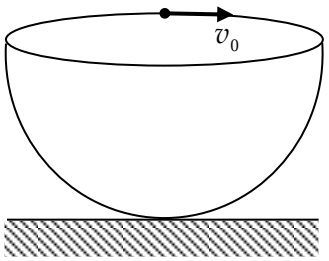
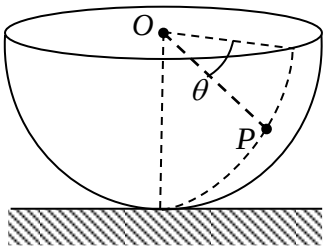
第 30 届全国中学生物理竞赛复赛考试试题解答

一、一半径为 R 、内侧光滑的半球面固定在地面上，开口水平且朝上. 一小滑块在半球面内侧最高点处获得沿球面的水平速度，其大小为 v_0 ($v_0 \neq 0$). 求滑块在整个运动过程中可能达到的最大速率. 重力加速度大小为 g .



参考解答：

以滑块和地球为系统，它在整个运动过程中机械能守恒. 滑块沿半球面内侧运动时，可将其速度 v 分解成纬线切向 (水平方向)分量 v_φ 及经线切向分量 v_θ. 设滑块质量为 m，在某中间状态时，滑块位于半球面内侧 P 处， P 和球心 O 的连线与水平方向的夹角为 θ . 由机械能守恒得



$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mv_\varphi^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 \tag{1}$$

这里已取球心 O 处为重力势能零点. 以过 O 的竖直线为轴. 球面对滑块的支持力通过该轴，力矩为零；重力相对于该轴的力矩也为零. 所以在整个运动过程中，滑块相对于轴的角动量守恒，故

$$mv_0R = mv_\varphi R\cos\theta . \tag{2}$$

由 (1) 式，最大速率应与 θ 的最大值相对应

$$v_{\max} = v(\theta_{\max}) . \tag{3}$$

而由 (2) 式， θ 不可能达到 $\pi/2$. 由(1)和(2)式， θ 的最大值应与 $v_\theta = 0$ 相对应，即

$$v_\theta(\theta_{\max}) = 0 . \tag{4}$$

[

(4)式也可用下述方法得到：由 (1)、(2) 式得

$$2gR\sin\theta - v_0^2\tan^2\theta = v_\theta^2 \geq 0 .$$

若 $\sin\theta \neq 0$ ，由上式得

$$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \leq \frac{2gR}{v_0^2} .$$

实际上， $\sin\theta$=0 也满足上式。由上式可知

$$\frac{\sin\theta_{\max}}{\cos^2\theta_{\max}} = \frac{2gR}{v_0^2} .$$

由(3)式有

$$v_\theta^2(\theta_{\max}) = 2gR\sin\theta_{\max} - v_0^2\tan^2\theta_{\max} = 0 . \tag{4'}$$

]

将 $v_\theta(\theta_{\max})=0$ 代入式(1)，并与式(2)联立，得

$$v_0^2\sin^2\theta_{\max}-2gR\sin\theta_{\max}\left(1-\sin^2\theta_{\max}\right)=0. \tag{5}$$

以 $\sin\theta_{\max}$ 为未知量，方程(5)的一个根是 $\sin q=0$，即 $q=0$，这表示初态，其速率为最小值，不是所求的解. 于是 $\sin\theta_{\max}\neq 0$. 约去 $\sin\theta_{\max}$，方程(5)变为

$$2gR\sin^2\theta_{\max}+v_0^2\sin\theta_{\max}-2gR=0. \tag{6}$$

其解为

$$\sin\theta_{\max}=\frac{v_0^2}{4gR}\left(\sqrt{1+16\frac{g^2R^2}{v_0^4}}-1\right). \tag{7}$$

注意到本题中 $\sin\theta\geq 0$，方程(6)的另一解不合题意，舍去. 将(7)式代入(1)式得，当 $\theta=\theta_{\max}$ 时，

$$v_\varphi^2=\frac{1}{2}\left(v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2R^2}\right), \tag{8}$$

考虑到(4)式有

$$v_{\max}=\sqrt{v_\varphi^2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2R^2}\right)}. \tag{9}$$

二、一长为 $2l$ 的轻质刚性细杆位于水平的光滑桌面上，杆的两端分别固定一质量为 m 的小物块 D 和一质量为 αm（α 为常数）的小物块 B，杆可绕通过小物块 B 所在端的竖直固定转轴无摩擦地转动. 一质量为 m 的小环 C 套在细杆上（C 与杆密接），可沿杆滑动，环 C 与杆之间的摩擦可忽略. 一轻质弹簧原长为 l，劲度系数为 k，两端分别与小环 C 和物块 B 相连. 一质量为 m 的小滑块 A 在桌面上以垂直于杆的速度飞向物块 D，并与之发生完全弹性正碰，碰撞时间极短. 碰撞 时滑块 C 恰好静止在距轴为 r（$r>l$）处.

1. 若碰前滑块 A 的速度为 v_0，求碰撞过程中轴受到的作用力的冲量；

2. 若碰后物块 D、C 和杆刚好做匀速转动，求碰前滑块 A 的速度 v_0 应满足的条件.

参考解答：

1. 由于碰撞时间 Δt 很小，弹簧来不及伸缩碰撞已结束. 设碰后 A、C、D 的速度分别为 v_{A}、v_{C}、v_{D}，显然有

$$v_{\mathrm{D}}=\frac{2l}{r}v_{\mathrm{C}}. \tag{1}$$

以 A、B、C、D 为系统，在碰撞过程中，系统相对于轴不受外力矩作用，其相对于轴的角动量守恒

$$mv_{\mathrm{D}}2l+mv_{\mathrm{C}}r+mv_{\mathrm{A}}2l=mv_0 2l. \tag{2}$$

由于轴对系统的作用力不做功，系统内仅有弹力起作用，所以系统机械能守恒. 又由于碰撞时间Δt很小，弹簧来不及伸缩碰撞已结束，所以不必考虑弹性势能的变化. 故

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{D}}^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2=\frac{1}{2}mv_0^2. \tag{3}$$

由 (1)、(2)、(3) 式解得

$$v_C=\frac{4lr}{8l^2+r^2}v_0,\quad v_D=\frac{8l^2}{8l^2+r^2}v_0,\quad v_A=-\frac{r^2}{8l^2+r^2}v_0 \tag{4}$$

[代替 (3) 式，可利用弹性碰撞特点

$$v_0=v_D-v_A. \tag{3'}$$

同样可解出(4).]

