第 28 届全国中学物理竞赛决赛考试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷									
复核									

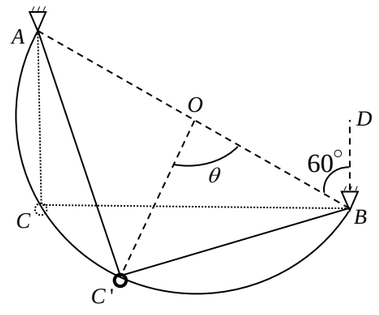
考生须知

1．考生考试前请认真阅读本须知。
2．本试卷共 8 页，8 道大题，总分为 140 分。试卷的每一页下面标出了该页的页码和总页数，请认真核对每一页的页码和总页数是否正确，每一页中是否有印刷不清楚的地方，发现问题请及时与监考老师联系。
3．试卷的密封线内、不能写解答，密封线内所写的解答一律无效。
4．考生可以用发的草稿纸打草稿，但需要阅卷老师评阅的内容一定要写到试卷上，阅卷老师只评阅试卷上的内容，写在草稿纸上的解答一律无效。
5．解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写出最后结果的不能得分。有数值计算的,答案中必须明确写出数值和单位。

得分	
阅卷	
复核	

一.（15 分）在竖直面内将一半圆形光滑导轨固定在 A、B 两点，导轨直径 $AB=2R$，AB 与竖直方向间的夹角为 $60°$，在导轨上套一质量为 m 的光滑小圆环．一劲度系数为 k 的轻而细的光滑弹性绳穿过圆环，其两端系于 A、B 两点，如图所示．当圆环位于 A 点正下方 C 点时，弹性绳刚好为原长．现将圆环从 C 点无初速度释放，圆环在时刻 t 运动到 C' 点，$C'O$ 与半径 OB 的夹角为 θ．重力加速度为 g．试分别对下述两种情形，求导轨对圆环的作用力的大小：

1．$\theta=90°$．
2．$\theta=30°$．



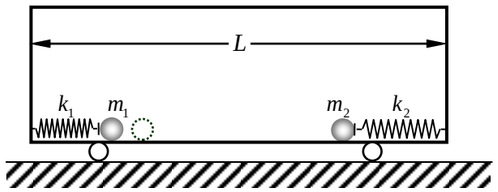
密封线 省、区 市 中学 姓名 考号 内 勿 答 题 切

密 封 线

得分	
阅卷	
复核	

二.（15 分）如图，在水平地面上有一质量为 M 、长度为 L 的小车．车内两端靠近底部处分别固定两个轻弹簧，两弹簧位于同一直线上，其原长分别为 l_1 和 l_2，劲度系数分别为 k_1 和 k_2；两弹簧的另一端前分别放着一质量为 m_1 、 m_2 的小球，弹簧与小球都不相连．

开始时，小球 1 压缩弹簧 1 并保持整个系统处于静止状态，小球 2 被锁定在车底板上，小球 2 与小车右端的距离等于弹簧 2 的原长．现无初速释放小球 1，当弹簧 1 的长度等于其原长时，立即解除对小球 2 的锁定；小球 1 与小球 2 碰撞后合为一体，碰撞时间极短．已知从释放小球 1 至弹簧 2 达到最大压缩量时，小车移动了距离 l_3，所有接触均光滑．试求开始时弹簧 1 的长度 l 和后来弹簧 2 所达到的最大压缩量 Δl_2 .



密 封 线

密 封 线

得分	
阅卷	
复核	

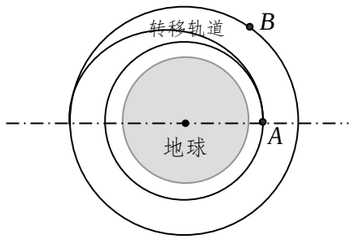
三.（20 分）某空间站 A 绕地球作圆周运动，轨道半径为 $r_{\mathrm{A}}=6.73\times10^{6}\,\mathrm{m}$．一人造地球卫星 B 在同一轨道平面内作圆周运动，轨道半径为 $r_{\mathrm{B}}=\dfrac{3}{2}r_{\mathrm{A}}$，$A$ 和 B 均沿逆时针方向运行．现从空间站上发射一飞船(对空间站无反冲)前去回收该卫星．为了节省燃料，除了短暂的加速或减速变轨过程外，飞船在往返过程中均采用同样形状的逆时针椭圆转移轨道，作无动力飞行．往返两过程的椭圆轨道均位于空间站和卫星的圆轨道平面内，且其近地点和远地点分别位于空间站和卫星的圆轨道上，如图所示．

已知地球半径 $R_{\mathrm{e}}=6.38\times10^{6}\,\mathrm{m}$，地球表面重力加速度 $g=9.80\,\mathrm{m/s^{2}}$．

试求：

1．飞船离开空间站 A 进入椭圆转移轨道所必需的速率增量 Δv_{A}，若飞船在远地点恰与卫星 B 相遇，为了实现无相对运动的捕获，飞船所需的速率增量 Δv_{B}．

2．按上述方式回收卫星，飞船从发射到返回空间站至少需要的时间，空间站 A 至少需绕地球转过的角度．忽略飞船在变轨过程中所用的短暂时间及在此相应时间内绕地球转过的角度．



密 封 线

得分	
阅卷	
复核	

四.（15 分）摩尔质量为 μ 的某种理想气体，从左向右流过一内壁光滑的长直水平绝热导管，导管内横截面的面积为 S．1 摩尔绝对温度为 T 的该气体的内能为 $\frac{5}{2}RT$，式中 R 为普适气体常量．

1．将一加热装置固定放置在管的中部，以恒定功率 W 给气体加热，如图 1 所示．假设该装置对气流的阻力可忽略．当气流稳定后，管中气体虽然在加热装置附近的状态不均匀，但随着与加热装置距离的增加而逐渐趋于均匀．在加热装置左边均匀稳流区域中，气体的压强为 p_0，温度为 T_0，向右流动的速度为 v_0．已知加热装置右边均匀稳流区域中气体的压强为 p_1，试求该区域气体的温度 T_1．

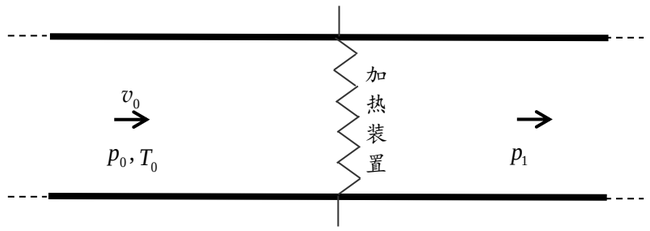


图 1

2．现将管中的加热装置换成一多孔塞，如图 2 所示．在气流稳定后，多孔塞左边气体的温度和压强分别是 T_0 和 p_0，向右流动的速度为 v_0；多孔塞右边气体的压强为 p_2（ $p_2 < p_0$ ）．假设气体在经过多孔塞的过程中与多孔塞没有任何形式的能量交换，求多孔塞右边气体的流速 v_2．

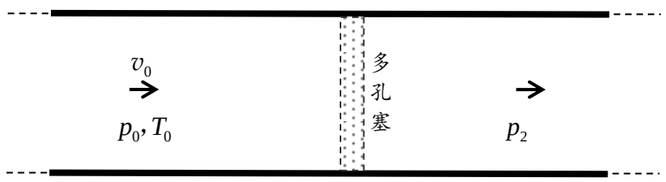


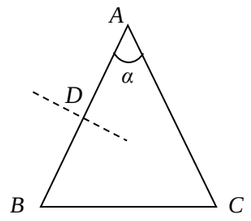
图 2

密 封 线

得分	
阅卷	
复核	

五.（15 分）如图，一个三棱镜 ABC 的顶角 α 小于 90^{o}. 假设光线在纸面内以任意入射角入射到 AB 面上的 D 点，经一次折射后，又入射到 AC 面上，且都能在 AC 面上发生全反射. 已知光线在 AC 面上发生全反射的临界角为 Θ（$\Theta < 45°$），AC 边足够长. 试在下列两种情形下分别求三棱镜顶角 α 的取值范围：

1. 如果光线仅从 AB 面上法线的下方入射.
2. 如果光线仅从 AB 面上法线的上方入射.



