沿 x' 正向，其初速度为 u，方向沿 x' 负向．由质心运动定理和牛顿第二定律，有

$$2kv'_x=2m\frac{\Delta v'_x}{\Delta t} \qquad ⑯$$

化简并求和，有

$$k\sum v'_x\Delta t=m\sum\Delta v'_x$$

解得

$$ks'=m[-v'_{xs}-(-u)]$$

式中，s' 和 v'_{xs} 分别为整个过程结束时，质心 C 在 $O'x'y'$ 坐标中 x' 方向的位移大小和末速度大小. 有

$$s = uT - s'$$

$$v_{xs} = u - v'_{xs}$$

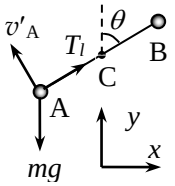
由上述各式，解得整个过程结束时质心 C 在 Oxy 坐标中沿 x 方向运动的速度为

$$v_{xs} = \frac{k}{m}(uT - s) \qquad ⑰ \quad]$$

（vi）转动过程

如图，因轻杆所受合外力与合外力矩均为零，故其施加给 A 和 B 的力必沿轻杆方向，且大小相等方向相反，标记为 T_l，则有

$$\begin{cases} F_{Ax} = -k(v_{Ax} - u) + T_{lx} = m\dfrac{\Delta v_{Ax}}{\Delta t} \\ F_{Ay} = -mg - kv_{Ay} + T_{ly} = m\dfrac{\Delta v_{Ay}}{\Delta t} \end{cases}, \quad \begin{cases} F_{Bx} = -k(v_{Bx} - u) - T_{lx} = m\dfrac{\Delta v_{Bx}}{\Delta t} \\ F_{By} = -mg - kv_{By} - T_{ly} = m\dfrac{\Delta v_{By}}{\Delta t} \end{cases}$$



由质心运动定理有

$$\begin{cases} F_x = -2kv_x + 2ku = 2m\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ F_y = -2mg - 2kv_y = 2m\dfrac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{cases} \qquad ⑲$$

注意到，相对于质心，A 的相对速度为

$$\begin{cases} v'_{Ax} = v_{Ax} - v_x \\ v'_{Ay} = v_{Ay} - v_y \end{cases}$$

由⑱⑲式，有

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta v'_{Ax}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_{Ax}}{\Delta t} - \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\dfrac{k}{m}(v_{Ax} - v_x) + \dfrac{T_{lx}}{m} = -\dfrac{k}{m}v'_{Ax} + \dfrac{T_{lx}}{m} \\ \dfrac{\Delta v'_{Ay}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_{Ay}}{\Delta t} - \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\dfrac{k}{m}(v_{Ay} - v_y) + \dfrac{T_{ly}}{m} = -\dfrac{k}{m}v'_{Ay} + \dfrac{T_{ly}}{m} \end{cases}$$

A 相对于质心 C 作圆周运动，故 v'_A 方向与杆方向垂直，如图所示. 则上式可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta v'_{Ax}}{\Delta t} = \dfrac{k}{m}v'_A\cos\theta + \dfrac{T_l\sin\theta}{m} \\ \dfrac{\Delta v'_{Ay}}{\Delta t} = -\dfrac{k}{m}v'_A\sin\theta + \dfrac{T_l\cos\theta}{m} \end{cases}$$

利用上式可得，A 相对于质心 C 作圆周运动的切向加速度为

$$\frac{\Delta v'_A}{\Delta t} = -\frac{\Delta v'_{Ax}}{\Delta t}\cos\theta + \frac{\Delta v'_{Ay}}{\Delta t}\sin\theta = -\frac{k}{m}v'_A \qquad ⑳$$

注意到 $v'_A = \omega l$，且圆周运动的切向加速度为 $\dfrac{\Delta v'_A}{\Delta t} = \dfrac{\Delta(\omega l)}{\Delta t} = l\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$，则⑳式可改写为

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -\frac{k}{m}\omega \qquad ㉑$$

