第 29 届全国中学生物理竞赛决赛考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷									
复核									

考生须知

1、考生考试前务必认真阅读本须知。

2、本次考试时间为 3 个小时。

3、本试卷从本页开始，共 8 张（16 页），含八道大题，总分为 140 分。试卷的每一页下面标出了该页的页码和试卷的总页数，请认真核对每一页的页码和总页数是否正确，每一页中是否有印刷不清楚的地方，发现问题请及时与监考老师联系。

4、每道试题后面留有空白，请在每题后面的空白处写相应题目的解答。

5、填空题的答案必须填在题中给定的横线上方的空格内。

6、计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写出最后结果的不能得分. 有数值计算的，答案中必须明确写出数值和单位。

7、试卷的密封线内和背面不允许答题。

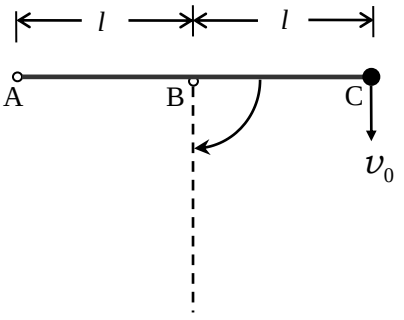
8、考生可以用发的草稿纸打草稿，但需要阅卷老师评阅的内容一定要写到本试卷相应题目后面的空白处；阅卷老师只评阅试卷上的内容，写在草稿纸上的解答一律无效。

----------以下为试题----------

一、（15 分）

得分	阅卷	复核

如图所示，竖直的光滑墙面上有 A 和 B 两个钉子，二者处于同一水平高度，间距为 l. 有一原长为 l、劲度系数为 k 的轻橡皮筋，一端由 A 钉固定，另一端系有一质量为 $m=kl/(4g)$ 的小球，其中 g 为重力加速度. 钉子和小球都可视为质点，小球和任何物体碰撞都是完全非弹性碰撞而且不发生粘连. 现将小球水平向右拉伸到与 A 钉距离为 $2l$ 的 C 点，B 钉恰好处于橡皮筋下面并始终与之光滑接触. 初始时刻小球获得大小为 $v_0=\sqrt{gl}/2$、方向竖直向下的速度，试确定此后小球沿竖直方向的速度为零的时刻.

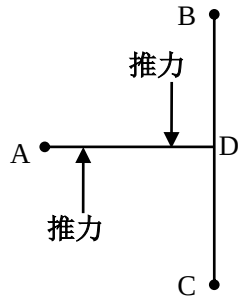


省（区）市 ____ 中学 姓名 ____ 考号 ____ 考场号 ____ 座位号 ____
密 封 线 密 封 线

密 封 线

二、（20 分）

得分	阅卷	复核



如图所示，三个质量均为 m 的小球固定于由刚性轻质杆构成的丁字形架的三个顶点 A、B 和 C 处. $AD \perp BC$，且 $AD = BD = CD = a$，小球可视为质点，整个杆球体系置于水平桌面上，三个小球和桌面接触，轻质杆架悬空. 桌面和三小球之间的静摩擦和滑动摩擦因数均为 μ，在 AD 杆上距 A 点 $a/4$ 和 $3a/4$ 两处分别施加一垂直于此杆的推力，且两推力大小相等、方向相反.

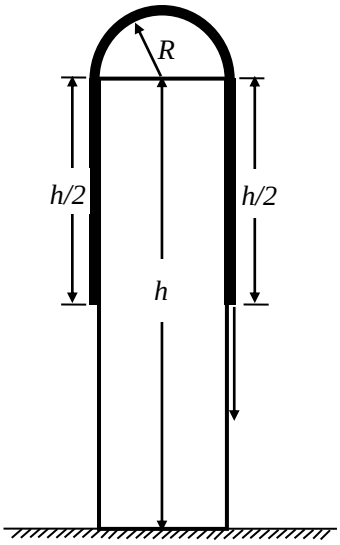
1. 试论证在上述推力作用下，杆球体系处于由静止转变为运动的临界状态时，三球所受桌面的摩擦力都达到最大静摩擦力；

2. 如果在 AD 杆上有一转轴，随推力由零逐渐增加，整个装置将从静止开始绕该转轴转动. 问转轴在 AD 杆上什么位置时，推动该体系所需的推力最小，并求出该推力的大小.

三、（**20** 分）

得分	阅卷	复核

不光滑水平地面上有一质量为 m 的刚性柱体，两者之间的摩擦因数记为 μ. 柱体正视图如图所示，其下部为一高度为 h 的矩形，上部为一半径为 R 的半圆形. 柱体上表面静置一质量同为 m 的均匀柔软的链条，链条两端距地面的高度均为 $h/2$，链条和柱体表面始终光滑接触. 初始时，链条受到微小扰动而沿柱体右侧面下滑. 试求在链条开始下滑直至其右端接触地面之前的过程中，当题中所给参数满足什么关系时，



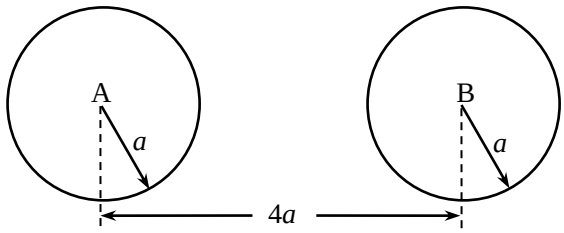
1. 柱体能在地面上滑动；
2. 柱体能向一侧倾倒；
3. 在上述两条件满足的情形下，柱体滑动先于倾倒发生.

密 封 线

密 封 线

四、（20 分）

得分	阅卷	复核



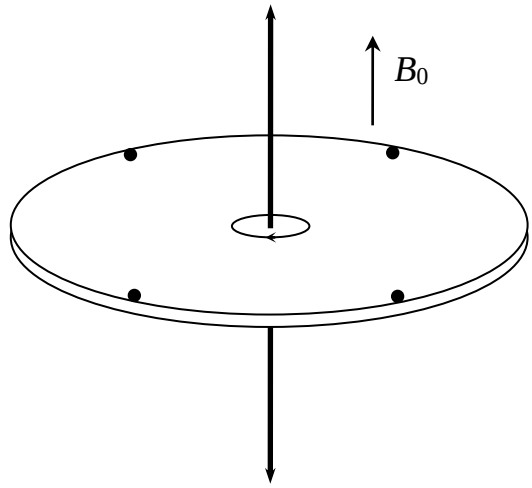
如图所示，在一光滑水平圆桌面上有两个质量、电荷都均匀分布的介质球，两球半径均为 a，A 球质量为 m，所带电荷量为 Q，B 球质量为 $4m$，所带电荷量为 $-4Q$. 在初始时刻，两球球心距为 $4a$，各有一定的初速度，以使得两球在以后的运动过程中不发生碰撞，且都不会从圆桌面掉落. 现要求在此前提下尽量减小桌面面积，试求

1. 两球初速度的方向和大小；
2. 圆桌面的最小半径.

假设两球在运动过程中，其所带电荷量始终保持均匀分布；桌面也不发生极化效应. 已知两个均匀带电球之间的静电相互作用力，等于电荷集中在球心的两个点电荷之间的相互作用力；静电力常量为 k_e.