设碰撞过程中 D 对 A 的作用力为F_1'，对 A 用动量定理有

$$F_1'\Delta t=mv_{\mathrm{A}}-mv_0=-\frac{4l^2+r^2}{8l^2+r^2}2mv_0, \tag{5}$$

方向与v_0方向相反. 于是，A 对 D 的作用力为F_1的冲量为

$$F_1\Delta t=\frac{4l^2+r^2}{8l^2+r^2}2mv_0 \tag{6}$$

方向与v_0方向相同.

以 B、C、D 为系统，设其质心离转轴的距离为x，则

$$x=\frac{mr+m2l}{(\alpha+2)m}=\frac{2l+r}{\alpha+2}. \tag{7}$$

质心在碰后瞬间的速度为

$$v=\frac{v_{\mathrm{C}}}{r}x=\frac{4l(2l+r)}{(\alpha+2)(8l^2+r^2)}v_0. \tag{8}$$

轴与杆的作用时间也为Δt，设轴对杆的作用力为F_2，由质心运动定理有

$$F_2\Delta t+F_1\Delta t=(\alpha+2)mv=\frac{4l(2l+r)}{8l^2+r^2}mv_0. \tag{9}$$

由此得

$$F_2\Delta t=\frac{r(2l-r)}{8l^2+r^2}2mv_0. \tag{10}$$

方向与v_0方向相同. 因而，轴受到杆的作用力的冲量为

$$F_2'\Delta t=-\frac{r(2l-r)}{8l^2+r^2}2mv_0, \tag{11}$$

方向与v_0方向相反. 注意：因弹簧处在拉伸状态，碰前轴已受到沿杆方向的作用力；在碰撞过程中还有与向心力有关的力作用于轴. 但有限大小的力在无限小的碰撞时间内的冲量趋于零，已忽略.

[代替 (7)-(9) 式，可利用对于系统的动量定理

$$F_2\Delta t + F_1\Delta t = mv_{\mathrm{C}} + mv_{\mathrm{D}}. \qquad]$$

[也可由对质心的角动量定理代替 (7)-(9) 式.]

2. 值得注意的是，(1)、(2)、(3) 式是当碰撞时间极短、以至于弹簧来不及伸缩的条件下才成立的. 如果弹簧的弹力恰好提供滑块 C 以速度 $v_C = \dfrac{4lr}{8l^2 + r^2} v_0$ 绕过 B 的轴做匀速圆周运动的向心力，即

$$k\left(r - \ell\right) = m\frac{v_{\mathrm{C}}^2}{r} = \frac{16l^2 r}{(8l^2 + r^2)^2} m v_0^2 \tag{12}$$

则弹簧总保持其长度不变，(1)、(2)、(3) 式是成立的. 由(12)式得碰前滑块 A 的速度 v_0 应满足的条件

$$v_0 = \frac{(8l^2 + r^2)}{4l}\sqrt{\frac{k\left(r - \ell\right)}{mr}} \tag{13}$$

可见，为了使碰撞后系统能保持匀速转动，碰前滑块 A 的速度大小 v_0 应满足(13)式.

三、一质量为 m 、长为 L 的匀质细杆，可绕过其一端的光滑水平轴 O 在竖直平面内自由转动. 杆在水平状态由静止开始下摆，

1. 令 $\lambda = \dfrac{m}{L}$ 表示细杆质量线密度. 当杆以角速度 ω 绕过其一端的光滑水平轴 O 在竖直平面内转动时，其转动动能可表示为

$$E_k = k\lambda^{\alpha}\omega^{\beta}L^{\gamma}$$

式中，k 为待定的没有单位的纯常数. 已知在同一单位制下，两物理量当且仅当其数值和单位都相等时才相等. 由此求出 α 、β 和 γ 的值.

2. 已知系统的动能等于系统的质量全部集中在质心时随质心一起运动的动能和系统在质心系（随质心平动的参考系）中的动能之和，求常数 k 的值.

3. 试求当杆摆至与水平方向成 θ 角时在杆上距 O 点为 r 处的横截面两侧部分的相互作用力. 重力加速度大小为 g .

提示：如果 $X(t)$ 是 t 的函数，而 $Y(X(t))$ 是 $X(t)$ 的函数，则 $Y(X(t))$ 对 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}Y(X(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$$

例如，函数 $\cos\theta(t)$ 对自变量 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\cos\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

参考解答：

1. 当杆以角速度 ω 绕过其一端的光滑水平轴 O 在竖直平面内转动时，其动能是独立变量 λ 、ω 和 L 的函数，按题意 可表示为

$$E_k = k\lambda^{\alpha}\omega^{\beta}L^{\gamma} \tag{1}$$

式中，k 为待定常数（单位为 1）. 令长度、质量和时间的单位分别为$[L]$、$[M]$和$[T]$（它们可视为相互独立的基本单位），则 λ 、 ω 、 L 和 E_k 的单位分别为

$$\begin{aligned}&[\lambda]=[M][L]^{-1},\\&[\omega]=[T]^{-1},\\&[L]=[L],\\&[E_k]=[M][L]^2[T]^{-2}\end{aligned}\tag{2}$$