化简并对整个过程求和，有

$$\sum\Delta\omega = -\frac{k}{m}\sum\omega\Delta t$$

根据题意，解得

$$\omega_s - \omega_0 = -\frac{k}{m}2n\pi \qquad ㉒$$

上式代入 ω_0，得

$$\omega_s = \omega_0 - \frac{2kn\pi}{m} = \frac{m_1}{m+m_1}\frac{u_1}{l} - \frac{2kn\pi}{m} \qquad ㉓$$

（2）当 C 点回落到位置 s 时，质心速度的平方为

$$v_s^2=v_{xs}^2+v_{ys}^2 \qquad ㉔$$

在质心系中，A 和 B 绕质心转动的速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Ac}}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Bc}}$ 总是大小相等方向相反，即有 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Ac}}=-\boldsymbol{v}_{\mathrm{Bc}}$，则当 C 点回落到位置 s 时，系统的动能为

$$E_{ks}=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{v}_{\mathrm{Ac}})^2+\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{v}_{\mathrm{Bc}})^2=2\times\frac{1}{2}mv_s^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{Ac}}^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{Bc}}^2$$

式中

$$v_{\mathrm{Ac}}=\omega_s l$$

和

$$v_{\mathrm{Bc}}=\omega_s l$$

分别为此时质心系中 A 和 B 的速度大小．于是

$$E_{ks}=\frac{1}{2}(2m)(v_{xs}^2+v_{ys}^2)+\frac{1}{2}(2m)(\omega_s l)^2 \qquad ㉕$$

碰撞过程中小石块对质点系做功即为碰后质点系的动能，由⑦式得

$$E_{km}=2\times\frac{1}{2}mv_{\mathrm{Ay_1}}^2+2\times\frac{1}{2}mv_{\mathrm{By_1}}^2=2m\left(\frac{m_1}{m+m_1}u_1\right)^2 \qquad ㉖$$

由功能原理及⑮⑰㉓㉕㉖式，可得整个过程中空气阻力所做的功为

$$W_f=E_{ks}-E_{km}-E_{k0}$$

$$=m\left(gT-v_0-\frac{m_1}{m+m_1}u_1\right)^2+\frac{k^2}{m}(uT-s)^2+m\left(\frac{m_1}{m+m_1}u_1-\frac{2kn\pi l}{m}\right)^2-mv_0^2-2m\left(\frac{m_1}{m+m_1}u_1\right)^2 \qquad ㉗$$

八、太阳是我们赖以生存的恒星．它的主要成分是氢，氢在自身引力的作用下收缩而导致升温，当温度高到一定程度时，中性原子将电离成质子和电子组成的等离子体，并在其核心区域达到约 $1.5\times10^7\,\mathrm{K}$ 的高温和 $1.6\times10^5\,\mathrm{kg/m^3}$ 以上的高密度，产生热核聚变而放出巨大能量，从而抗衡自身的引力收缩达到平衡，而成为恒星．太阳内部主要核反应过程为

$$^1\mathrm{H}+{}^1\mathrm{H}\rightarrow\mathrm{D}+\mathrm{e}^+\!+\nu_\mathrm{e} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathrm{D}+{}^1\mathrm{H}\rightarrow{}^3\mathrm{He}+\mathrm{x} \qquad \text{(II)}$$

$$^3\mathrm{He}+{}^3\mathrm{He}\rightarrow{}^4\mathrm{He}+{}^1\mathrm{H}+{}^1\mathrm{H} \qquad \text{(III)}$$

其中第一个反应的概率由弱相互作用主导，概率很低，这恰好可以使得能量缓慢释放．反应产物正电子 e^+ 会与电子 e^- 湮灭为 γ 射线，即

$$\mathrm{e}^+\!+\mathrm{e}^-\rightarrow\gamma+\gamma \qquad \text{(IV)}$$

已知：质子（$^1\mathrm{H}$）、氘（D）、氦-3（$^3\mathrm{He}$）、氦-4（$^4\mathrm{He}$）和电子的质量分别为 938.27、1875.61、2808.38、3727.36 和 0.51（MeV/c^2）（误差为 $0.01\,\mathrm{MeV}/c^2$），c 为真空中的光速，中微子 ν_e 的质量小于 $3\,\mathrm{eV}/c^2$．普朗克常量 $h=6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$，$c=3.0\times10^8\,\mathrm{m/s}$，波尔兹曼常量 $k=1.381\times10^{-23}\,\mathrm{J/K}$，电子电量 $e=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$．