五、（20 分）

得分	阅卷	复核



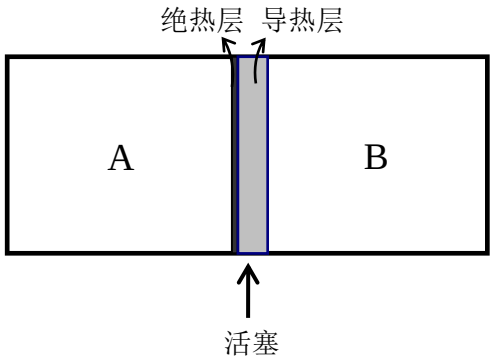
如图所示，一半径为 R 的轻质绝缘塑料薄圆盘水平放置，可绕过圆盘中心的竖直固定轴无摩擦地自由转动. 一半径为 a 的轻质小圆线圈($a << R$)固定在盘面上，圆线圈与圆盘共轴. 在盘边缘处等间隔地固定 4 个质量均为 m 的带正电的金属小球，每个小球所带电荷量均为 q. 此装置处在一磁感应强度大小为 B_0、方向竖直向上的均匀强磁场中. 初始时圆盘静止，圆线圈中通有恒定电流 I，方向沿顺时针方向（从上往下看）. 若切断圆线圈中的电流，则圆盘将发生转动. 求薄圆盘转动后，圆盘在水平方向对每个金属小球的作用力的大小.

假设金属小球可视为质点，不计小圆线圈的自感和带电金属小球因运动所产生的磁场. 已知固定在圆盘面上的半径为 a、通有电流 I 的圆线圈在圆盘平面内、距线圈圆心的距离为 r 处($r >> a$)产生的磁场的磁感应强度的大小为 $B = k_{\mathrm{m}} \dfrac{2\pi a^2 I}{r^3}$，式中 k_{m} 为已知常量，当线圈中的电流沿顺时针方向时，磁场方向垂直于圆盘平面且竖直向上. 静电力常量为 k_{e}.

密 封 线

六、（15 分）

得分	阅卷	复核



如图，一水平放置的刚性密闭气缸，缸壁是绝热的，活塞把气缸内空间分为两个体积相同的密闭室 A 和 B. 活塞由一层热容量很小（略去其影响）、导热良好的材料（与气缸壁有摩擦）和一薄层绝热材料（与气缸壁没有摩擦）压制而成，绝热层在 A 室一侧. 初始时，A 室和 B 室充有绝对温度均为T_0 的同种多原子分子理想气体，A 室气体压强是 B 室气体压强的 4 倍. 现释放活塞，活塞由于其导热部分与汽缸壁之间存在摩擦而运动缓慢，最后停止在平衡位置（此时活塞与缸壁间无静摩擦）.

已知气缸中的气体具有如下特性：在温度高于某个临界温度T_d $(>T_0)$时，部分多原子气体分子将发生分解，一个多原子分子可以分解为另外两个相同的多原子分子. 被分解的气体摩尔数与发生分解前气体总摩尔数之比 α 满足关系 $\alpha=\beta(T-T_d)$，其中 $\beta=2.00T_0^{-1}$. 分解过程是可逆的，分解 1 摩尔分子所需能量$\phi=CT_0/10$，1 摩尔气体的内能与绝对温度T 的关系为$u=CT$ (C 是与气体的种类无关的常量). 已知当压强为P、体积为V 的这种气体绝热缓慢膨胀时，$PV^\gamma=$常量，其中$\gamma=4/3$.

1. 对于具有上述特性的某种气体，若实验测得在上述过程结束时没有任何分子发生了分解，求这种分子发生分解的临界温度T_d 的可能值；

2. 对于具有上述特性的另一种气体，若实验测得在上述过程结束时有$\alpha=10.0\%$ 的分子分解了，求这种分子发生分解的临界温度T_d.

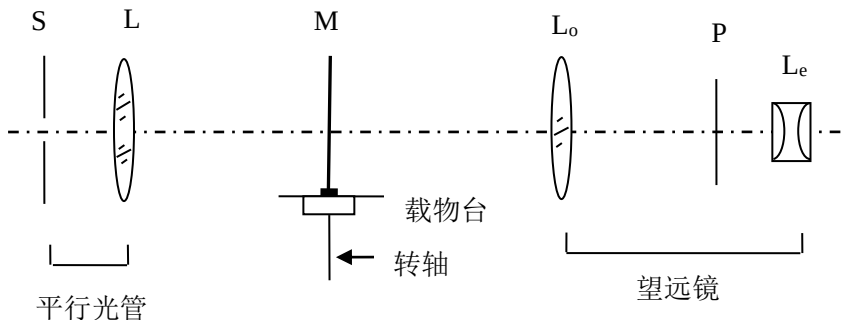
七、（15 分）

得分	阅卷	复核

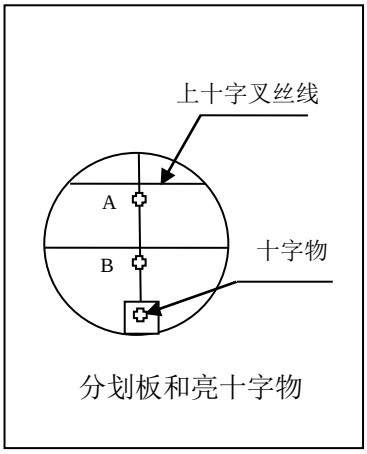
如图一所示的光学系统是由平行光管、载物台和望远镜组成. 已知望远镜物镜 L_o 的焦距为 16.00cm. 在 L_o 的焦平面 P 处，放置带十字叉丝线的分划板和亮十字物，如图二所示. 在载物台上放置双面平行的平面镜 M，通过望远镜的目镜 L_e 观察时，能同时清楚地看到分划板上的十字叉丝线和十字物经过 L_o 折射、M 反射、再经 L_o 折射后在分划板上所成的十字像，十字像位于 A 点，与上十字叉丝线的距离为 5.2mm. 绕载物台转轴（沿竖直方向）转动载物台，使平面镜转 $180°$，此时十字像位于 B 点，与上十字叉丝线的距离为 18.8mm. 根据以上情况和数据可计算出，此时望远镜光轴与水平面的夹角为_____ rad；据此结果，调节望远镜，使其光轴与载物台的转轴垂直.

平行光管是由十字缝 S 和凸透镜 L 组成. 去掉光学系统中的平面镜 M，并用钠光灯照亮 S. 沿水平方向移动 S，当 S 到平行光管中的透镜 L 距离为 8.25cm 时，通过望远镜目镜能清楚地看到十字缝的像成在分划板中心十字叉丝线上，由此可以推知，L 的焦距等于_____cm.

将载物台平面调至与载物台的转轴垂直，在载物台上放置长、宽、高均为 3.00cm、折射率为 1.52 的分束棱镜 abcd （分束棱镜是由两块直角三棱镜密接而成，接触面既能透光又能反光）和待测凹球面镜，其顶点 O 到 L 的距离为 15.00cm，并保证分束棱镜的 ab 面与图三中的 XX′ 轴垂直、凹球面镜的光轴与图三中的 XX′ 轴重合；再将望远镜绕载物台的转轴转 $90°$，如图三所示. 向右移动 S，当 S 移动的距离为 3.75cm 时，通过望远镜目镜刚好能看清楚十字缝 S 的像成在分划板中心十字叉丝线上. 试求凹球面镜的曲率半径.