在一般情形下，若$[q]$表示物理量q的单位，则物理量q可写为

$$q=(q)[q]\tag{3}$$

式中，(q)表示物理量q在取单位$[q]$时的数值. 这样，(1) 式可写为

$$(E_k)[E_k]=k(\lambda)^{\alpha}(\omega)^{\beta}(L)^{\gamma}[\lambda]^{\alpha}[\omega]^{\beta}[L]^{\gamma}\tag{4}$$

在由(2)表示的同一单位制下，上式即

$$(E_k)=k(\lambda)^{\alpha}(\omega)^{\beta}(L)^{\gamma}\tag{5}$$

$$[E_k]=[\lambda]^{\alpha}[\omega]^{\beta}[L]^{\gamma}\tag{6}$$

将 (2)中第四 式代入 (6) 式得

$$[M][L]^2[T]^{-2}=[M]^{\alpha}[L]^{\gamma-\alpha}[T]^{-\beta}\tag{7}$$

(2)式并未规定基本单位$[L]$、$[M]$和$[T]$的绝对大小，因而(7)式对于任意大小的$[L]$、$[M]$和$[T]$均成立，于是

$$\alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=3\tag{8}$$

所以

$$E_k=k\lambda\omega^2L^3\tag{9}$$

2. 由题意，杆的动能为

$$E_k=E_{k,\mathrm{c}}+E_{k,\mathrm{r}}\tag{10}$$

其中，

$$E_{k,\mathrm{c}}=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{c}}^2=\frac{1}{2}(\lambda L)\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2\tag{11}$$

注意到，杆在质心系中的运动可视为两根长度为$\frac{L}{2}$的杆过其公共端（即质心）的光滑水平轴在铅直平面内转动，因而，杆在质心系中的动能$E_{k,\mathrm{r}}$为

$$E_{k,\mathrm{r}}=2E_k(\lambda,\omega,\frac{L}{2})=2k\lambda\omega^2\left(\frac{L}{2}\right)^3\tag{12}$$

将(9)、 (11)、 (12)式代入(10)式得

$$k\lambda\omega^2L^3=\frac{1}{2}\lambda L\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2+2k\lambda\omega^2\left(\frac{L}{2}\right)^3\tag{13}$$

由此解得

$$k=\frac{1}{6} \tag{14}$$

于是

$$E_k=\frac{1}{6}Iw^2L^3. \tag{15}$$

3. 以细杆与地球为系统，下摆过程中机械能守恒

$$E_k=mg\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) \tag{16}$$

由(15)、(16)式得

$$w=\sqrt{\frac{3g\sin q}{L}}. \tag{17}$$

以在杆上距O点为r处的横截面外侧长为$(L-r)$的那一段为研究对象，该段质量为$\lambda(L-r)$，其质心速度为

$$v_c'=\omega\left(r+\frac{L-r}{2}\right)=\omega\frac{L+r}{2}. \tag{18}$$

设另一段对该段的切向力为T (以θ增大的方向为正方向)， 法向(即与截面相垂直的方向)力为N (以指向O点方向为正向)，由质心运动定理得

$$T+\lambda(L-r)g\cos\theta=\lambda(L-r)a_t \tag{19}$$

$$N-\lambda(L-r)g\sin\theta=\lambda(L-r)a_n \tag{20}$$

式中，a_t为质心的切向加速度的大小

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v_c'}{\mathrm{d}t}=\frac{L+r}{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{L+r}{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{3(L+r)g\cos\theta}{4L} \tag{21}$$

而a_n为质心的法向加速度的大小

$$a_n=\omega^2\frac{L+r}{2}=\frac{3(L+r)g\sin\theta}{2L}. \tag{22}$$

由(19)、(20)、(21)、(22)式解得

$$T=\frac{(L-r)(3r-L)}{4L^2}mg\cos\theta \tag{23}$$

$$N=\frac{(L-r)(5L+3r)}{2L^2}mg\sin\theta \tag{24}$$

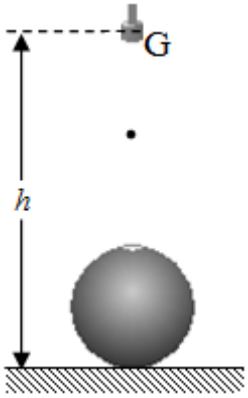
评分标准：本题 25 分.

第 1 问 5 分， (2) 式 1 分， (6) 式 2 分，(7) 式 1 分，(8) 式 1 分；

第 2 问 7 分， (10) 式 1 分，(11) 式 2 分，(12) 式 2 分， (14) 式 2 分；不依赖第 1 问的结果，用其他方法正确得出此问结果的，同样给分；

第 3 问 13 分，(16) 式 1 分，(17) 式 1 分，(18) 式 1 分，(19) 式 2 分，(20) 式 2 分，(21) 式 2 分，(22) 式 2 分，(23) 式 1 分，(24) 式 1 分；不依赖第 1、2 问的结果，用其他方法正确得出此问结果的，同样给分.

四、图中所示的静电机由一个半径为 R 、与环境绝缘的开口（朝上）金属球壳形的容器和一个带电液滴产生器 G 组成. 质量为 m 、带电量为 q 的球形液滴从 G 缓慢地自由掉下（所谓缓慢，意指在 G 和容器口之间总是只有一滴液滴）. 液滴开始下落时相对于地面的高度为 h . 设液滴很小，容器足够大，容器在达到最高电势之前进入容器的液体尚未充满容器. 忽略 G 的电荷对正在下落的液滴的影响.重力加速度大小为 g . 若容器初始电势为零，求容器可达到的最高电势 $V_{\max}$.