密 封 线

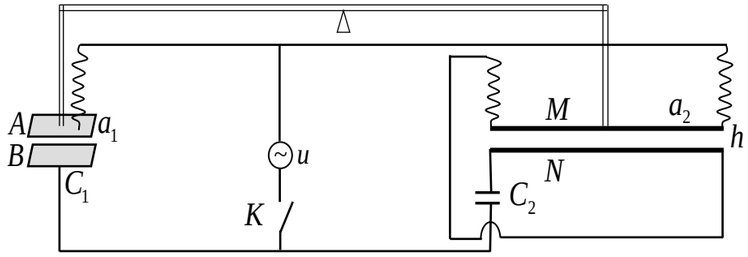
密 封 线

得分	
阅卷	
复核	

六．（20 分）一电荷量为 q 的点电荷产生的电场在距离它为 r 处的电场强度的大小为 $E=k_{\mathrm{e}}\dfrac{q}{r^2}$，式中 k_{e} 为常量；一条长直导线中通有电流 i 时，它所产生的磁场在与导线相距为 r(远小于长直导线的长度)处的磁感应强度的大小为 $B=k_{\mathrm{m}}\dfrac{2i}{r}$，式中 k_{m} 也为常量．

上述两常量比值的平方根 $\sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{k_{\mathrm{m}}}}$ 可用如图所示的实验装置，通过低频（约几百 Hz）的电场和磁场来测定．图中 A、B 表示水平放置的、电容为 C_1 的平行板电容器的极板，极板为正方形，边长为 a_1(极板间距远小于 a_1)． 极板 B 固定，极板 A 悬挂在天平臂一端的挂钩上．M、N 为两根水平放置的平行长直金属细杆，长度均为 a_2，两杆间的距离为 h ($h \ll a_2$)． 杆 N 固定，杆 M 悬挂于天平臂的另一端挂钩上．C_2 为一个已知电容器的电容，K 是电键．交流电源的电压 u 与时间 t 的关系为 $u=U_0\cos 2\pi ft$，其中 f 表示交流电的频率．各部分通过导线如图连接．已知在电键 K 打开时，天平已调节至平衡．接通电源后，天平将失去平衡．通过调节交流电源的频率，可使天平重新达到平衡（注意：由于天平具有惯性，实际上是交流电的平均效果使天平平衡）． 试求 $\sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{k_{\mathrm{m}}}}$ 的表达式．

图中的双线可视为刚性绝缘杆，单实线为导线，曲线表示柔软无质量的导线．不考虑电场、磁场的边缘效应．不考虑导线磁场对 M 和 N 的影响．



密 封 线

得分	
阅卷	
复核	

七.（20 分）两个劲度系数均为k 的相同的轻质金属弹簧，上端固定在水平绝缘横杆上，竖直下垂，下端与一质量为m 的匀质刚性金属杆连接，金属杆的长度为l，杆长与两弹簧的间距相等．将金属杆置于磁感应强度为B 的匀强磁场中，磁场方向垂直于纸面向内．杆、弹簧和交流电源 u 构成一闭合电路，金属杆和弹簧的电阻可忽略；且回路电流的磁场远弱于外磁场B，如图 1 所示．在图 2 中，一自感和一电容并联后接到同样的交流电源 u 上．若在图 1 和图 2 所示的两回路中，在任何时刻，通过电源的电流都一样．试将图 2 中电容C 和自感L用图 1 中的装置的已知参量表示．

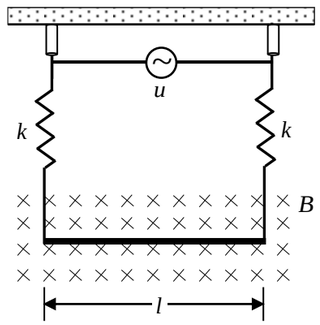


图 1

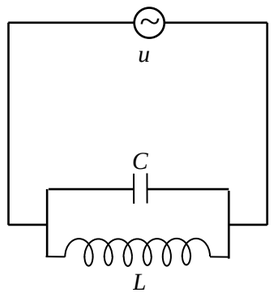


图 2

密 封 线

密 封 线

得分	
阅卷	
复核	

八.（20 分）朱棣文等三位科学家因成功实现中性原子的磁光俘获而获得了 1997 年 Nobel 物理学奖．对以下问题的研究有助于理解磁光俘获的机理（注意：本问题所涉及的原子的物理特性参数，实际上都是在对大量原子或同一原子的多次同类过程进行平均的意义上加以理解的）.

1．已知处于基态的某静止原子对频率为ν_0的光子发生共振吸收，并跃迁到它的第一激发态（见图 1）．然而，由于热运动，原子都处于运动中．假设某原子以速率v_0运动，现用一束激光迎头射向该原子，问恰能使该原子发生共振吸收的激光频率ν为多少？经过共振吸收，该原子的速率改变了多少？（$h\nu_0 \ll mc^2$，m 是原子质量，$h = 6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$）

2．原子的共振吸收是瞬时的，但跃迁到激发态的原子一般不会立即回到基态，而会在激发态滞留一段时间，这段时间被称为该能级的平均寿命．已知所考察原子的第一激发态的平均寿命为τ．若该原子能对迎头射来的激光接连发生共振吸收，且原子一旦回到基态，便立即发生共振吸收，如此不断重复，试求该原子在接连两次刚要发生共振吸收时刻之间的平均加速度．注意：原子从激发态回到基态向各个方向发出光子的机会均等，由于碰撞频率极高，因而由此而引起原子动量改变的平均效果为零.

3．设所考察的原子以初速度v_0沿 Z 轴正向运动，一激光束沿 Z 轴负向迎头射向该原子，使它发生共振吸收．在激光频率保持不变的条件下，为了使该原子能通过一次接着一次的共振吸收而减速至零，必须相应地改变原子能级，为此可让该原子通过一非均匀磁场$B(z)$，实现原子的磁光俘获，如图 3 所示．由于处于磁场中的原子与该磁场会发生相互作用，从而改变原子的激发态能量（见图 2）．当磁感应强度为B时，原来能量为E的能级将变为$E+\Delta E$，其中$\Delta E = \mu B$，μ 是已知常量．试求磁感应强度B随 z 变化的关系式.