S
L
M
Lo
P
Le
载物台
转轴
平行光管
望远镜

图一


上十字叉丝线
A
B
十字物
分划板和亮十字物

图二

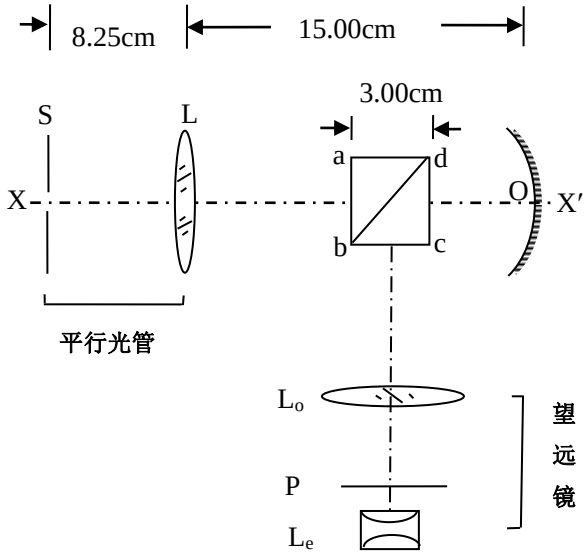

8.25cm
15.00cm
3.00cm
S
L
a
d
X
O
X′
b
c
平行光管
Lo
望远镜
P
Le

图 三

密 封 线 密 封 线

八、（15 分）

得分	阅卷	复核

在处理微观物理问题时，经常接触到诸如电子质量 m_e、质子电荷量 e 及普朗克常量 h 等基本物理常量. 在国际单位制中，这些物理常量的数值都很小，给相关的数值计算带来不便. 为了方便起见，在微观物理领域引入所谓“原子单位制”，规定电子质量为质量单位，$\hbar$（$\hbar = h/2\pi$）为角动量单位，质子电荷量的 $\sqrt{k_e}$ 倍为电荷量单位，其中常数 k_e 和国际单位制中的静电力常量取值相同. 按如上定义规定了质量、电荷量和角动量的基本单位后，在“原子单位制”中其它物理量的单位可用相关物理公式导出. 如果在“原子单位制”下，长度、时间和能量的单位用符号 $\mathrm{L_{au}}$、$\mathrm{T_{au}}$ 和 $\mathrm{E_{au}}$ 表示，试从玻尔氢原子模型推出三者分别与米、秒和焦耳的换算关系. 结果用 k_e、m_e、e 和 $\hbar$ 等常量表示.

一、

参考解答：

以 B 钉为坐标原点建坐标系 Oxy，如图 1 所示. 小球在被释放后受到本身重力和橡皮筋的弹力两个力的作用. 设小球相对于原点 O（即 B 钉）的位置由位矢 $\boldsymbol{r}$ 表示，则弹力可表示为

$$\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r} \tag{1}$$

小球的运动方程在 Oxy 坐标系下分解为

$$ma_{\mathrm{x}}=-kx \tag{2}$$

$$ma_{\mathrm{y}}=-ky-mg \tag{3}$$

定义 y 方向新坐标 $y'=y+mg/k$，（3）式可改写为

$$ma_{\mathrm{y}}=-ky' \tag{4}$$

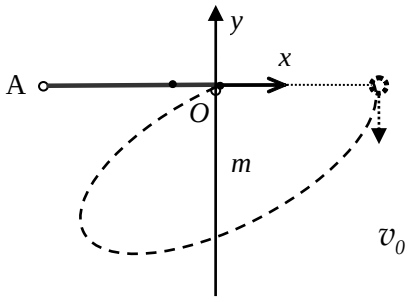


图 1

由（2）和（4）式知小球在水平和竖直方向都做简谐振动. 其振动方程可表示为

$$x(t)=A_{\mathrm{x}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{x}}) \tag{5}$$

$$\mathrm{y}'(t)=A_{\mathrm{y}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{y}}) \tag{6}$$

利用参考圆可得到小球速度的表达式

$$v_{\mathrm{x}}(t)=-A_{\mathrm{x}}\omega\sin(\omega t+\varphi_{x}) \tag{7}$$

$$v_{\mathrm{y}}(t)=-A_{\mathrm{y}}\omega\sin(\omega t+\varphi_{y}) \tag{8}$$

将如下初始条件

$$x(0)=l \tag{9}$$

$$y'(0)=\frac{mg}{k}=\frac{l}{4} \tag{10}$$

$$v_{\mathrm{x}}(0)=0 \tag{11}$$

$$v_{\mathrm{y}}(0)=-\frac{\sqrt{gl}}{2} \tag{12}$$

代入（5）至（8）式，可解得振幅 A_{x} 和 A_{y} 及位相 φ_{x} 和 φ_{y}. 再利用 $\omega=\sqrt{k/m}=2\sqrt{g/l}$，上述振动方程和速度表达式可用已知量表示为：

$$x(t)=l\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{13}$$

$$\mathrm{y}'(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{4}\right) \tag{14}$$

$$v_{\mathrm{x}}(t)=-2\sqrt{gl}\sin\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{15}$$

$$v_{\mathrm{y}}(t)=-\sqrt{\frac{gl}{2}}\sin\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{4}\right) \tag{16}$$

由（16）式可求出小球速度沿 y 方向分量第一次为零的时刻，即 $v_{\mathrm{y}}(t_0)=0$，其中

$$t_0=\frac{3\pi}{8}\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{17}$$

此后，如果小球沿 y 方向的振动没有中断，当小球沿 y 方向的振动到达最大振幅处时，（16）式右端便等于零. 然而，按（16）式右端等于零所求出的其它时刻并不是满足题意的解；因为在按（16）式右端等于零求出的稍后时刻之前，小球将和 B 钉发生碰撞，碰撞时刻为

$$t_{\mathrm{c}}=\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{18}$$

此时，按（13）和（14）两式可知

$$x(t_c)=l\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t_c\right)=l\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0 \tag{19}$$

$$y(t_c)=\frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t_c+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{mg}{k}=\frac{\sqrt{2}}{4}l\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{l}{4}=0 \tag{20}$$

这恰好是B钉的位置. 这样，小球将在$t=t_c$时和B钉发生完全非弹性碰撞，碰撞后小球速度为零；由于碰撞过程时间极短，t_c时刻就是小球速度沿y方向分量第二次为零的时刻。碰撞后小球并不和B钉粘连，所以小球将沿y方向做一维的简谐振动，由（4）式可知此振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}} \tag{21}$$

每经过半个振动周期T，都会出现速度为零的情况（此时自然有$v_y=0$）. 这样，除（17）和（18）式确定的前两个特定时刻之外，每当

$$t_n=t_c+n\frac{T}{2}=(n+\frac{3}{2})\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}},\quad n=1,2,\cdots \tag{22}$$

时，小球速度都为零，因而其沿y方向的速度分量也为零.

二、

参考解答：

1. 将固连于杆的A、B和C三端的小球分别称为A、B和C球. 由于杆的质量可忽略，则三小球所受桌面支持力的大小都等于其重力. 这一结论可通过如下方法证明：以B球为例，将B球连同一小段杆隔离出来作为研究对象，分析其在竖直方向的受力情况，它受小球重力和桌面支持力，这两个力的作用线过小球和桌面接触点并垂直于桌面，如果这两个力大小不相等，则在该研究对象的杆截面处必存在非零的竖直方向力，才能满足在竖直方向力的平衡方程. 然而，如果存在这样的力，则相对于小球球心，该研究对象的力矩不为零，这违反研究对象的力矩平衡条件，因此，桌面支持力必等于小球重力. 根据如上分析，三小球所受最大静摩擦力的大小都为

$$f_{\max} = \mu mg \tag{1}$$

体系由静止向运动转变的临界状态可能存在两种不同的情况，第一种情况是两个小球所受摩擦力的大小已达到 $f_{\max}$，而第三个小球尚未达到 $f_{\max}$. 这种临界状态对应着体系将绕第三个小球转动. 第二种情况为三小球所受摩擦力的大小都已达到 $f_{\max}$，这种临界状态意味着体系将发生平移或绕三小球以外的某点转动，也可以是平动和转动的合成运动，总之，这是一种对应着三小球都将开始运动的临界状态.