参考解答：

设在某一时刻球壳形容器的电量为 Q . 以液滴和容器为体系，考虑从一滴液滴从带电液滴产生器 G 出口自由下落到容器口的过程. 根据能量守恒有

$$mgh+k\frac{Qq}{h-R}=\frac{1}{2}mv^2+2mgR+k\frac{Qq}{R}. \tag{1}$$

式中， v 为液滴在容器口的速率， k 是静电力常量. 由此得液滴的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(h-2R)-k\frac{Qq(h-2R)}{(h-R)R}. \tag{2}$$

从上式可以看出，随着容器电量 Q 的增加，落下的液滴在容器口的速率 v 不断变小；当液滴在容器口的速率为零时，不能进入容器，容器的电量停止增加，容器达到最高电势. 设容器的最大电量为 $Q_{\max}$ ，则有

$$mg(h-2R)-k\frac{Q_{\max}q(h-2R)}{(h-R)R}=0. \tag{3}$$

由此得

$$Q_{\max}=\frac{mg(h-R)R}{kq}. \tag{4}$$

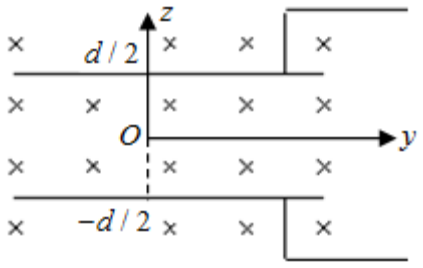
容器的最高电势为

$$V_{\max}=k\frac{Q_{\max}}{R} \tag{5}$$

由(4) 和 (5)式得

$$V_{\max}=\frac{mg(h-R)}{q} \tag{6}$$

五、平行板电容器两极板分别位于 $z=\pm\dfrac{d}{2}$ 的平面内，电容器起初未被充电. 整个装置处于均匀磁场中，磁感应强度大小为 B，方向沿 x 轴负方向，如图所示.



1. 在电容器参考系 S 中只存在磁场；而在以沿y轴正方向的恒定速度 $(0,v,0)$（这里 $(0,v,0)$ 表示为沿x、y、z轴正方向的速度分量分别为0、v、0，以下类似）相对于电容器运动的参考系 S' 中，可能既有电场 (E'_x,E'_y,E'_z) 又有磁场 (B'_x,B'_y,B'_z). 试在非相对论情形下，从伽利略速度变换，求出在参考系 S' 中电场 (E'_x,E'_y,E'_z) 和磁场 (B'_x,B'_y,B'_z) 的表达式. 已知电荷量和作用在物体上的合力在伽利略变换下不变.

2. 现在让介电常数为 ε 的电中性液体（绝缘体）在平行板电容器两极板之间匀速流动，流速大小为 v，方向沿 y 轴正方向. 在相对液体静止的参考系（即相对于电容器运动的参考系）S' 中，由于液体处在第1问所述的电场 (E'_x,E'_y,E'_z) 中，其正负电荷会因电场力作用而发生相对移动（即所谓极化效应），使得液体中出现附加的静电感应电场，因而液体中总电场强度不再是 (E'_x,E'_y,E'_z)，而是 $\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(E'_x,E'_y,E'_z)$，这里 ε_0 是真空的介电常数. 这将导致在电容器参考系 S 中电场不再为零. 试求电容器参考系 S 中电场的强度以及电容器上、下极板之间的电势差. （结果用 ε_0、ε、v、B 或（和）d 表出.）

参考解答：

1. 一个带电量为 q 的点电荷在电容器参考系 S 中的速度为 (u_x,u_y,u_z)，在运动的参考系 S' 中的速度为 (u'_x,u'_y,u'_z). 在参考系 S 中只存在磁场 $(B_x,B_y,B_z)=(-B,0,0)$，因此这个点电荷在参考系 S 中所受磁场的作用力为

$$\begin{aligned} F_x &= 0, \\ F_y &= -qu_zB, \\ F_z &= qu_yB \end{aligned} \tag{1}$$

在参考系 S' 中可能既有电场 (E'_x,E'_y,E'_z) 又有磁场 (B'_x,B'_y,B'_z)，因此点电荷 q 在 S' 参考系中所受电场和磁场的作用力的合力为

$$\begin{aligned} F'_x &= q'(E'_x+u'_yB'_z-u'_zB'_y), \\ F'_y &= q'(E'_y-u'_xB'_z+u'_zB'_x), \\ F'_z &= q'(E'_z+u'_xB'_y-u'_yB'_x) \end{aligned} \tag{2}$$

两参考系中电荷、合力和速度的变换关系为

$$
\begin{aligned}
&q' = q,\\
&(F_x', F_y', F_z') = (F_x, F_y, F_z),\\
&(u_x', u_y', u_z') = (u_x, u_y, u_z) - (0, v, 0)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

由(1)、 (2)、 (3)式可知电磁场在两参考系中的电场强度和磁感应强度满足

$$
\begin{aligned}
&E_x' + (u_y - v)B_z' - u_z B_y' = 0,\\
&E_y' - u_x B_z' + u_z B_x' = -u_z B,\\
&E_z' + u_x B_y' - (u_y - v)B_x' = u_y B
\end{aligned}
\tag{4}
$$

它们对于任意的 (u_x, u_y, u_z) 都成立，故

$$
\begin{aligned}
&(E_x', E_y', E_z') = (0, 0, vB),\\
&(B_x', B_y', B_z') = (-B, 0, 0)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

可见两参考系中的磁场相同，但在运动的参考系 S' 中却出现了沿z方向的匀强电场.