4． 设质量为$m = 1.0\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$的锂原子初速度$v_0 = 1.2\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，静止时的共振吸收频率为$\nu_0 = 4.5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$，第一激发态的平均寿命$\tau = 5.3\times10^{-8}\,\mathrm{s}$．为使所考察的原子按 3 中所描述的过程速度减至零，原子通过的磁场区域应有多长？

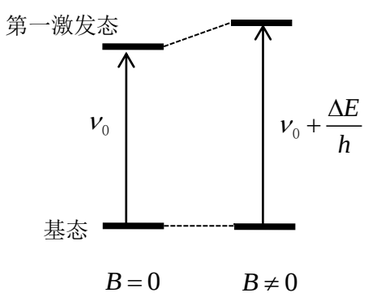


图 1　　图 2

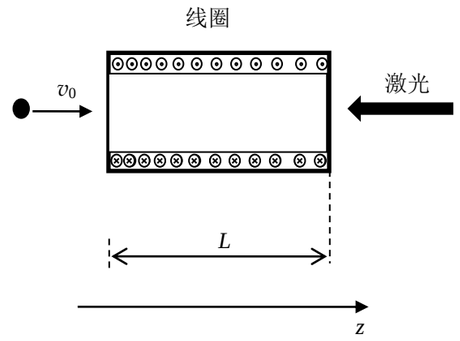


图 3

第 28 届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答及评分标准

一、参考解答：

解法一

取直角坐标系 *Oxy*，原点 *O* 位于椭圆的中心，则哈雷彗星的椭圆轨道方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

a、*b* 分别为椭圆的半长轴和半短轴，太阳 S 位于椭圆的一个焦点处，如图 1 所示.

以 T_e 表示地球绕太阳运动的周期，则 $T_e=1.00$年；以 a_e 表示地球到太阳的距离（认为地球绕太阳作圆周运动），则 $a_e=1.00\mathrm{AU}$，根据开普勒第三定律，有

$$\frac{a^3}{a_e^3}=\frac{T^2}{T_e^2} \qquad (2)$$

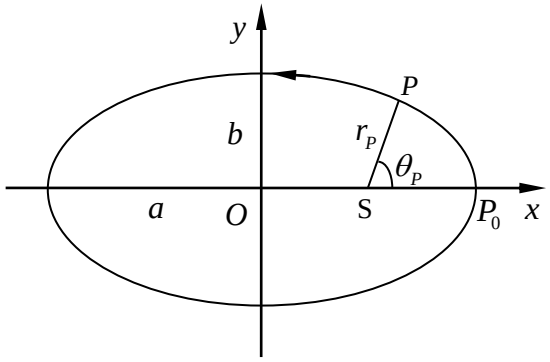


图 1

设 *c* 为椭圆中心到焦点的距离，由几何关系得

$$c=a-r_0 \qquad (3)$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2} \qquad (4)$$

由图 1 可知，*P* 点的坐标

$$x=c+r_P\cos\theta_P \qquad (5)$$

$$y=r_P\sin\theta_P \qquad (6)$$

把（5）、（6）式代入（1）式化简得

$$\left(a^2\sin^2\theta_P+b^2\cos^2\theta_P\right)r_P^2+2b^2cr_P\cos\theta_P+b^2c^2-a^2b^2=0 \qquad (7)$$

根据求根公式可得

$$r_P=\frac{b^2\left(a-c\cos\theta_P\right)}{a^2\sin^2\theta_P+b^2\cos^2\theta_P} \qquad (8)$$

由(2)、(3)、(4)、(8)各式并代入有关数据得

$$r_P=0.896\mathrm{AU} \qquad (9)$$

可以证明，彗星绕太阳作椭圆运动的机械能为

$$E=-\frac{Gmm_s}{2a} \qquad (10)$$

式中 *m* 为彗星的质量．以 v_P 表示彗星在 *P* 点时速度的大小，根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_P^2+\left(-\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{r_P}\right)=-\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{2a} \qquad (11)$$

得

$$v_P=\sqrt{Gm_{\mathrm{s}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{r_P}-\frac{1}{a}} \qquad (12)$$

代入有关数据得

$$v_P=4.39\times10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad (13)$$

设 P 点速度方向与 SP_0 的夹角为 φ (见图 2)，根据开普勒第二定律

$$r_P v_P\sin\left[\varphi-\theta_P\right]=2\sigma \qquad (14)$$

其中 σ 为面积速度，并有

$$\sigma=\frac{\pi ab}{T} \qquad (15)$$

由（9）、（13）、（14）、（15）式并代入有关数据可得

$$\varphi=127^\circ \qquad (16)$$

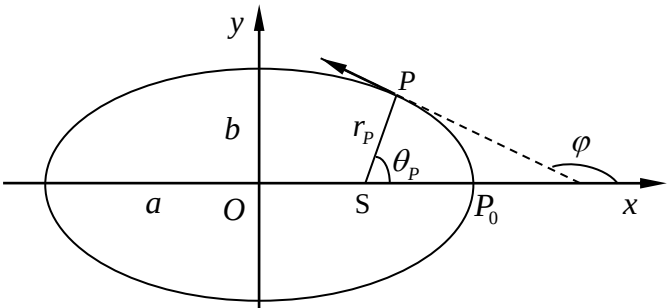


图 2

解法二

取极坐标，极点位于太阳 S 所在的焦点处，由 S 引向近日点的射线为极轴，极角为 θ，取逆时针为正向，用 r、θ 表示彗星的椭圆轨道方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad (1)$$

其中，e 为椭圆偏心率，p 是过焦点的半正焦弦，若椭圆的半长轴为 a，根据解析几何可知

$$p=a\left(1-e^2\right) \qquad (2)$$

将（2）式代入（1）式可得

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \qquad (3)$$

以 T_{e} 表示地球绕太阳运动的周期，则 $T_{\mathrm{e}}=1.00$年；以 a_{e} 表示地球到太阳的距离（认为地球绕太阳作圆周运动），则 $a_{\mathrm{e}}=1.00\mathrm{AU}$，根据开普勒第三定律，有

$$\frac{a^3}{a_{\mathrm{e}}^3}=\frac{T^2}{T_{\mathrm{e}}^2} \qquad (4)$$

在近日点 $\theta=0$，由（3）式可得

$$e=1-\frac{r_0}{a} \tag{5}$$

将θ_P、a、e的数据代入（3）式即得

$$r_P=0.895\mathrm{AU} \tag{6}$$

可以证明，彗星绕太阳作椭圆运动的机械能

$$E=-\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{2a} \tag{7}$$

式中 m 为彗星的质量．以v_P表示彗星在 P 点时速度的大小，根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_P^2+\left(-\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{r_P}\right)=-\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{2a} \tag{8}$$

可得

$$v_P=\sqrt{Gm_s}\cdot\sqrt{\frac{2}{r_P}-\frac{1}{a}} \tag{9}$$

代入有关数据得

$$v_P=4.39\times10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \tag{10}$$

设 P 点速度方向与极轴的夹角为φ，彗星在近日点的速度为v_0，再根据角动量守恒定律，有

$$r_Pv_P\sin\left(\varphi-\theta_P\right)=r_0v_0 \tag{11}$$

根据（8）式，同理可得

$$v_0=\sqrt{Gm_s}\cdot\sqrt{\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a}} \tag{12}$$

由（6）、（10）、(11)、(12)式并代入其它有关数据

$$\varphi=127^\circ \tag{13}$$

评分标准：

本题 20 分

解法一

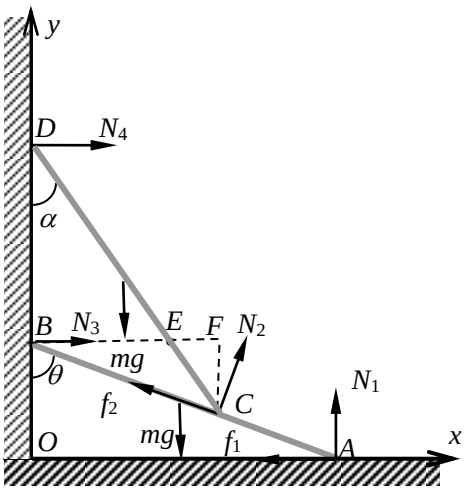
（2）式 3 分，（8）式 4 分，（9）式 2 分，（11）式 3 分，(13) 式 2 分,（14）式 3 分,（15）式 1 分，（16）式 2 分.