可以论证所谓的第一种临界状态是不合理的. 换言之，这种临界状态是不可能发生的. 为证明这种观点，可设B和C球所受摩擦力已达到 $f_{\max}$，而A球摩擦力尚未达到该值，在此基础上如果再稍增加推力，一种可能是B和C球仍保持静止，但是A球的摩擦力值随之增加直到 $f_{\max}$，但这就转变成第二种临界状态了. 另一种情况是A球摩擦力虽未达到 $f_{\max}$，但也不再增加，而B和C球已开始运动，此时A球必为体系的转动中心，B和C球处于绕之转动的临界状态. 由于在该临界状态系统仍静止，所以在水平桌面内其所受外力的矢量和为零，用矢量形式表示为

$$\mathbf{f}_{\mathrm{A}} + \mathbf{f}_{\mathrm{B}} + \mathbf{f}_{\mathrm{C}} = 0$$

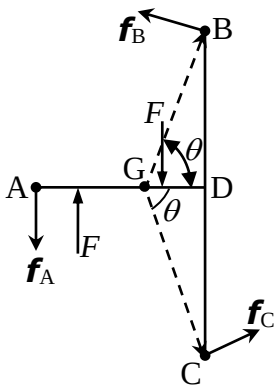
上式左边的三个力分别为A、B和C球所受的静摩擦力. B和C球的摩擦力大小为 $f_{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{C}} = f_{\max}$，其方向垂直于两小球到A球的连线. 将（1）式正交分解，可求得A球所受的摩擦力大小为

$$f_{\mathrm{A}} = \sqrt{2} f_{\max} > f_{\max} \tag{2}$$

该值已超过最大静摩擦力 $f_{\max}$，这意味着A球不可能处于静止状态，所以这种临界状态不可能出现. 同理可知，体系分别绕B或C球开始转动的临界状态也不可能出现，因为这样的状态对应的B或C球的摩擦力为

$$f_{\mathrm{B/C}} = \sqrt{2+\sqrt{2}} f_{\max} > f_{\max} \tag{3}$$

可见该值也超过了最大静摩擦力. 终上所述，在体系由静到动的临界状态三小球所受摩擦力都达到最大摩擦力 $f_{\max}$.



2. 用G表示转轴在AD杆上的位置，用F表示推力的大小，在体系绕转轴刚好开始转动的临界状态，桌面对A、B和C三球的最大静摩擦力（大小均为μmg）的方向分别和连线GA, GB和GC垂直，如图所示. 并且它们对G点的总力矩刚好和外力矩相平衡. 设G点与D点的距离为xa，则力矩平衡方程为

$$\mu mg(2\sqrt{x^2a^2+a^2}+a-xa)=\frac{Fa}{2} \tag{4}$$

此式可进一步整理为

$$3x^2-2\left(\frac{F}{2\mu mg}-1\right)x+4-\left(\frac{F}{2\mu mg}-1\right)^2=0 \tag{5}$$

这个方程有实根的条件是

$$\left(\frac{F}{2\mu mg}-1\right)^2\geq 12-3\left(\frac{F}{2\mu mg}-1\right)^2 \tag{6}$$

上式简化为

$$F\geq 2(\sqrt{3}+1)\mu mg \tag{7}$$

这意味着只有F满足如上条件时，才能在AD杆上找到一个转轴位置而使体系运动起来. 换言之,

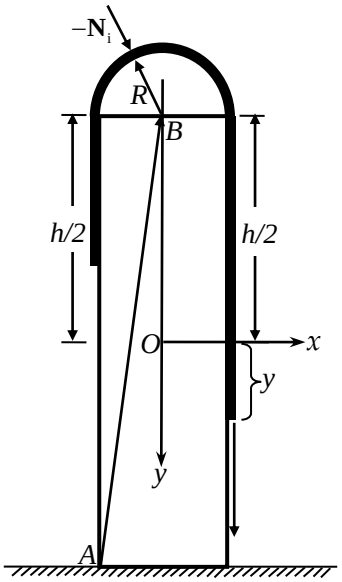
$$F=2(\sqrt{3}+1)\mu mg \tag{8}$$

是推动该体系转动的最小推力，将上式代入（5）式，可求出

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3} \tag{9}$$

三、

参考解答：



1. 以柱体中轴线与开始时刻链条端点所在水平线的相交点为原点，建立坐标系 Oxy，如图所示. 链条可视为质点组. 设在链条运动的某时刻，其右侧端点相对其开始时位置已下降了一定的距离 y，而链条左侧端点则相应上升了同样的距离.首先分析此时链条的受力情况. 除受自身重力外，链条还受到柱体半圆形表面的支持力. 在柱体上部半圆形表面上的任意点，该支持力必沿半径向外方向，用 $\boldsymbol{N}_i$ 表示。链条受到的支持力是方向随其作用点而变化的力系，简称支持力系.

链条质心的运动由它所受到的重力和支持力系决定. 为建立链条质心运动方程，先分析链条质心位置 (x_c, y_c) 随其右侧端点 y 坐标的变化规律. 由如图所示的几何关系，可求得链条质心的坐标为

$$x_c = \frac{2R}{L} y + x_{c0} \tag{1}$$

$$y_c = \frac{y^2}{L} + y_{c0} \tag{2}$$

其中 (x_{c0}, y_{c0}) 是链条质心在开始时刻的位置，$L(=h+\pi R)$ 表示链条的总长度. 利用速度的定义，可从（1）和（2）式求得质心的速度为

$$v_{cx} = \frac{2R}{L} v \tag{3}$$

$$v_{cy} = \frac{(y+\Delta y)^2 - y^2}{L\Delta t} \approx \frac{2y\Delta y}{L\Delta t} = \frac{2y}{L} v \tag{4}$$

其中 v 代表链条右端点速度（以向下为正向），其大小可由链条运动的机械能守恒关系求得.

在链条下滑过程中只有重力做功，所以机械能守恒

$$(\frac{m}{L} y) g y = \frac{1}{2} m v^2 \tag{5}$$

由此可知

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L}} y \tag{6}$$

式中已同时考虑了 v 的方向.

由加速度的定义，从（6）式可求出链条右侧端点的加速度

$$a = \frac{2g}{L} y \tag{7}$$

【（7）式也可从链条满足的运动方程 $\rho|2y|(-g) = (L\rho)a$ 求出，其中 $\rho = m/L$. 】

类似地，由加速度的定义，从（3）和（4）式出发，并利用（6）和（7）式，可求得链条质心运动的加速度

$$a_{cx} = \frac{4Rg}{L^2} y \tag{8}$$

$$a_{cy} = \frac{8g}{L^2} y^2 \tag{9}$$

根据牛顿第二定律写出链条质心运动方程，可得到如下关系

$$\sum_i N_{ix} = m a_{cx} \tag{10}$$

$$mg + \sum_i N_{iy} = m a_{cy} \tag{11}$$

式中，$\sum_i N_{\mathrm{ix}}$ 和 $\sum_i N_{\mathrm{iy}}$ 分别为链条所受柱体的支持力系沿 x 和 y 方向的矢量和.