2. 现在，电中性液体在平行板电容器两极板之间以速度 $(0, v, 0)$ 匀速运动. 电容器参考系 S 中的磁场会在液体参考系 S' 中产生由(5)式中第一个方程给出的电场. 这个电场会把液体极化，使得液体中的电场为

$$
(E_x', E_y', E_z') = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(0, 0, vB)\,. \tag{6}
$$

为了求出电容器参考系 S 中的电场，我们再次考虑电磁场的电场强度和磁感应强度在两个参考系之间的变换，从液体参考系 S' 中的电场和磁场来确定电容器参考系 S 中的电场和磁场. 考虑一带电量为 q 的点电荷在两参考系中所受的电场和磁场的作用力. 在液体参考系 S' 中，这力 (F_x', F_y', F_z') 如(2)式所示. 它在电容器参考系 S 中的形式为

$$
\begin{aligned}
&F_x = q(E_x + u_y B_z - u_z B_y),\\
&F_y = q(E_y - u_x B_z + u_z B_x),\\
&F_z = q(E_z + u_x B_y - u_y B_x)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

利用两参考系中电荷、合力和速度的变换关系(3)以及(6)式，可得

$$
\begin{aligned}
&E_x + u_y B_z - u_z B_y = 0,\\
&E_y - u_x B_z + u_z B_x = -u_z B,\\
&E_z + u_x B_y - u_y B_x = \frac{\varepsilon_0 vB}{\varepsilon} + (u_y - v)B
\end{aligned}
\tag{8}
$$

对于任意的 (u_x, u_y, u_z) 都成立，故

$$
\begin{aligned}
&(E_x, E_y, E_z) = (0, 0, (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)vB),\\
&(B_x, B_y, B_z) = (-B, 0, 0)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

可见，在电容器参考系 S 中的磁场仍为原来的磁场，现由于运动液体的极化，也存在电场，电场强度如(9)中第一式所示.

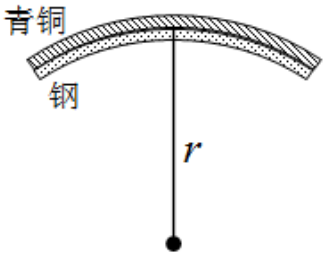
注意到(9)式所示的电场为均匀电场，由它产生的电容器上、下极板之间的电势差为

$$V=-E_z d\ . \tag{10}$$

由(9)式中第一式和(10)式得

$$V=\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)vBd\ . \tag{11}$$

六、温度开关用厚度均为0.20 mm的钢片和青铜片作感温元件；在温度为20℃时，将它们紧贴，两端焊接在一起，成为等长的平直双金属片. 若钢和青铜的线膨胀系数分别为1.0×10^{-5}/度和2.0×10^{-5}/度. 当温度升高到120℃时，双金属片将自动弯成圆弧形，如图所示. 试求双金属片弯曲的曲率半径. (忽略加热时金属片厚度的变化.)



参考解答：

设弯成的圆弧半径为r，金属片原长为l，圆弧所对的圆心角为ϕ，钢和青铜的线膨胀系数分别为α_1和α_2，钢片和青铜片温度由$T_1=20℃$升高到$T_2=120℃$时的伸长量分别为Δl_1和Δl_2. 对于钢片

$$(r-\frac{d}{2})\phi=l+\Delta l_1 \tag{1}$$

$$\Delta l_1=l\alpha_1(T_2-T_1) \tag{2}$$

式中，$d=0.20$ mm. 对于青铜片

$$(r+\frac{d}{2})\phi=l+\Delta l_2 \tag{3}$$

$$\Delta l_2=l\alpha_2(T_2-T_1) \tag{4}$$

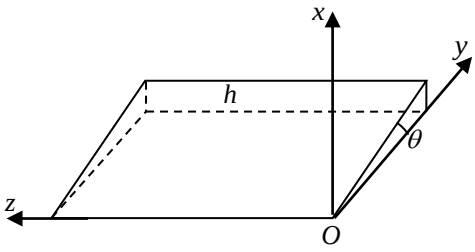
联立以上各式得

$$r=\frac{2+(\alpha_1+\alpha_2)(T_2-T_1)}{2(\alpha_2-\alpha_1)(T_2-T_1)}d=2.0\times10^2\ \text{mm} \tag{5}$$

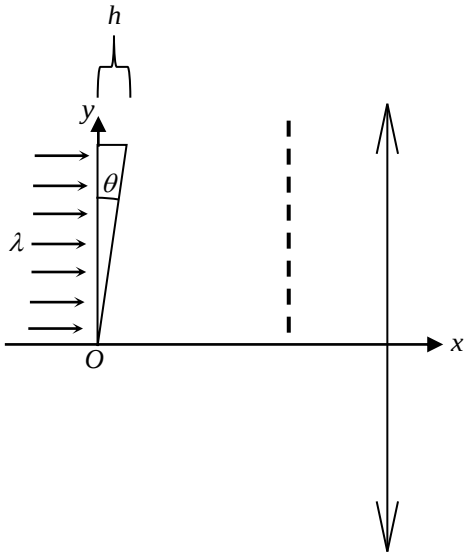
七、一斜劈形透明介质劈尖，尖角为θ，高为h. 今以尖角顶点为坐标原点，建立坐标系如图(a)所示；劈尖斜面实际上是由一系列微小台阶组成的，在图(a)中看来，每一个小台阶的前侧面与xz平面平行，上表面与yz平面平行. 劈尖介质的折射率n随x而变化，$n(x)=1+bx$，其中常数$b>0$. 一束波长为λ的单色平行光沿x轴正方向照射劈尖；劈尖后放置一薄凸透镜，在劈尖与薄凸透镜之间放一档板，在档板上刻有一系列与z方向平行、沿y方向排列的透光狭缝，如图(b)所示. 入射光的波面（即与平行入射光线垂直的平面）、劈尖底面、档板平面都与x轴垂直，透镜主光轴为x轴. 要求通过各狭缝的透射光彼此在透镜焦点处得到加强而形成亮纹. 已知第一条狭缝位于$y=0$处；物和像之间各光线的光程相等.

1. 求其余各狭缝的 y 坐标；

2. 试说明各狭缝彼此等距排列能否仍然满足上述要求.