解法二

（3）式 2 分，（4）式 3 分，（5）式 2 分，（6）式 2 分，（8）式 3 分，(10) 式 2 分,（11）式 3 分,（12）式 1 分，（13）式 2 分.

二、 参考解答：

1．建立如图所示坐标系 *Oxy*. 两杆的受力情况如图：



f_1为地面作用于杆 AB 的摩擦力， N_1为地面对杆 AB 的支持力， f_2、 N_2为杆 *AB* 作用于杆 CD 的摩擦力和支持力， N_3、 N_4分别为墙对杆 AB 和 CD 的作用力， mg 为重力. 取杆 AB 和 CD 构成的系统为研究对象，系统平衡时，由平衡条件有

$$N_4+N_3-f_1=0 \qquad (1)$$

$$N_1-2mg=0 \qquad (2)$$

以及对 *A* 点的力矩

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta+mg\left(l\sin\theta-\frac{1}{2}l\sin\alpha\right)-N_3l\cos\theta-N_4\left(l\cos\theta+l\cos\alpha-CF\right)=0$$

即

$$\frac{3}{2}mgl\sin\theta-\frac{1}{2}mgl\sin\alpha-N_3l\cos\theta-N_4\left(l\cos\theta+l\cos\alpha-CF\right)=0 \qquad (3)$$

式中 CF 待求. F 是过 C 的竖直线与过 B 的水平线的交点， E 为 BF 与 CD 的交点．由几何关系有

$$CF=l\sin\alpha\cot\theta \qquad (4)$$

取杆 CD 为研究对象，由平衡条件有

$$N_4+N_2\cos\theta-f_2\sin\theta=0 \qquad (5)$$

$$N_2\sin\theta+f_2\cos\theta-mg=0 \qquad (6)$$

以及对 C 点的力矩

$$N_4l\cos\alpha-\frac{1}{2}mgl\sin\alpha=0 \qquad (7)$$

解以上各式可得

$$N_4=\frac{1}{2}mg\tan\alpha \qquad (8)$$

$$N_3=\left(\frac{3}{2}\tan\theta-\frac{1}{2}\tan\alpha-\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}+\frac{1}{2}\frac{\tan\alpha\sin\alpha}{\sin\theta}\right)mg \qquad (9)$$

$$f_1=\left(\frac{3\tan\theta}{2}-\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}+\frac{1}{2}\frac{\tan\alpha\sin\alpha}{\sin\theta}\right)mg \tag{10}$$

$$N_1=2mg \tag{11}$$

$$N_2=\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\tan\alpha\cos\theta\right)mg \tag{12}$$

$$f_2=\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\tan\alpha\sin\theta\right)mg \tag{13}$$

CD 杆平衡的必要条件为

$$f_2\le\mu_C N_2 \tag{14}$$

由（12）、（13）、（14）式得

$$\tan\alpha\le\frac{2\left(\mu_C\sin\theta-\cos\theta\right)}{\mu_C\cos\theta+\sin\theta} \tag{15}$$

AB 杆平衡的必要条件为

$$f_1\le\mu_A N_1 \tag{16}$$

由（10）、（11）、（16）式得

$$\frac{\tan\alpha\sin\alpha}{\sin\theta}-\frac{2\sin\alpha}{\cos\theta}\le 4\mu_A-3\tan\theta \tag{17}$$

因此，使系统平衡，α 应满足的条件为（15）式和（17）式.

2．将题给的数据代入（15）式可得

$$\alpha\le\arctan 0.385=21.1^\circ \tag{18}$$

将题给的数据代入（17）式，经数值计算可得

$$\alpha\ge 19.5^\circ \tag{19}$$

因此，α 的取值范围为

$$19.5^\circ\le\alpha\le 21.1^\circ \tag{20}$$

评分标准：

本题 20 分

第 1 问 15 分

（1）、（2）、（3）式共 3 分，（4）式 1 分，（5）、（6）、（7）式共 3 分，(10) 式到（17）式各 1 分.

第 2 问 5 分

（18）式 1 分，（19）式 3 分，（20）式 1 分.

三、**参考解答：**

解法一

1. 设在时刻t，小球和圆筒的运动状态如图 1 所示，小球位于P点，绳与圆筒的切点为T，P到T的距离即绳的拉直部分的长度为l，圆筒的角速度为ω，小球的速度为v. 小球的速度可以分解成沿着绳子方向的速度v_1和垂直于绳子方向的速度v_2两个分量. 根据机械能守恒定律和角动量守恒定律有

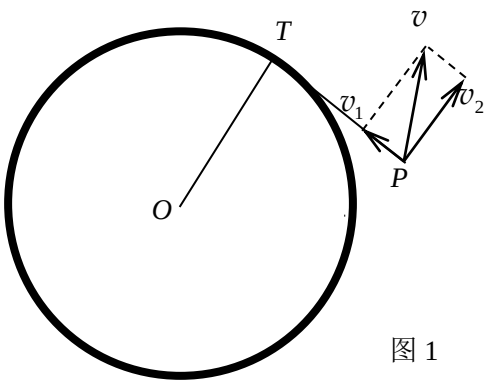


图 1

$$\frac{1}{2}M\left(R\omega_0\right)^2+\frac{1}{2}m\left(R\omega_0\right)^2=\frac{1}{2}M\left(R\omega\right)^2+\frac{1}{2}m\left(v_1^2+v_2^2\right) \tag{1}$$

$$MR^2\omega_0+mR^2\omega_0=MR^2\omega+mRv_1+mlv_2 \tag{2}$$

因为绳子不可伸长，v_1与切点T的速度相等，即

$$v_1=R\omega \tag{3}$$

解(1)、(2)、(3)式得

$$\omega=\frac{(M+m)R^2-ml^2}{(M+m)R^2+ml^2}\omega_0 \tag{4}$$

$$v_2=\frac{2(M+m)R^2l}{(M+m)R^2+ml^2}\omega_0 \tag{5}$$

由(4)式可得

$$l=R\sqrt{\frac{M+m}{m}\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0+\omega}} \tag{6}$$

这便是在卫星角速度减至ω时绳的拉直部分的长度l.

2．由（6）式，当$\omega=0$得

$$L=R\sqrt{\frac{M+m}{m}} \qquad (7)$$

这便是绳的总长度 *L*.