根据牛顿第三定律，柱体受到链条的压力力系沿 x 和 y 方向的矢量和分别为

$$F_{\mathrm{x}} = -\sum_i N_{\mathrm{ix}} \tag{12}$$

和

$$F_{\mathrm{y}} = -\sum_i N_{\mathrm{iy}} \tag{13}$$

柱体受到自身重力、地面支持力 N_0、地面摩擦力 f 和链条的压力力系的作用，如果柱体尚未滑动和倾倒，则由力的平衡条件知

$$f + F_x = 0 \tag{14}$$

$$N_0 + F_y + mg = 0 \tag{15}$$

柱体发生滑动的临界条件为

$$|f| = \mu |N_0| \tag{16}$$

将（8）至（15）式代入上式，可求得柱体在地面上刚好发生滑动时坐标 y 所满足的方程为

$$4y^2 + \frac{2R}{\mu} y - L^2 = 0 \tag{17}$$

其解应在 $(0, h/2]$ 区间内，即

$$0 < y_{\text{滑}} = \frac{R}{\mu} \frac{\sqrt{4\mu^2 \left(\frac{h}{R} + \pi \right)^2 + 1} - 1}{4} \le \frac{h}{2} \tag{18}$$

由此可知

$$\mu \le \frac{h}{\pi(2h + \pi R)} \tag{19}$$

这是在链条下滑过程中，在链条右端接触地面之前，柱体能在地面上滑动的条件.

2. 另一方面，由（8）、（10）和（12）式可知，链条在下滑过程中作用于柱体的水平方向的压力 F_{x} 方向向左，所以柱体可能向左倾倒. 倾倒的临界条件为地面支持力的作用点移至柱体左下角的 A 点，同时其它力相对于该点的力矩之和刚好为零. 链条对柱体的压力力系对 A 点的力矩的值（沿顺时针方向为正）可写为

$$\tau_{\mathrm{N}} = \sum_i [(Q_{\mathrm{x}} + R_{\mathrm{ix}})(-N_{\mathrm{iy}}) - (Q_{\mathrm{y}} + R_{\mathrm{iy}})(-N_{\mathrm{ix}})] \tag{20}$$

上式中 $Q_{\mathrm{x}} = R$ 和 $Q_{\mathrm{y}} = -h$ 分别代表由 A 指向半圆圆心 B 的位矢的 x 和 y 分量，R_{ix} 和 R_{iy} 分别代表由 B 指向半圆上点 i 的半径矢量 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{i}}$ 的 x 和 y 分量. 由于柱体在其半圆形表面上点 i 受到的压力 $-\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}$ 沿半径方向，所以有

$$\frac{R_{\mathrm{ix}}}{R_{\mathrm{iy}}} = \frac{(-N_{\mathrm{ix}})}{(-N_{\mathrm{iy}})} \tag{21}$$

因此（20）式可化简为

$$\tau_N = RF_y + hF_x \tag{22}$$

在柱体刚好能倾倒的临界状态下，相对于柱体 A 点的力矩平衡条件为

$$\tau_N + mgR = 0 \tag{23}$$

由（8）至（11）式可算得力矩 τ_N，再利用（9）、（11）、（13）和（15）式，上式成为

$$\left(1 - \frac{8y^2}{L^2}\right) mgR - \frac{4mgRy}{L^2} h + mgR = 0 \tag{24}$$

此即

$$4y^2 + 2hy - L^2 = 0 \tag{25}$$

这是柱体刚好能倾倒时坐标 y 所满足的方程，其解应在 $(0, h/2]$ 区间内，即

$$0 < y_{倾} = h\frac{\sqrt{4\left(\pi\frac{R}{h}+1\right)^2+1}-1}{4} \le \frac{h}{2} \tag{26}$$

由此可知

$$R \le \frac{\sqrt{2}-1}{\pi}h \tag{27}$$

这是在链条下滑过程中，在链条右端接触地面之前，柱体能向一侧倾倒的条件.

3. 为使柱体滑动先于倾倒发生，应有

$$y_{滑} < y_{倾} \tag{28}$$

将（18）和（25）式中 $y_{滑}$ 和 $y_{倾}$ 的表达式代入上式得

$$\frac{R}{\mu}-h > \sqrt{\left(\frac{R}{\mu}\right)^2+4L^2}-\sqrt{h^2+4L^2} \tag{29}$$

两边同乘以 $\sqrt{(R/\mu)^2+4L^2}+\sqrt{h^2+4L^2}$ 得

$$\left(\sqrt{\left(\frac{R}{\mu}\right)^2+4L^2}+\sqrt{h^2+4L^2}\right)\left(\frac{R}{\mu}-h\right) > \left(\frac{R}{\mu}+h\right)\left(\frac{R}{\mu}-h\right)$$

显然

$$\left(\sqrt{\left(\frac{R}{\mu}\right)^2+4L^2}+\sqrt{h^2+4L^2}\right) > \left(\frac{R}{\mu}+h\right)$$

此结果可进一步化简为

$$\mu < \frac{R}{h} \tag{30}$$

这就是在链条开始下滑直至其右端接触地面之前的过程中，柱体若既能在地面上滑动，也能向一侧倾倒，使柱体滑动先于倾倒的条件.

四、

参考解答：

解法一：

按照“两球不发生碰撞且都不会从桌面掉落的前提下尽量减小圆桌面面积”这个要求，可以推断出两球的质心应该保持不动. 在初始时刻，质心在两球球心的连线上，与 A 球球心和 B 球球心的距离分别是

$$\frac{4m}{m+4m}4a=16a/5 \tag{1}$$

$$\frac{m}{m+4m}4a=4a/5 \tag{2}$$

在此后的任何时刻，如果两个球心之间的距离为l，那么 A 球球心到质心的距离是$4l/5$，B 球球心到质心的距离是$l/5$.

按题意，两球之间的相互作用力是库仑吸引力，即

$$f=k_{\mathrm{e}}\frac{-4Q^2}{r_{\mathrm{AB}}^2}$$

在质心系中，若用$\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{AC}}$和$\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{BC}}$分别表示质心到 A 球心和 B 球心方向的单位矢量，A 球和 B 球的运动方程分别为

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}=k_{\mathrm{e}}\frac{-4Q^2}{(\frac{5}{4}r_{\mathrm{AC}})^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{AC}} \tag{3}$$

$$4m\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}}=k_{\mathrm{e}}\frac{-4Q^2}{(5r_{\mathrm{BC}})^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{BC}} \tag{4}$$

(3)和(4)式表明 A 球和 B 球都在质心系中做椭圆运动.

为了使两球的运动轨道覆盖尽量小的面积，球心距的初始值$4a$应该是它的最大值；最小距离只能是两球的半径之和$2a$. 所以，初始时，A 球和 B 球分别处在其椭圆轨道的远日点，距质心的距离分别为$16a/5$和$4a/5$；A 球和 B 球处在其椭圆轨道的近日点时，距质心的距离分别为$8a/5$和$2a/5$.

A 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_{\mathrm{a}}=\frac{1}{2}(\frac{16}{5}a+\frac{8}{5}a)=\frac{12}{5}a \tag{5}$$

$$r_{\mathrm{b}}=\sqrt{\frac{16}{5}a\times\frac{8}{5}a}=\frac{8\sqrt{2}}{5}a \tag{6}$$

B 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_{\mathrm{a}}'=\frac{1}{2}(\frac{2}{5}a+\frac{4}{5}a)=\frac{3}{5}a \tag{7}$$

$$r_{\mathrm{b}}'=\sqrt{\frac{2}{5}a\times\frac{4}{5}a}=\frac{2\sqrt{2}}{5}a \tag{8}$$

所以 A 球的椭圆轨道大于 B 球的椭圆轨道.