图(a)



图(b)

参考解答：

1. 考虑射到劈尖上某 y 值处的光线，计算该光线由 $x=0$ 到 $x=h$ 之间的光程 $\delta(y)$. 将该光线在介质中的光程记为 δ_1，在空气中的光程记为 δ_2. 介质的折射率是不均匀的，光入射到介质表面时，在 $x=0$ 处，该处介质的折射率 $n(0)=1$；射到 x 处时，该处介质的折射率 $n(x)=1+bx$. 因折射率随 x 线性增加，光线从 $x=0$ 处射到 $x=h_1$（h_1 是劈尖上 y 值处光线在劈尖中传播的距离）处的光程 δ_1 与光通过折射率等于平均折射率

$$\bar{n}=\frac{1}{2}\left[n(0)+n(h_1)\right]=\frac{1}{2}\left(1+1+bh_1\right)=1+\frac{1}{2}bh_1 \tag{1}$$

的均匀介质的光程相同，即

$$\delta_1=\bar{n}h_1=h_1+\frac{1}{2}bh_1^2 \tag{2}$$

忽略透过劈尖斜面相邻小台阶连接处的光线（事实上，可通过选择台阶的尺度和档板上狭缝的位置来避开这些光线的影响），光线透过劈尖后其传播方向保持不变，因而有

$$\delta_2=h-h_1 \tag{3}$$

于是

$$\delta(y)=\delta_1+\delta_2=h+\frac{1}{2}bh_1^2. \tag{4}$$

由几何关系有

$$h_1=y\tan\theta. \tag{5}$$

故

$$\delta(y)=h+\frac{b}{2}y^2\tan^2\theta. \tag{6}$$

从介质出来的光经过狭缝后仍平行于 x 轴，狭缝的 y 值应与对应介质的 y 值相同，这些平行光线会聚在透镜焦点处.

对于 $y=0$ 处，由上式得

$$\delta(0)=h. \tag{7}$$

y 处与 $y=0$ 处的光线的光程差为

$$\delta(y)-\delta(0)=\frac{b}{2}y^2\tan^2\theta. \tag{8}$$

由于物像之间各光线的光程相等，故平行光线之间的光程差在通过透镜前和会聚在透镜焦点处时保持不变；因而(8)式在透镜焦点处也成立. 为使光线经透镜会聚后在焦点处彼此加强，要求两束光的光程差为波长的整数倍，即

$$\frac{b}{2}y^2\tan^2\theta=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots. \tag{9}$$

由此得

$$y=\sqrt{\frac{2k\lambda}{b}}\cot\theta=A\sqrt{k},\quad A=\sqrt{\frac{2\lambda}{b}}\cot\theta. \tag{10}$$

除了位于 $y=0$ 处的狭缝外，其余各狭缝对应的 y 坐标依次为

$$A,\ \sqrt{2}A,\ \sqrt{3}A,\ \sqrt{4}A,\ \cdots. \tag{11}$$

2. 各束光在焦点处彼此加强，并不要求(11)中各项都存在. 将各狭缝彼此等距排列仍可能满足上述要求. 事实上，若依次取 $k=m,4m,9m,\cdots$，其中 m 为任意正整数，则

$$y_m=\sqrt{m}A,\ y_{4m}=2\sqrt{m}A,\ y_{9m}=3\sqrt{m}A,\cdots. \tag{12}$$

这些狭缝显然彼此等间距，且相邻狭缝的间距均为 $\sqrt{m}A$，光线在焦点处依然相互加强而形成亮纹.

八、光子被电子散射时，如果初态电子具有足够的动能，以至于在散射过程中有能量从电子转移到光子，则该散射被称为逆康普顿散射. 当低能光子与高能电子发生对头碰撞时，就会出现逆康普顿散射. 已知电子静止质量为 m_e，真空中的光速为 c. 若能量为 E_e 的电子与能量为 E_γ 的光子相向对碰，

1. 求散射后光子的能量；

2. 求逆康普顿散射能够发生的条件；

3. 如果入射光子能量为 2.00 eV，电子能量为 1.00×10^9 eV，求散射后光子的能量. 已知 $m_e=0.511\times10^6\ \text{eV}/c^2$. 计算中有必要时可利用近似：如果 $|x|\ll1$，有 $\sqrt{1-x}\approx1-\frac{1}{2}x$.

参考解答：

1. 设碰撞前电子、光子的动量分别为 p_e（$p_e>0$）、p_γ（$p_\gamma<0$），碰撞后电子、光子的能量、

动量分别为 $E_e', p_e', E_\gamma', p_\gamma'$. 由能量守恒有

$$E_e + E_g = E_e' + E_g'. \tag{1}$$

由动量守恒有

$$\begin{aligned} p_e + p_\gamma &= p_e' \cos\alpha + p_\gamma' \cos\theta, \\ p_e' \sin\alpha &= p_\gamma' \sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

式中，α 和 θ 分别是散射后的电子和光子相对于碰撞前电子的夹角. 光子的能量和动量满足

$$E_g = |p_g| c, \; E_g' = |p_g'| c. \tag{3}$$

电子的能量和动量满足

$$E_e^2 - p_e^2 c^2 = m_e^2 c^4, \quad E_e'^2 - p_e'^2 c^2 = m_e^2 c^4 \tag{4}$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式解得

$$E_\gamma' = \frac{E_\gamma \left(E_e + \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \right)}{E_e + E_\gamma + \left(E_\gamma - \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \right) \cos\theta} \tag{5}$$

[

由(2)式得

$$p_e'^2 c^2 = p_\gamma'^2 c^2 + (p_e c + p_\gamma c)^2 - 2 p_\gamma' c (p_e c + p_\gamma c) \cos\theta$$

此即动量 p' 、 p_e' 和 $p_e + p_\gamma$ 满足三角形法则. 将(3)、(4)式代入上式，并利用(1)式，得

$$(E_e + E_\gamma - 2E_\gamma')(E_e + E_\gamma) = E_e^2 + E_\gamma^2 - 2E_\gamma \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} + 2E_\gamma' E_\gamma \cos\theta - 2E_\gamma' \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cos\theta$$

此即(5)式.