3．如图 2 所示，从时刻t到$t+\Delta t$，切点T跟随圆筒转过一角度$\Delta\theta_1=\omega\Delta t$，由于绳子的拉直部分的长度增加了$\Delta l$，切点相对圆筒又转过一角度$\Delta\theta_2=\dfrac{\Delta l}{R}$，到达$T'$处，所以在$\Delta t$时间内，切点转过的角度

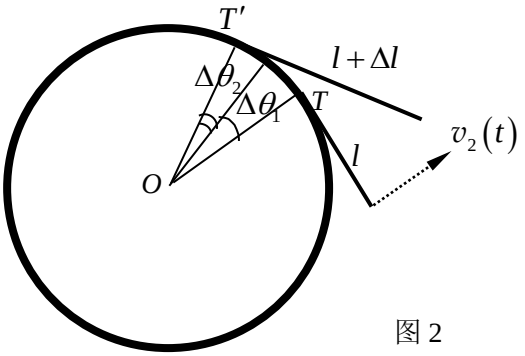


图 2

$$\Delta\theta=\Delta\theta_1+\Delta\theta_2=\omega\Delta t+\frac{\Delta l}{R} \tag{8}$$

切点从T变到T'也使切线方向改变了一个同样的角度$\Delta\theta$，而切线方向的改变是小球具有垂直于绳子方向的速度v_2引起的，故有

$$\Delta\theta=\frac{v_2\Delta t}{l} \tag{9}$$

由(1)、(2)、(3)式可得

$$v_2=l\left(\omega_0+\omega\right) \tag{10}$$

由(8)、(9)、(10)三式得

$$\Delta l=R\omega_0\Delta t \tag{11}$$

(11)式表示l随t均匀增加，故l由0增加到L所需的时间为

$$t_s=\frac{L}{\omega_0 R}=\frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{M+m}{m}} \tag{12}$$

解法二

1．撤去插销后两个小球的运动情况相同，故可取一个小球作为对象进行研究，先研究任何时刻小球的速度.

在t时刻，相对卫星系统质心参考系小球运动状态如图1所示，绳子的拉直部分与圆筒面的切点为T，小球到切点T的距离即绳的拉直部分的长度为l，小球到转轴O的距离为r，圆筒的角速度为ω. 由于圆筒的转动和小球相对圆筒的运动，绳将展开，切点位置和绳的拉直部分的长度都要改变.

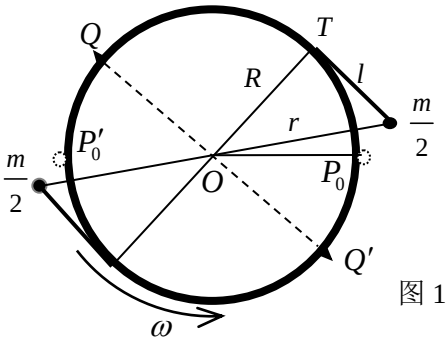


图1

首先考察小球相对于圆筒的运动. 在t时刻，OT与固定在圆筒上的半径OP_0的夹角为ϕ，如图2所示. 由于小球相对圆筒的运动，经过时间Δt，切点从圆筒上的T点移到T'点，OT'与OP_0的夹角变为$\phi+\Delta\phi$，绳的拉直部分的长度由l变为l'，小球由P运动到P'，$\overrightarrow{PP'}$便是小球相对圆筒的位移. 当Δt很小时$l\approx l'$，故

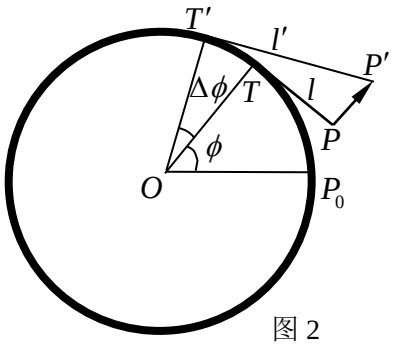


图2

$$\left|\overrightarrow{PP'}\right|=l'\Delta\phi\approx l\Delta\phi$$

于是小球相对圆筒的速度大小为

$$v_\phi = l\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = l\omega_\phi \tag{1}$$

方向垂直于TP． ω_ϕ是切点相对圆筒转动的角速度.

再考察圆筒相对质心参考系的转动，即与圆筒固连在一起的转动参考系相对质心参考系的运动. 当圆筒的角速度为ω时，位于转动参考系中的P点(小球所在处)相对质心系的速度

$$v_\omega = r\omega \tag{2}$$

方向垂直于OP． 可以把v_ω分解成沿着TP方向的分量$v_{\omega 1}$和垂直TP方向的分量$v_{\omega 2}$，如图 3 所示，即

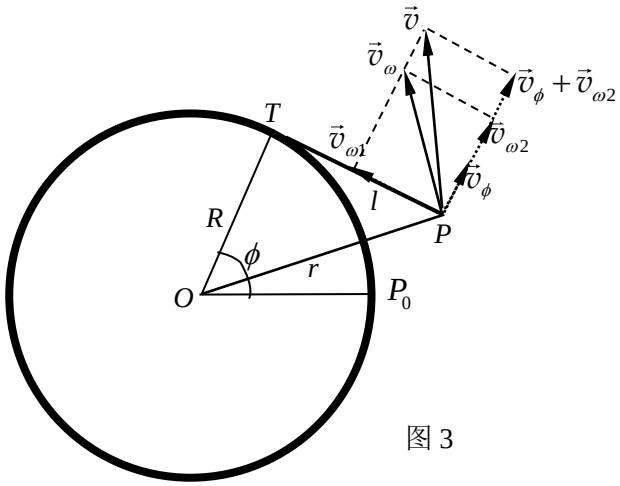


图 3

$$v_{\omega 1} = R\omega \tag{3}$$

$$v_{\omega 2} = l\omega \tag{4}$$

小球相对质心系的速度$\vec{v}$是小球相对圆筒的速度和圆筒参考系中的P点相对质心系速度的合成，由图 3 可得$\vec{v}$的大小

$$v = \sqrt{v_{\omega 1}^2 + \left(v_{\omega 2} + v_\phi\right)^2} \tag{5}$$

因

$$l = R\phi \tag{6}$$

故有

$$v = R\sqrt{\omega^2 + \left(\omega + \omega_\phi\right)^2 \phi^2} \tag{7}$$

因为系统不受外力作用，故系统的动能和角动量守恒，故有

$$\frac{1}{2}M\left(R\omega_0\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}M\left(R\omega\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{8}$$

$$MR^2\omega_0 + mR^2\omega_0 = MR^2\omega + mRv_{\omega 1} + ml\left(v_{\omega 2} + v_\phi\right) \tag{9}$$

由(7)、(8)两式有

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{m}{M+m}\left(\omega + \omega_\phi\right)^2\phi^2 \tag{10}$$

由(1)、(3)、(4)、(6)、(9)各式得

$$\omega_0 = \omega + \frac{m}{M+m}\phi^2\left(\omega + \omega_\phi\right) \tag{11}$$

由(10)、(11)两式得

$$\omega_0+\omega=\omega+\omega_\phi$$

故有

$$\omega_\phi=\omega_0 \tag{12}$$

上式说明绳子与圆筒的切点相对圆筒转动的角速度等于卫星的初始角速度，是一个恒量，将(12）式代入（11）式得

$$\phi=\sqrt{\frac{M+m}{m}\left(\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0+\omega}\right)} \tag{13}$$

由(6)、(13)两式得

$$l=R\sqrt{\frac{M+m}{m}\left(\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0+\omega}\right)} \tag{14}$$

这便是在卫星角速度减至ω时绳的拉直部分的长度l.