由于两球的质心不动，在任何时刻 A 球速度与 B 球速度应满足

$$v_{\mathrm{A}}=4v_{\mathrm{B}}$$

但方向相反. 在初始时刻两球相距最远，所以它们的初始速度的方向一定要和两球球心的连线垂直. 在质心系中，设 B 球的初始速度为v_{B0}，那么 A 球的初始速度就是

$$v_{\mathrm{A0}}=4v_{\mathrm{B0}}$$

当两球相距$2a$时，B 球和 A 球的速度分别为v_{B1}和$v_{\mathrm{A1}}=4v_{\mathrm{B1}}$，它们的方向也和那时两球球

心的连线相垂直. 按角动量守恒，在这两个时刻两球相对于质心的总角动量必相等，所以

$$m(4v_{\mathrm{B}0})\frac{16a}{5}+4mv_{\mathrm{B}0}\frac{4a}{5}=m(4v_{\mathrm{B}1})\frac{8a}{5}+4mv_{\mathrm{B}1}\frac{2a}{5}, \tag{9}$$

由此解得

$$v_{B1}=2v_{B0}. \tag{10}$$

按能量守恒，在这两个时刻两球总能量（动能加势能）必相等，所以

$$\frac{1}{2}m(4v_{B0})^2+\frac{1}{2}(4m)v_{B0}^2-\frac{k_{\mathrm{e}}4Q^2}{4a}=\frac{1}{2}m(4v_{B1})^2+\frac{1}{2}(4m)v_{B1}^2-\frac{k_{\mathrm{e}}4Q^2}{2a}, \tag{11}$$

将(10)式代入(11)式中即可解出

$$v_{\mathrm{B}0}=\sqrt{\frac{k_{\mathrm{e}}Q^2}{30ma}},\qquad v_{\mathrm{A}0}=4\sqrt{\frac{k_{\mathrm{e}}Q^2}{30ma}}. \tag{12}$$

由前分析知，最小的圆桌面范围由 A 球的运动划定，在质心系中，它的运动轨道是以质心为力心、长半轴为$12a/5$、短半轴为$8\sqrt{2}a/5$的椭圆，所以两球都不会从桌面掉落的圆桌面的最小半径$R_{\min}$为

$$R_{\min}=\frac{12}{5}a. \tag{13}$$

解法二：

按题意，两球之间的相互作用力是库仑吸引力，即

$$f=k_{\mathrm{e}}\frac{-4Q^2}{r_{\mathrm{AB}}^2}$$

用$\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{AB}}$表示 B 球心到 A 球心方向的单位矢量，A 球和 B 球的运动方程是

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}=k_{\mathrm{e}}\frac{-4Q^2}{r_{\mathrm{AB}}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{AB}}, \tag{1}$$

$$4m\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}}=k_{\mathrm{e}}\frac{4Q^2}{r_{\mathrm{AB}}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{AB}}, \tag{2}$$

所以

$$\frac{4m}{5}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}-\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}})=k_{\mathrm{e}}\frac{-4Q^2}{r_{\mathrm{AB}}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{AB}}. \tag{3}$$

这表明，两球的相对运动类似于天体在万有引力作用下的运动，它们不发生碰撞、且不无限远离的一般情形是相对做椭圆运动. 若以 A 球心为原点建立平动参考系，则 B 球作椭圆运动.

按照“两球不发生碰撞且都不会从桌面掉落的前提下尽量减小圆桌面面积”这个要求，可以推断出两球的质心应该保持不动. 为了使两球的运动轨道覆盖尽量小的面积，两球球心距离的初始值$4a$应该是它的最大值，最小距离只能是两球的半径之和$2a$. 在初始时刻两球相距最远，所以它们的初始速度的方向一定要和两球球心的连线相垂直.

设初始时刻 A 和 B 球相对桌面的速度分别为$v_{\mathrm{A}0}$和$v_{\mathrm{B}0}$，则 B 球相对于 A 球的初速度为$v=v_{\mathrm{B}0}-v_{\mathrm{A}0}$，初始时刻体系的能量为

$$E=\frac{1}{2}\frac{4mv^2}{5}-\frac{4k_{\mathrm{e}}Q^2}{4a} \tag{4}$$

由天体运动知识可知 B 球距离 A 球的最近和最远距离之和满足

$$r_{\min}+r_{\max}=-\frac{4k_{\mathrm{e}}Q^2}{E} \tag{5}$$

又因为初始时刻两球球心距离的初始值$4a$为两球最远距离情况，即$r_{\max}=4a$. 利用(5)式得

$$\frac{1}{2}\frac{4mv^2}{5}=4k_eQ^2[\frac{1}{4a}-\frac{1}{4a+r_{min}}] \tag{6}$$

当$r_{min}=2a$时两球刚好相切，对应着两球发生碰撞的临界情况. 可求得 B 球相对于 A 球的初速度为

$$v=\sqrt{\frac{5k_eQ^2}{6ma}} \tag{7}$$

由于两球的质心必须相对于桌面静止，所以有

$$4v_{B0}-v_{A0}=0 \tag{8}$$

再利用关系$v=v_{B0}-v_{A0}$可求得两球相对于桌面的速度大小为

$$v_{A0}=4v_{B0}=4\sqrt{\frac{k_eQ^2}{30ma}} \tag{9}$$

两速度都垂直于初始时刻的球心距，且两者方向相反.

初始时刻，质心在两球球心的连线上，与 A 球心和 B 球心的距离分别是

$$\frac{4m}{m+4m}4a=\frac{16}{5}a \tag{10}$$

$$\frac{m}{m+4m}4a=\frac{4}{5}a \tag{11}$$

如果两个球心之间的距离为l，那么 A 球球心到质心的距离是$4l/5$，B 球球心到质心的距离是$l/5$. 结合(1)和(2)式可知在质心系，A 球和 B 球绕质心的运动轨迹也是椭圆，初始时，A 球和 B 球分别处在其椭圆轨道的远日点，距质心的距离分别为$16a/5$和$4a/5$；A 球和 B 球处在其椭圆轨道的近日点时，距质心的距离分别为$8a/5$和$2a/5$.

A 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_a=\frac{1}{2}(\frac{16}{5}a+\frac{8}{5}a)=\frac{12}{5}a \tag{12}$$

$$r_b=\sqrt{\frac{16}{5}a\times\frac{8}{5}a}=\frac{8\sqrt{2}}{5}a \tag{13}$$

B 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_a'=\frac{1}{2}(\frac{2}{5}a+\frac{4}{5}a)=\frac{3}{5}a \tag{14}$$

$$r_b'=\sqrt{2a\times\frac{4}{5}a}=\frac{2\sqrt{2}}{5}a \tag{15}$$

所以 B 球的椭圆轨道在桌面上包含在 A 球绕质心的椭圆轨道之内. 最小的圆桌面范围由 A 球的运动划定. A 球的运动轨道是以质心为力心、长半轴为$12a/5$、短半轴为$8\sqrt{2}a/5$的椭圆，所以圆桌面的最小半径为R_{min}为

$$R_{min}=\frac{12}{5}a. \tag{16}$$

五、

参考解答:

在切断圆线圈中的电流时，变化的磁场将产生涡旋电场.由对称性可知，在圆盘边缘处涡旋电场场强的大小处处相等. 涡旋电场对单位正电荷的作用力在单位正电荷沿圆盘边缘运动一周过程中所作的功，就是与圆盘边缘重合的闭合回路中的感应电动势. 若以 ε 表示感应电动势， E_{C} 表示圆盘边缘处涡旋电场场强的大小，则有

$$\varepsilon = 2\pi R E_{\mathrm{C}} \tag{1}$$

根据法拉第电磁感应定律，感应电动势的大小为

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\right| \tag{2}$$

式中 $\Delta\Phi$ 是在切断圆线圈电流过程中通过圆盘平面磁通量的改变量， Δt 为经历的时间. 由磁感应线的闭合性知道，圆线圈磁场对圆盘的磁通量的大小等于通过圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量，但符号相反. 为了求出圆线圈磁场对圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量，先考察该磁场对半径为 r_{i} 与 $r_{\mathrm{i+1}}$ 之间的圆环的磁通量 ϕ_{i} ，此磁通量可用 r_{i} 处的磁感应强度 $B = k_{\mathrm{m}} \dfrac{2\pi a^2 I}{r_{\mathrm{i}}^3}$ 与圆环面积 $2\pi r_{\mathrm{i}}\left(r_{\mathrm{i+1}} - r_{\mathrm{i}}\right)$ 的乘积来表示，即