（1）试用理想气体模型估算处于热平衡状态的各种粒子的平均动能及太阳核心区的压强（请分别用 eV 和 atm 为单位）；

（2）反应式（II）中的 x 是什么粒子（α、β、γ、p 和 n 之一）？请计算该粒子的动能和动量的大小，是否可以找到一个参照系，使得 x 粒子的动能为零？

（3）给出反应式（I）中各反应产物的动能的范围；

（4）反应式（IV）中的γ射线（光子）经过很多次的康普顿散射到达太阳表面的时候，其波长约为$5.4\times10^{-7}\,\mathrm{m}$．设入射光子的能量为$E_0$，一次散射后光子的能量为$E$，光子的散射角为$\phi$（出射光子动量相对于入射光子动量的夹角）．推导出由E_0和ϕ表示的E的表达式；假设从太阳中心到表面，光子经历了10^{26}次康普顿散射，且每次散射的角度相同，求每一次散射的散射角ϕ．

参考解答

（1）质子、氘、氦-3、氦-4和电子在热运动中类似于单原子理想气体，不需要考虑转动自由度，因此它们热运动的平均动能为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{3}{2}kT=\frac{1.5\times1.381\times10^{-23}\times1.5\times10^{7}}{1.602\times10^{-19}}\,\mathrm{keV}\approx2\mathrm{keV} \qquad ①$$

由于系统主要有质子和电子组成，质子每摩尔质量为1g；由已知密度可得质子摩尔体积为

$$V_{\mathrm{mol}}=\frac{1}{1.6\times10^{8}}\ \mathrm{m}^3 \qquad ②$$

$$P=2\times\frac{RT}{V_{\mathrm{mol}}}=2\times1.6\times10^{8}\times1.5\times10^{7}\times8.31\mathrm{N/m^2}=2\times2\times10^{16}\mathrm{N/m^2}=4\times10^{11}\mathrm{atm} \qquad ③$$

式中出现因子2是因为考虑了等离子体中电子贡献的缘故。

（2）由反应前后电荷守恒，可知x粒子的电荷

$$Q_{\mathrm{x}}=0 \qquad ④$$

也就是说，该粒子为中性粒子.

由第（1）问可知，氘和质子热运动的平均动能只有$0.002\,\mathrm{MeV}$，在误差范围内，因此核反应前它们的动能可以忽略不计，即可以看作静止.

设x粒子的质量为m_{x}，动量为p_{x}，则由能量和动量守恒得

$$m_{\mathrm{D}}c^2+m_{\mathrm{H}}c^2=\sqrt{m_{\mathrm{He3}}^2\,c^4+p_{\mathrm{He3}}^2c^2}+\sqrt{m_{\mathrm{x}}^2c^4+p_{\mathrm{x}}^2c^2} \qquad ⑤$$

$$p_{\mathrm{He3}}=p_{\mathrm{x}} \qquad ⑥$$

由⑤式知

$$p_{\mathrm{x}}c<m_{\mathrm{D}}c^2+m_{\mathrm{H}}c^2-m_{\mathrm{He3}}c^2=5.5\ \mathrm{MeV} \qquad ⑦$$

因此有

$$p_{\mathrm{x}}c=\ m_{\mathrm{He3}}c^2$$

由⑥式，可将⑤式改写为

$$m_{\mathrm{D}}c^2+m_{\mathrm{H}}c^2-m_{\mathrm{He3}}c^2=\frac{p_{\mathrm{x}}^2}{2m_{\mathrm{He3}}}+\sqrt{m_{\mathrm{x}}^2\,c^4+p_{\mathrm{x}}^2c^2}\approx\sqrt{m_{\mathrm{x}}^2\,c^4+p_{\mathrm{x}}^2c^2} \qquad ⑧$$

即氦-3的动能$E_{\mathrm{kHe3}}\approx0$，忽略不计，x粒子的总能量（含静止能量）为$5.5\ \mathrm{MeV}$，因此其静止质量$m_{\mathrm{x}}<5.5\mathrm{MeV}/c^2$，这么轻的中性粒子，在题给可选的粒子中应该是γ光子，$m_{\mathrm{x}}=0$，其动能和动量分别为

$$E_{\mathrm{kx}}=5.5\ \mathrm{MeV},\quad p_{\mathrm{x}}=5.5\ \mathrm{MeV}/c \qquad ⑨$$

因此不可能找到一个参照系，使得光子的动能为零.