2．由（14）式，当$\omega=0$得绳总长度，即

$$L=R\sqrt{\frac{M+m}{m}} \tag{15}$$

3．因ω_ϕ是一个恒量，ϕ随时间的t的变化规律为

$$\phi=\omega_0 t \tag{16}$$

当$\omega=0$时，由（13）式可得卫星停旋时的ϕ

$$\phi_s=\sqrt{\frac{M+m}{m}} \tag{17}$$

设卫星停转所用的时间为t_s，由（16)、（17）式得

$$t_s=\frac{\phi_s}{\omega_0}=\frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{M+m}{m}} \tag{18}$$

评分标准：

本题 25 分.

解法一

第 1 问 12 分.（1)、（2）式各 3 分，（3）式 2 分，（6）式 4 分.

第 2 问 3 分.（7）式 3 分.

第 3 问 10 分.（8)、（9）式各 3 分，（10）式 2 分，（11)、（12）式各 1 分.

解法二

第 1 问 18 分.（1）式 3 分，（2）式 2 分，（7）式 2 分，（8）式 3 分，（9）式 3 分，（12）式 2 分，（14）式 3 分，

第 2 问 3 分.（15）式 3 分.

第 3 问 4 分.（16）式 2 分，（17）式 1 分，（18）式 1 分.

四、**参考解答：**

1．根据题意，粒子的初速度只有 *y* 方向和 *z* 方向的分量，设它们为 v_{0y} 和 v_{0z}. 因为粒子在 *z* 方向不受电场力和磁场力作用，故粒子在 *z* 方向以初速度 v_{0z} 作匀速运动.

粒子在 *Oxy* 面内的运动可以看作由以下两部分运动的合成：可把粒子在 *y* 方向的初速度表示为

$$v_{0y}=-v_{0y1}+v_{0y}+v_{0y1} \tag{1}$$

其中

$$v_{0y1}=-\frac{E_0}{B_0} \tag{2}$$

沿 *y* 负方向．与 v_{0y1} 相关的磁场力

$$f_{Bx}=-qv_{0y1}B_0 \tag{3}$$

沿 *x* 负方向. 粒子受到的电场力

$$f_E=f_{Ex}=qE_0 \tag{4}$$

沿 *x* 正方向．由(2)、(3)、(4)式可知，粒子在 *x* 方向受到的电场力和磁场力正好抵消，故粒子以大小为 $\frac{E_0}{B_0}$ 的速度沿 *y* 负方向运动．除此之外，由（1）式可知，粒子还具有初速度

$$v_{0y2}=v_{0y}+\frac{E_0}{B_0} \tag{5}$$

沿 *y* 正方向，与 v_{0y2} 相关的磁场力使粒子以速率 v_{0y2} 在 *Oxy* 面内作匀速圆周运动，以 *r* 表示圆周运动的半径，有

$$qv_{0y2}B_0=m\frac{v_{0y2}^2}{r} \tag{6}$$

可得

$$r=\frac{mv_{0y2}}{qB_0} \tag{7}$$

由周期的定义和(7)式可得圆周运动的周期

$$T=\frac{2\pi m}{qB_0} \tag{8}$$

(8)式表明，粒子运动的周期与粒子在 *y* 方向的初速度无关．经过时间 *T* 或 *T* 的整数倍所考察的粒

子就能同时回到 *Oyz* 平面.

2．增加的电场 E_z 对粒子在 *Oxy* 平面内的运动无影响，但粒子在 *z* 方向要受到此电场力作用. 以 a_z 表示在此电场力作用下的加速度，有

$$ma_z = qE_z \tag{9}$$

或

$$a_z = \frac{qE_z}{m} \tag{10}$$

因未增加电场时，粒子在 *z* 方向作初速度为 v_{0z} 的匀速运动，增加电场后，粒子在 *z* 方向的运动是初速度不为 0 的匀加速直线运动，即有

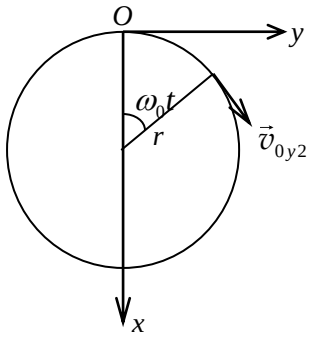
$$z = v_{0z}t + \frac{1}{2}at^2 \tag{11}$$

由(10)、(11)式得

$$z = v_{0z}t + \frac{1}{2}\frac{qE_z}{m}t^2 \tag{12}$$

粒子在 *Oxy* 平面内的运动不受电场 E_z 的影响．设 ω_0 为粒子在 *Oxy* 平面内作圆周运动的角速度，则有

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB_0}{m} \tag{13}$$



由图示可得与圆周运动相联系的粒子坐标随时间 *t* 的变化关系

$$x' = r\left(1-\cos\omega_0 t\right) \tag{14}$$

$$y' = r\sin\omega_0 t \tag{15}$$

考虑到粒子在 *y* 方向还具有速度为 v_{0y1} 的匀速运动，并利用(2)、(5)、(7)、(13)以及已知条件，可得带电粒子的运动规律：

$$x = \frac{m}{qB_0}\left(v_{0y} + \frac{E_0}{B_0}\right)\left(1-\cos\frac{qB_0}{m}t\right) \tag{16}$$

$$y = -\frac{E_0}{B_0}t + \frac{m}{qB_0}\left(v_{0y} + \frac{E_0}{B_0}\right)\sin\frac{qB_0}{m}t \tag{17}$$

$$z = v_{0z}t + \frac{1}{2}\frac{qE_z}{m}t^2 \tag{18}$$

评分标准：

本题 20 分.

第 1 问 12 分.（2）、（3）、（4）式共 5 分，（5）、（6）、（7）式共 4 分，（8）式及相关说明共 3 分.

第 2 问 8 分.（12）式 2 分，（14）式到（19）式各 1 分.

五、**答案与评分标准**

本题 15 分.

1．$I_L - I_0\left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1\right)$ （2 分），I_L （2 分），$V_T \ln\left(1+\frac{I_L}{I_0}\right)$ （2 分），

$VI_L - VI_0\left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1\right)$ （1 分）.

2．0.62V （2 分）；0.54V （2 分）；49mW （2 分）；6.0Ω （2 分）.

六、**参考解答：**

在电加热器对 *A* 室中气体加热的过程中，由于隔板 N 是导热的，*B* 室中气体的温度要升高，活塞 M 将向右移动.当加热停止时，活塞 M 有可能刚移到气缸最右端，亦可能尚未移到气缸最右端. 当然亦可能活塞已移到气缸最右端但加热过程尚未停止.

1. 设加热恰好能使活塞 M 移到气缸的最右端，则 *B* 室气体末态的体积

$$V_B = 2V_0 \tag{1}$$

根据题意，活塞 M 向右移动过程中，B 中气体压强不变，用 T_B 表示 *B* 室中气体末态的温度，有

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_B}{T_B} \tag{2}$$

由(1)、(2)式得

$$T_B = 2T_0 \tag{3}$$

由于隔板 N 是导热的，故 *A* 室中气体末态的温度

$$T_A = 2T_0 \tag{4}$$

下面计算此过程中的热量 Q_m.