]

当 $\theta \to 0$ 时有

$$E_\gamma' = \frac{E_\gamma \left(E_e + \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \right)}{\left(E_e - \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \right) + 2E_\gamma} \tag{6}$$

2. 为使能量从电子转移到光子，要求 $E_g' > E_g$. 由(5)式可见，需有

$$\begin{aligned} E_\gamma' - E_\gamma &= \frac{2E_\gamma (\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} - E_\gamma)(1 + \cos\theta)}{E_e + E_\gamma + \left(E_\gamma - \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \right) \cos\theta} \\ &= \frac{2E_\gamma (\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} - E_\gamma)(1 + \cos\theta)}{E_e - \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cos\theta + E_\gamma (1 + \cos\theta)} > 0 \end{aligned}$$

此即

$$\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} > E_\gamma \quad \text{或} \quad p_e > |p_\gamma| \tag{7}$$

注意已设 $p_e > 0$、 $p_g < 0$.

3. 由于 $E_e >> m_e c^2$ 和 $E_e >> E_\gamma$ ，因而 $|p_e + p_\gamma| >> |p_\gamma|$ ，由(5)式可知 $|p_\gamma'| >> |p_\gamma|$ ，因此有 $\theta \approx 0$. 又

$$\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \approx E_e - \frac{m_e^2 c^4}{2E_e}. \tag{8}$$

将(8)式代入(6)式得

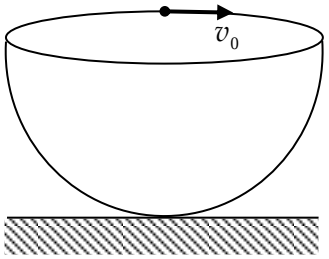
$$E_g' \approx \frac{2E_e E_g}{2E_g + m_e^2 c^4 / 2E_e}. \tag{9}$$

代入数据，得

$$E_g' \approx 29.7 \times 10^6 \text{ eV}. \tag{10}$$

第 30 届全国中学生物理竞赛复赛考试试题

一、（15分）一半径为 R 、内侧光滑的半球面固定在地面上，开口水平且朝上. 一小滑块在半球面内侧最高点处获得沿球面的水平速度，其大小为 v_0 ($v_0 \neq 0$). 求滑块在整个运动过程中可能达到的最大速率. 重力加速度大小为 g .



二、（20 分）一长为 $2l$ 的轻质刚性细杆位于水平的光滑桌面上，杆的两端分别固定一质量为 m 的小物块 D 和一质量为 αm （ α 为常数）的小物块 B，杆可绕通过小物块 B 所在端的竖直固定转轴无摩擦地转动. 一质量为 m 的小环 C 套在细杆上（C 与杆密接），可沿杆滑动，环 C 与杆之间的摩擦可忽略. 一轻质弹簧原长为 l，劲度系数为 k，两端分别与小环 C 和物块 B 相连. 一质量为 m 的小滑块 A 在桌面上以垂直于杆的速度飞向物块 D，并与之发生完全弹性正碰，碰撞时间极短. 碰撞时滑块 C 恰好静止在距轴为 r （ $r > l$ ）处.

1. 若碰前滑块 A 的速度为 v_0，求碰撞过程中轴受到的作用力的冲量；

2. 若碰后物块 D、C 和杆刚好做匀速转动，求碰前滑块 A 的速度 v_0 应满足的条件.

三、（25 分）一质量为 m 、长为 L 的匀质细杆，可绕过其一端的光滑水平轴 O 在竖直平面内自由转动. 杆在水平状态由静止开始下摆，

1. 令 $\lambda = \dfrac{m}{L}$ 表示细杆质量线密度. 当杆以角速度 ω 绕过其一端的光滑水平轴 O 在竖直平面内转动时，其转动动能可表示为

$$E_k = k\lambda^{\alpha}\omega^{\beta}L^{\gamma}$$

式中， k 为待定的没有单位的纯常数. 已知在同一单位制下，两物理量当且仅当其数值和单位都相等时才相等. 由此求出 α 、 β 和 γ 的值.

2. 已知系统的动能等于系统的质量全部集中在质心时随质心一起运动的动能和系统在质心系（随质心平动的参考系）中的动能之和，求常数 k 的值.

3. 试求当杆摆至与水平方向成 θ 角时在杆上距 O 点为 r 处的横截面两侧部分的相互作用力. 重力加速度大小为 g .

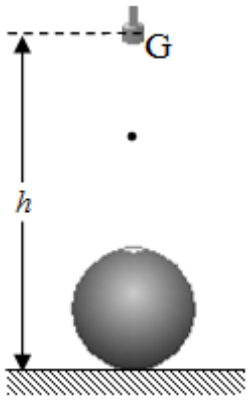
提示：如果 $X(t)$ 是 t 的函数，而 $Y(X(t))$ 是 $X(t)$ 的函数，则 $Y(X(t))$ 对 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}Y(X(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$$

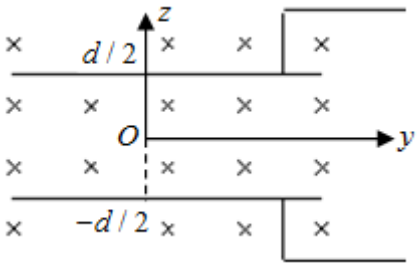
例如，函数 $\cos\theta(t)$ 对自变量 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\cos\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

四、（20 分）图中所示的静电机由一个半径为 R 、与环境绝缘的开口（朝上）金属球壳形的容器和一个带电液滴产生器 G 组成. 质量为 m 、带电量为 q 的球形液滴从 G 缓慢地自由掉下（所谓缓慢，意指在 G 和容器口之间总是只有一滴液滴）. 液滴开始下落时相对于地面的高度为 h . 设液滴很小，容器足够大，容器在达到最高电势之前进入容器的液体尚未充满容器. 忽略 G 的电荷对正在下落的液滴的影响.重力加速度大小为 g . 若容器初始电势为零，求容器可达到的最高电势 $V_{\max}$.