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{i}} &= k_{\mathrm{m}} \frac{2\pi a^2 I}{r_{\mathrm{i}}^3} 2\pi r_{\mathrm{i}}\left(r_{\mathrm{i+1}} - r_{\mathrm{i}}\right) \\
&= 4\pi^2 k_{\mathrm{m}} a^2 I \left(\frac{1}{r_{\mathrm{i}}^2}\right)\left(r_{\mathrm{i+1}} - r_{\mathrm{i}}\right) \\
&\approx 4\pi^2 k_{\mathrm{m}} a^2 I \frac{r_{\mathrm{i+1}} - r_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{i+1}} r_{\mathrm{i}}} \\
&= -4\pi^2 a^2 k_m I \left(\frac{1}{r_{\mathrm{i+1}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{i}}}\right)
\end{aligned}$$

圆线圈磁场对圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量

$$\Phi = \sum \phi_{\mathrm{i}} = \sum -4\pi^2 a^2 k_{\mathrm{m}} I \left(\frac{1}{r_{\mathrm{i+1}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{i}}}\right)$$

注意到 $r_1 = R$ ， $r_\infty = \infty$ 有

$$\Phi = \frac{4\pi^2 a^2 k_{\mathrm{m}} I}{R} \tag{3}$$

由于电流切断后，磁场消失，故通过圆盘的磁通量的变化量的大小

$$\left|\Delta \Phi\right| = \frac{4\pi^2 a^2 k_{\mathrm{m}} I}{R} \tag{4}$$

由 (1)、(2)、(4)各式得

$$E_{\mathrm{C}} = \frac{2\pi a^2 k_{\mathrm{m}} I}{R^2 \Delta t} \tag{5}$$

由楞次定律可知涡旋电场沿顺时针方向.

涡旋电场作用于第 i 个金属小球的力矩为

$$L_{\mathrm{i}} = q E_{\mathrm{c}} R = \frac{2 k_{\mathrm{m}} \pi a^2 q}{R} \frac{I}{\Delta t} \tag{6}$$

方向垂直于圆盘面竖直向下. 涡旋电场作用于 4 个金属小球的合力矩

$$L=\sum L_{\mathrm{i}}=\frac{8k_{\mathrm{m}}\pi a^2q}{R}\frac{I}{\Delta t}$$

在圆线圈电流消失过程中，Δt 时间内涡旋电场作用于 4 个金属小球的合力矩的冲量为

$$L\Delta t=\frac{8k_{\mathrm{m}}\pi a^2q}{R}I \tag{7}$$

根据角动量定理，小球将获得角动量. 若金属小球绕固定转轴转动的角速度为 ω，有

$$\frac{8k_{\mathrm{m}}\pi a^2q}{R}I=4mR^2\omega \tag{8}$$

由(8)式得

$$\omega=\frac{2k_{\mathrm{m}}\pi a^2q}{mR^3}I \tag{9}$$

由于金属小球固定在圆盘上，故圆盘转动的角速度亦为ω，且沿顺时针方向转动.

金属小球转动时，受到磁感应强度为 B_0 的磁场作用力的大小为

$$f_{\mathrm{B}}=qB_0R\omega=\frac{2k_{\mathrm{m}}\pi a^2q^2B_0}{mR^2}I \tag{10}$$

力的方向沿圆盘半径指向圆心.

4 个带电金属小球间存在静电相互作用力，任一小球受到其他 3 个金属小球的静电力的合力为

$$f_{\mathrm{e}}=q(k_{\mathrm{e}}\frac{q}{4R^2}+k_{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{2}q}{2R^2})=k_{\mathrm{e}}\frac{q^2(1+2\sqrt{2})}{4R^2} \tag{11}$$

此力方向沿圆盘半径由圆心向外.

以 f 表示圆盘在水平方向对金属小球的作用力的大小，由牛顿第二定律有

$$f+f_{\mathrm{B}}-f_{\mathrm{e}}=m\omega^2R \tag{12}$$

由(9)、(10)、(11)、(12)各式得

$$f=\frac{4k_{\mathrm{m}}^2\pi^2a^4q^2}{mR^5}I^2+k_{\mathrm{e}}\frac{q^2(1+2\sqrt{2})}{4R^2}-\frac{2k_{\mathrm{m}}\pi a^2q^2B_0}{mR^2}I \tag{13}$$

六、

参考答案：

1. 设初始时两室气体的体积均为V_0，B 室中气体的摩尔数为n_0，压强为P_0. 初始时 A 室气体压强是$4P_0$，因而 A 室气体的摩尔数为$4n_0$. 把 A、B 室中的气体作为整体，虽然活塞与气缸壁间存在摩擦，但是摩擦力做功转换成热完全被 B 室中的气体吸收，因而整个气体与气缸外界无能量交换. 因此 A 室中气体经历了绝热过程；B 室中的气体经历的过程并不是绝热过程. 活塞释放之后 A 室中气体的温度降低，根据题知其中的气体分子不会发生分解. B 室中的气体吸热，温度可升高，可能超过κT_0，有可能发生分子分解.设 A 室中气体的终态温度为T_{A}，B 室中气体的终态温度T_{B}. 并且假定活塞运动过程中有部分气体分子分解，B 室终态气体有αn_0摩尔分子分解. 按热力学第一定律

$$4n_0C\left(T_{\mathrm{A}}-T_0\right)+[(1-\alpha)n_0]C\left(T_{\mathrm{B}}-T_0\right)+2\alpha n_0CT_{\mathrm{B}}-\alpha n_0CT_0+\alpha n_0\phi=0 \qquad (1)$$

代入$\phi=CT_0/10$，上式化为

$$4T_{\mathrm{A}}+(1+\alpha)T_{\mathrm{B}}=\left(5-\frac{\alpha}{10}\right)T_0. \qquad (2)$$

终态时两室气体的压强必相等，设为P，并设终态时 A 和 B 室的体积分别为V_A和V_A，那么状态方程是

$$\frac{P_0V_0}{T_0}=n_0R\,,\qquad \frac{PV_{\mathrm{A}}}{T_A}=4n_0R\,,\qquad \frac{PV_{\mathrm{B}}}{T_B}=(1+\alpha)n_0R\,, \qquad (3)$$

将它们代入（2）式得

$$4\frac{PV_{\mathrm{A}}}{4n_0R}+(1+\alpha)\frac{PV_{\mathrm{B}}}{(1+\alpha)n_0R}=\left(5-\frac{\alpha}{10}\right)\frac{P_0V_0}{n_0R}, \qquad (4)$$

此即

$$P(V_{\mathrm{A}}+V_{\mathrm{B}})=\left(5-\frac{\alpha}{10}\right)P_0V_0, \qquad (5)$$