在加热过程中，*A* 室中气体经历的是等容过程，根据热力学第一定律，气体吸收的热量等于其内能的增加量，即

$$Q_A = \frac{5}{2}R(T_A - T_0) \tag{5}$$

由(4)、(5)两式得

$$Q_A = \frac{5}{2}RT_0 \tag{6}$$

B 室中气体经历的是等压过程，在过程中 *B* 室气体对外做功为

$$W_B = p_0(V_B - V_0) \tag{7}$$

由(1)、(7)式及理想气体状态方程得

$$W_B = RT_0 \tag{8}$$

内能改变为

$$\Delta U_B = \frac{5}{2} R(T_B - T_0) \quad (9)$$

由(4)、(9)两式得

$$\Delta U_B = \frac{5}{2} RT_0 \quad (10)$$

根据热力学第一定律和(8)、(10)两式，B 室气体吸收的热量为

$$Q_B = \Delta U_B + W_B = \frac{7}{2} RT_0 \quad (11)$$

由(6)、(11) 两式可知电加热器提供的热量为

$$Q_m = Q_A + Q_B = 6RT_0 \quad (12)$$

若 $Q_0 = Q_m$，B 室中气体末态体积为 $2V_0$，A 室中气体的末态温度 $2T_0$.

2．若 $Q_0 > Q_m$，则当加热器供应的热量达到 Q_m 时，活塞刚好到达气缸最右端，但这时加热尚未停止，只是在以后的加热过程中气体的体积保持不变，故热量 $Q_0 - Q_m$ 是 A、B 中气体在等容升温过程中吸收的热量.由于等容过程中气体不做功，根据热力学第一定律，若 A 室中气体末态的温度为 T_A'，有

$$Q_0 - Q_m = \frac{5}{2} R(T_A' - 2T_0) + \frac{5}{2} R(T_A' - 2T_0) \quad (13)$$

由(12)、(13)两式可求得

$$T_A' = \frac{Q_0}{5R} + \frac{4}{5} T_0 \quad (14)$$

B 中气体的末态的体积

$$V_B' = 2V_0 \quad (15)$$

3. 若 $Q_0 < Q_m$，则隔板尚未移到气缸最右端，加热停止，故 B 室中气体末态的体积 V_B'' 小于 $2V_0$，即 $V_B'' < 2V_0$．设 A、B 两室中气体末态的温度为 T_A''，根据热力学第一定律，注意到 A 室中气体经历的是等容过程，其吸收的热量

$$Q_A = \frac{5}{2} R(T_A'' - T_0) \quad (16)$$

B 室中气体经历的是等压过程，吸收热量

$$Q_B = \frac{5}{2} R(T_A'' - T_0) + p_0(V_B'' - V_0) \quad (17)$$

利用理想气体状态方程，上式变为

$$Q_B = \frac{7}{2} R\left(T_A'' - T_0\right) \quad (18)$$

由上可知

$$Q_0 = Q_A + Q_B = 6R(T_A'' - T_0) \tag{19}$$

所以 A 室中气体的末态温度

$$T_A'' = \frac{Q_0}{6R} + T_0 \tag{20}$$

B 室中气体的末态体积

$$V_B'' = \frac{V_0}{T_0} T_A'' = (\frac{Q_0}{6RT_0} + 1)V_0 \tag{21}$$

评分标准：

本题 20 分.

（12）式 6 分，得到 $Q_0 = Q_m$ 的条件下（1）、（4）式各 1 分；得到 $Q_0 > Q_m$ 的条件下的（14）式 4 分，（15）式 2 分；得到 $Q_0 < Q_m$ 的条件下的（20）式 4 分，（21）式 2 分.

七、

答案与评分标准：

本题 20 分.

1. $3R$ (3 分)

2. $6R$ (3 分)

3.

I_2 与 L 的距离	I_2 在 L 左方还是右方	I_2 的大小	I_2 是正立还是倒立	I_2 是实像还是虚像
$6R$	右方	$2h$	倒立	虚像

第 1 第 3 空格各 2 分；其余 3 个空格全对 3 分，有一个错则不给这 3 分.

4.

I_3 与 L 的距离	I_3 在 L 左方还是右方	I_3 的大小	I_3 是正立还是倒立	I_3 是实像还是虚像
$18R$	左方	$2h$	倒立	实像

第 1 第 3 空格各 2 分；其余 3 个空格全对 3 分，有一个错则不给这 3 分.

八、**参考解答：**

1. 反应能

$$Q=\left[\left(m_{\mathrm{p}}+m_{{}^{3}\mathrm{H}}\right)-\left(m_{{}^{3}\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}}\right)\right]c^{2} \tag{1}$$

式中 c 为光速．代入数据得

$$Q=-0.764\mathrm{MeV} \tag{2}$$

上式表明这是一吸能核反应.

2. 为了求入射质子阈能，反应前后各粒子都应沿同一直线运动. 设质子的入射速度大小为 v_{p}，反应后 ${}_{2}^{3}\mathrm{He}$ 的速度大小为 $v_{{}^{3}\mathrm{He}}$，中子的速度大小为 v_{n}，根据动量守恒和能量守恒有

$$m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}=m_{{}^{3}\mathrm{He}}v_{{}^{3}\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}} \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^{2}=\frac{1}{2}m_{{}^{3}\mathrm{He}}v_{{}^{3}\mathrm{He}}^{2}+\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}^{2}+\left|Q\right| \tag{4}$$

由（3)、（4）式可得

$$\left(\frac{m_{\mathrm{n}}^{2}+m_{\mathrm{n}}m_{{}^{3}\mathrm{He}}}{m_{{}^{3}\mathrm{He}}}\right)v_{\mathrm{n}}^{2}-2\frac{m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{n}}}{m_{{}^{3}\mathrm{He}}}v_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{n}}+\left(\frac{m_{\mathrm{p}}^{2}-m_{\mathrm{p}}m_{{}^{3}\mathrm{He}}}{m_{{}^{3}\mathrm{He}}}\right)v_{\mathrm{p}}^{2}+2\left|Q\right|=0 \tag{5}$$

令

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{m_{\mathrm{n}}^{2}+m_{{}^{3}\mathrm{He}}m_{\mathrm{n}}}{m_{{}^{3}\mathrm{He}}}\\ b&=-2\frac{m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{n}}}{m_{{}^{3}\mathrm{He}}}v_{\mathrm{p}}\\ c&=\frac{m_{\mathrm{p}}^{2}-m_{\mathrm{p}}m_{{}^{3}\mathrm{He}}}{m_{{}^{3}\mathrm{He}}}v_{\mathrm{p}}^{2}+2\left|Q\right|\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

把(6)式代入(5)式得

$$av_{\mathrm{n}}^{2}+bv_{\mathrm{n}}+c=0 \tag{7}$$

(7)式有解的条件是

$$b^{2}-4ac\geq 0 \tag{8}$$

由(6)式可知，c 可能大于零，亦可能小于零. 若 $c<0$，则(8)总成立，中子速度一定有解，反应一定能发生；若 $c>0$，则由 (6)、(8)两式得

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^{2}\geq\frac{m_{\mathrm{n}}+m_{{}^{3}\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{n}}+m_{{}^{3}\mathrm{He}}-m_{\mathrm{p}}}\left|Q\right| \tag{9}$$

即只有当入射质子的动能满足(9)式时，中子速度才有解，反应才能发生，所以入射质子的阈能为

$$T_{th}=\left(1+\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{n}}+m_{{}^3\mathrm{He}}-m_{\mathrm{p}}}\right)|Q| \tag{10}$$