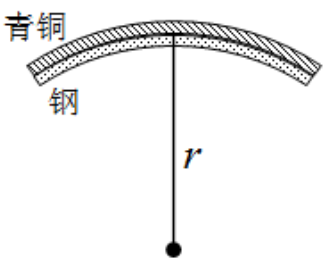
五、（25 分）平行板电容器两极板分别位于 $z=\pm\dfrac{d}{2}$ 的平面内，电容器起初未被充电. 整个装置处于均匀磁场中，磁感应强度大小为 B ，方向沿 x 轴负方向，如图所示.



1. 在电容器参考系 S 中只存在磁场；而在以沿y轴正方向的恒定速度 $(0,v,0)$（这里 $(0,v,0)$ 表示为沿x、y、z轴正方向的速度分量分别为0、 v 、0，以下类似）相对于电容器运动的参考系 S' 中，可能既有电场 (E'_x,E'_y,E'_z) 又有磁场 (B'_x,B'_y,B'_z). 试在非相对论情形下，从伽利略速度变换，求出在参考系 S' 中电场 (E'_x,E'_y,E'_z) 和磁场 (B'_x,B'_y,B'_z) 的表达式. 已知电荷量和作用在物体上的合力在伽利略变换下不变.

2. 现在让介电常数为 ε 的电中性液体（绝缘体）在平行板电容器两极板之间匀速流动，流速大小为 v ，方向沿 y 轴正方向. 在相对液体静止的参考系（即相对于电容器运动的参考系） S' 中，由于液体处在第1问所述的电场 (E'_x,E'_y,E'_z) 中，其正负电荷会因电场力作用而发生相对移动（即所谓极化效应），使得液体中出现附加的静电感应电场，因而液体中总电场强度不再是 (E'_x,E'_y,E'_z) ，而是 $\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(E'_x,E'_y,E'_z)$ ，这里 ε_0 是真空的介电常数. 这将导致在电容器参考系 S 中电场不再为零. 试求电容器参考系 S 中电场的强度以及电容器上、下极板之间的电势差. （结果用 ε_0 、 ε 、 v 、 B 或（和） d 表出. ）

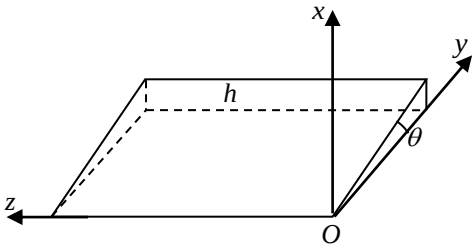
六、（15 分）温度开关用厚度均为 $0.20\ \text{mm}$ 的钢片和青铜片作感温元件；在温度为 20°C 时，将它们紧贴，两端焊接在一起，成为等长的平直双金属片. 若钢和青铜的线膨胀系数分别为 1.0×10^{-5} /度和 2.0×10^{-5} /度. 当温度升高到 120°C 时，双金属片将自动弯成圆弧形，如图所示. 试求双金属片弯曲的曲率半径. (忽略加热时金属片厚度的变化.)



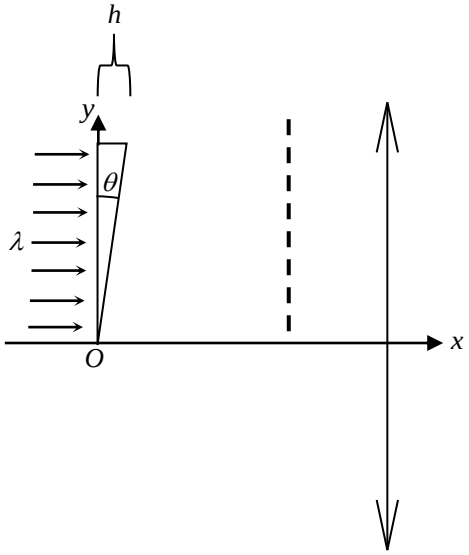
七、（20分）一斜劈形透明介质劈尖，尖角为θ，高为h．今以尖角顶点为坐标原点，建立坐标系如图(a)所示；劈尖斜面实际上是由一系列微小台阶组成的，在图(a)中看来，每一个小台阶的前侧面与xz平面平行，上表面与yz平面平行．劈尖介质的折射率n随x而变化，$n(x)=1+bx$，其中常数$b>0$．一束波长为λ的单色平行光沿x轴正方向照射劈尖；劈尖后放置一薄凸透镜，在劈尖与薄凸透镜之间放一档板，在档板上刻有一系列与z方向平行、沿y方向排列的透光狭缝，如图(b)所示．入射光的波面（即与平行入射光线垂直的平面）、劈尖底面、档板平面都与x轴垂直，透镜主光轴为x轴．要求通过各狭缝的透射光彼此在透镜焦点处得到加强而形成亮纹．已知第一条狭缝位于$y=0$处；物和像之间各光线的光程相等．

1. 求其余各狭缝的y坐标；

2. 试说明各狭缝彼此等距排列能否仍然满足上述要求．



图(a)



图(b)

八、（20分）光子被电子散射时，如果初态电子具有足够的动能，以至于在散射过程中有能量从电子转移到光子，则该散射被称为逆康普顿散射．当低能光子与高能电子发生对头碰撞时，就会出现逆康普顿散射．已知电子静止质量为m_e，真空中的光速为c．若能量为E_e的电子与能量为E_γ的光子相向对碰，

1. 求散射后光子的能量；

2. 求逆康普顿散射能够发生的条件；

3. 如果入射光子能量为2.00 eV，电子能量为1.00×10^9 eV，求散射后光子的能量．已知$m_e=0.511\times10^6\ \text{eV}/c^2$．计算中有必要时可利用近似：如果$|x|<<1$，有$\sqrt{1-x}\approx1-\frac{1}{2}x$．