由于气缸是刚性的，有

$$V_{\mathrm{A}}+V_{\mathrm{B}}=2V_0,$$

所以

$$P=\frac{1}{2}\left(5-\frac{\alpha}{10}\right)P_0. \qquad (6)$$

下面求 B 室末态的温度T_{B}. 对 A 室气体有

$$4P_0V_0^{\gamma}=PV_A^{\gamma}, \qquad (7)$$

对 B 室气体有

$$P(2V_0-V_A)=(1+\alpha)n_0RT_B, \qquad (8)$$

将（7）式代入（8）式，并利用（6）式以及相关的状态方程，得

$$T_B=\frac{5-(\alpha/10)}{2(1+\alpha)}\left[2-\left(\frac{8}{5-(\alpha/10)}\right)^{3/4}\right]T_0. \qquad (9)$$

当$\alpha=0$时，

$$T_B = \frac{5}{2}\left[2 - \left(\frac{8}{5}\right)^{3/4}\right] T_0 = 1.44 T_0, \tag{10}$$

因此

$$T_d \geq 1.45 T_0. \tag{11}$$

2. 当$\alpha = 10.0\%$时，

$$T_B = \frac{5 - 0.01}{2.2}\left[2 - \left(\frac{8}{5 - 0.01}\right)^{3/4}\right] T_0 = 1.30 T_0, \tag{12}$$

而$\alpha = \beta(T_B - T_d)$，因此

$$T_d = T_B - \frac{\alpha}{\beta} = \left(1.30 - \frac{0.100}{2.00}\right) T_0 = 1.25 T_0. \tag{13}$$

七、

参考解答：

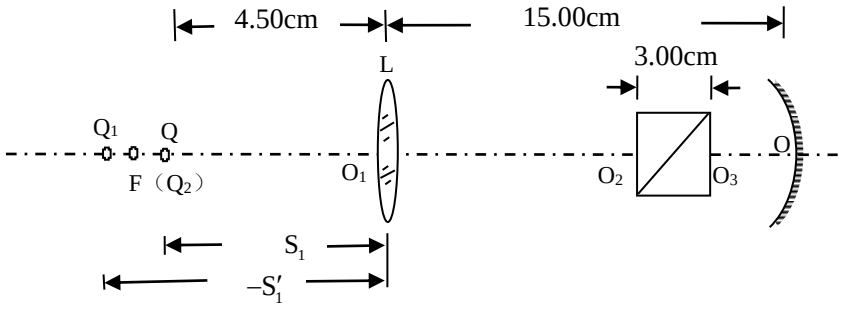
填空部分：

0.0375， 8.25

计算部分：

求凹球面镜的曲率半径 R.

如图一所示，十字缝S向右移动到Q处，经透镜L成像于Q_1处，再经分束棱镜abcd（相当于平板玻璃）两次折射一定成像于凹球面镜的焦点F处，此时经过凹球面镜反射的光才是平行光，此平行光再经分束棱镜反射进入望远镜，通过望远镜目镜看清楚十字缝的像成在分划板中心十字叉丝线上.



图一

i)求Q点经透镜L所成像Q_1点的位置.

由透镜物像距公式有

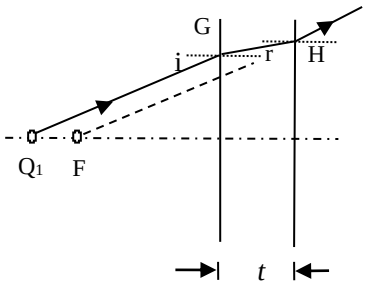
$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_1'}=\frac{1}{f_L} \qquad (1)$$

其中焦距 $f_L=8.25\text{cm}$，物距 $S_1=(8.25-3.75)\text{cm}=4.50\text{cm}$，代入上式解得像距

$$S_1'=-9.90\text{cm} \qquad (2)$$

ii) Q_1处的像再经分束棱镜即相当于厚度为 t、折射率为 n 的平板玻璃两次折射成像，其像点Q_2的位置一定在凹球面镜的焦点F处，求物点与像点之间的距离 $\overline{Q_1F}$.

如图二所示，从 Q_1 点发出的光线Q_1G两次折射从H点射出，其出射光线的反向延长线HF与光轴的交点为像点Q_2的位置，即凹球面镜的焦点F处.因为出射光线HF与入射光线Q_1F平行，由几何关系有



图二

$$\tan i=\frac{t\tan r}{t-\overline{Q_1F}}$$

式中 i 和 r 是入射角和折射角. i 很小，故有

$$\tan i\approx\sin i,\qquad \tan r\approx\sin r$$

于是有

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{t}{t-\overline{Q_1F}}$$

即

$$\overline{Q_1F}=\frac{n-1}{n}t \qquad (3)$$

将 $n=1.52$ 和 $t=3.00\text{cm}$ 代入(3)式得

$$\overline{Q_1F}=1.03\text{cm} \qquad (4)$$

iii)凹球面镜的焦距为

$$f = \overline{FO} = -S' - \overline{Q_1F} + \overline{O_1O} = 23.87\text{cm} \quad (5)$$

iv）凹球面镜的曲率半径为

$$R = 2f = 47.74\text{cm} \quad (6)$$

八、

参考解答:

电子绕原子核做匀速圆周运动，设在某一允许的圆周轨道上，电子的能量为

$$E=\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^{2}-k_{\mathrm{e}}\frac{e^{2}}{r} \tag{1}$$

(1)式右端两项分别表示电子在该轨道上的动能和势能，r 为轨道半径. 原子核对该电子的库仑吸引力充当其圆周运动的向心力，因而有

$$m_{\mathrm{e}}\frac{v^{2}}{r}=k_{\mathrm{e}}\frac{e^{2}}{r^{2}} \tag{2}$$

氢原子圆周轨道的量子化条件为

$$m_{\mathrm{e}}vr=n\hbar \tag{3}$$

其中 n 取正整数.

联立(1)、(2) 和(3)式可得

$$E_{\mathrm{n}}=-\frac{m_{\mathrm{e}}k_{\mathrm{e}}^{2}e^{4}}{2n^{2}\hbar^{2}} \tag{4}$$

其中对电子能量引入了下标 n 用以表征不同轨道的电子能级. (4)式是在国际单位制中电子能级的表达式. 氢原子的基态对应于 $n=1$. 而在原子单位制中，(4)式右端可取 $m_{\mathrm{e}}=\sqrt{k_{\mathrm{e}}}e=\hbar=n=1$. 所以有

$$1\mathrm{E}_{\mathrm{au}}=\left(\frac{m_{\mathrm{e}}k_{\mathrm{e}}^{2}e^{4}}{\hbar^{2}}\right)\mathrm{J} \tag{5}$$

由(1)和(2)可得

$$E_{1}=-k_{\mathrm{e}}\frac{e^{2}}{2r_{1}} \tag{6}$$

将(6)式和(4)式联立并运用于 $n=1$ 情况，可得氢原子基态的轨道半径为

$$r_{1}=\frac{\hbar^{2}}{m_{\mathrm{e}}k_{\mathrm{e}}e^{2}} \tag{7}$$

由上式知，在原子单位制中有

$$1\mathrm{L}_{\mathrm{au}}=r_{1}=\left(\frac{\hbar^{2}}{m_{\mathrm{e}}k_{\mathrm{e}}e^{2}}\right)\mathrm{m} \tag{8}$$

电子在基态轨道上的运动周期为

$$T=\frac{2\pi r_{1}}{v_{1}} \tag{9}$$

其中电子在基态轨道上的运动速度为

$$v_{1}=\frac{\hbar}{m_{\mathrm{e}}r_{1}} \tag{10}$$

由(9)和(10)式可得时间的原子单位为

$$1\mathrm{T}_{\mathrm{au}} = \left(\frac{\hbar^3}{m_\mathrm{e} k_\mathrm{e}^2 e^4} \right) \mathrm{s} \tag{11}$$