（3）由反应（I）前后能量守恒可知，反应产物的总动能

$$E_{\mathrm{k}}=2m_{\mathrm{H}}c^2-m_{\mathrm{D}}c^2-m_{\mathrm{e}}c^2-m_{\nu}c^2=0.42\ \mathrm{MeV} \qquad ⑩$$

远小于氘核的静止能量，利用第（2）问的分析方法可知，氘核的动能可以忽略不计，即

$$E_{\mathrm{kD}}<0.01\ \mathrm{MeV}\approx0 \qquad ⑪$$

氘核动量可以不为零，但要满足$\boldsymbol{p}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{p}_{\nu}=0$，因此不能确定正电子和中微子的动能，只有如下关系

$$E_{\mathrm{ke}}+E_{\mathrm{k}\nu}=0.42\ \ \mathrm{MeV},\quad 0<E_{\mathrm{ke}}<0.42\ \mathrm{MeV},\quad 0<E_{\mathrm{k}\nu}<0.42\ \mathrm{MeV} \qquad ⑫$$

（4）正负电子对湮灭会产生一对光子，其能量相等，动量也相等但方向相反.

$$h\nu_0=h\frac{c}{\lambda_0}=mc^2=0.51\ \mathrm{MeV}$$

$$\lambda_0=\frac{hc}{mc^2}=\frac{6.626\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{0.51\times1.6\times10^{-13}}\mathrm{m}=2.43\times10^{-12}\mathrm{m} \qquad ⑬$$

由前面的分析可知，γ光子与离子的碰撞几乎为完全弹性碰撞，且光子能量远小于离子静能，没有能量损失，不改变光子的波长；因此就光子波长的改变而言，我们只需考虑光子与电子的散射．能量为$E_0=h\nu_0$的光子与近似静止的电子进行康普顿散射后，产生动量为P_e、动能为T的电子和能量为$E=h\nu$的光子，则由能量守恒和动量守恒，得

$$h\nu_0=h\nu+T \qquad ⑭$$

$$\frac{h\nu_0}{c}=\frac{h\nu}{c}\cos\phi+P_e\cos\theta \qquad ⑮$$

$$0=\frac{-h\nu}{c}\sin\phi+P_e\sin\theta \qquad ⑯$$

从⑮⑯式消去θ可得

$$P_e^2=\frac{h^2}{c^2}(\nu_0^2+\nu^2-2\nu_0\nu\cos\phi) \qquad ⑰$$

由相对论能量动量关系

$$P_e^2c^2=(mc^2+T)^2-m^2c^4=T^2+2Tmc^2$$

和⑭式得

$$(E_0-E)^2+2(E-E)mc^2=E_0^2+E^2-2E_0E\cos\phi$$

整理后可得

$$E=\frac{E_0}{1+\frac{E_0}{mc^2}(1-\cos\phi)} \qquad ⑱$$

上式化简可得

$$\lambda-\lambda_0=\frac{h}{mc}(1-\cos\phi) \qquad ⑲$$

最后一次康普顿散射后的波长为 $\lambda_f=5.4\times10^{-7}\mathrm{m}$，令一次康普顿散射的散射角为$\phi$，则有

$$\lambda_f-\lambda_0=\frac{h\times10^{26}}{mc}(1-\overline{\cos\phi}) \qquad ⑳$$

假设ϕ很小，有

$$(1-\overline{\cos\phi})\approx\frac{\overline{\phi^2}}{2}=\frac{\lambda_f mc}{h\times10^{26}}$$

于是

$$\phi=\sqrt{\frac{2\lambda_f mc}{h\times10^{26}}}=6.7\times10^{-11}\mathrm{rad} \qquad ㉑$$

可见前述假设成立.