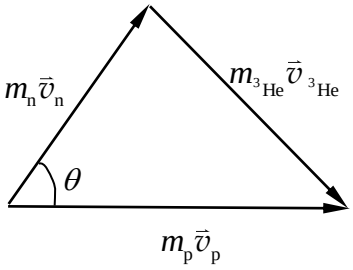
利用(1)式，在忽略$|Q|^2$项的情况下，(10)式可简化为

$$T_{th}=\left(1+\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{{}^3\mathrm{H}}}\right)|Q| \tag{11}$$

代入有关数据得

$$T_{th}=1.02\mathrm{MeV} \tag{12}$$

3．由动量守恒和能量守恒有



$$m_{\mathrm{p}}\vec{v}_{\mathrm{p}}=m_{{}^3\mathrm{He}}\vec{v}_{{}^3\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}} \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^2=\frac{1}{2}m_{{}^3\mathrm{He}}v_{{}^3\mathrm{He}}^2+\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}^2+|Q| \tag{13}$$

以θ表示反应中产生的中子速度方向与入射质子速度方向的夹角，如图所示，根据余弦定律有

$$\left(m_{{}^3\mathrm{He}}v_{{}^3\mathrm{He}}\right)^2=\left(m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}\right)^2+\left(m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}\right)^2-2m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{p}}\cos\theta \tag{14}$$

令

$$T_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^2 \tag{15}$$

$$T_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}^2 \tag{16}$$

$$T_{{}^3\mathrm{He}}=\frac{1}{2}m_{{}^3\mathrm{He}}v_{{}^3\mathrm{He}}^2 \tag{17}$$

把(15)、(16)、(17)式代入(13)、(14)两式得

$$|Q|=T_{\mathrm{p}}-T_{{}^3\mathrm{He}}-T_{\mathrm{n}} \tag{18}$$

$$2m_{{}^3\mathrm{He}}T_{{}^3\mathrm{He}}=2m_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{n}}+2m_{\mathrm{p}}T_{\mathrm{p}}-2\sqrt{2m_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{n}}}\cdot\sqrt{2m_{\mathrm{p}}T_{\mathrm{p}}}\cos\theta \tag{19}$$

由（18)、(19）式，消去$T_{{}^3\mathrm{He}}$后，得

$$T_{\mathrm{n}}-2\frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{p}}T_{\mathrm{p}}}}{m_{{}^3\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}}}\cos\theta\cdot\sqrt{T_{\mathrm{n}}}-\frac{\left(m_{{}^3\mathrm{He}}-m_{\mathrm{p}}\right)T_{\mathrm{p}}-|Q|m_{{}^3\mathrm{He}}}{m_{{}^3\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}}}=0 \tag{20}$$

令 $$S=\frac{\sqrt{m_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{p}}T_{\mathrm{p}}}}{m_{{}^3\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}}}\cos\theta,\quad R=\frac{\left(m_{{}^3\mathrm{He}}-m_{\mathrm{p}}\right)T_{\mathrm{p}}-|Q|m_{{}^3\mathrm{He}}}{m_{{}^3\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}}} \tag{21}$$

得

$$T_{\mathrm{n}}-2S\sqrt{T_{\mathrm{n}}}-R=0 \tag{22}$$

根据题给的入射质子的动能和第 1 问求得的反应能$|Q|$的值，由(21)式可知$R>0$，故（22）式的符合物理意义的解为

$$\sqrt{T_{\mathrm{n}}}=S+\sqrt{S^2+R} \tag{23}$$

将具体数据代入（21)、（23）式中，有

$$T_{\mathrm{n}}=0.132\mathrm{MeV} \tag{24}$$

评分标准：本题 20 分

第 1 问 4 分

（2）式 3 分，结论 1 分.

第 2 问 8 分

（3)、（4）式各 2 分，（9）式 2 分，（10)、（11）式各 1 分.

第 3 问 8 分

（12）（13）式各 2 分，（23）式 3 分，（24）式 1 分.

第 2 问的其他解法

解法一

为了研究阈能，只考虑碰撞前后各粒子都沿同一直线运动的情况．若碰撞后${}_2^3\mathrm{He}$和中子的速度相同，即粘在一起运动(完全非弹性碰撞)，则在碰撞过程中损失的机械能最多，若所损失的机械能正好等于反应能，则入射质子的动能最小，这最小动能便是阈能．设质子的入射速度大小为v_{p}，反应后${}_2^3\mathrm{He}$和中子的速度大小为v，根据动量守恒和能量守恒有

$$m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}=(m_{{}_3\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}})v \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^2=\frac{1}{2}(m_{{}_3\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}})v^2+|Q| \tag{2}$$

由（1)、（2）式可得

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^2=\frac{m_{\mathrm{n}}+m_{{}_3\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{n}}+m_{{}_3\mathrm{He}}-m_{\mathrm{p}}}|Q| \tag{3}$$

所以阈能为

$$T_{th}=\left(1+\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{n}}+m_{{}_3\mathrm{He}}-m_{\mathrm{p}}}\right)|Q| \tag{4}$$

利用第 1 问中的(1)式，并注意到

$$\frac{|Q|}{m_{{}_3\mathrm{H}}c^2}<<1$$

有

$$\frac{1}{m_{\mathrm{n}}+m_{{}^3\mathrm{He}}-m_{\mathrm{p}}}=\frac{1}{m_{{}^3\mathrm{H}}\left(1+\dfrac{|Q|}{m_{{}^3\mathrm{H}}c^2}\right)}=\frac{1}{m_{{}^3\mathrm{H}}}\left(1-\frac{|Q|}{m_{{}^3\mathrm{H}}c^2}\right)$$

在忽略$|Q|^2$项的情况下，(4)式可简化为

$$T_{th}=\left(1+\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{{}^3\mathrm{H}}}\right)|Q| \tag{5}$$

代入有关数据得

$$T_{th}=1.02\mathrm{MeV} \tag{6}$$

第 2 问 8 分

⑴、⑵式各 3 分，(4)式或⑸式 1 分，⑹式 1 分.

解法二

在牛顿力学中可以证明，质点系的总动能可以表示为质点系的总质量以质心速度运动的动能即所谓质心动能与各质点相对质心运动的动能之和. 若质点系不受外力作用，则质点系的动量守恒，质心速度不变，故质心动能亦恒定不变；如果质点系内部的相互作用导致质点系机械能的变化，则可变化的机械能只能是各质点相对质心运动的动能. 在本题中，如果质子 p 与氚${}_1^3\mathrm{H}$发生反应后，生成的中子 n 和氦${}_2^3\mathrm{He}$相对质心都静止，则质子 p 与氚${}_1^3\mathrm{H}$相对质心运动的动能之和全部转化成反应能，反应后系统的动能只有质心的动能，在这请况下，转化成其他形式能量的机械能最多，入射质子的动能最小，这最小动能便是阈能. 所以入射质子的阈能等于系统质心的动能与反应能之和.

以v'_{p}和$v'_{{}^3\mathrm{H}}$分别表示质子 p 和氚${}_1^3\mathrm{H}$相对质心的速度，有

$$|Q|=\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v'^2_{\mathrm{p}}+\frac{1}{2}m_{{}^3\mathrm{H}}v'^2_{{}^3\mathrm{H}} \tag{1}$$

因系统质心的速度

$$v_{\mathrm{c}}=\frac{m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}} \tag{2}$$

而

$$v'_{\mathrm{p}}=v_{\mathrm{p}}-v_{\mathrm{c}}=\frac{m_{{}^3\mathrm{H}}v_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}} \tag{3}$$

$$v'_{{}^3\mathrm{H}}=0-v_{\mathrm{c}}=-\frac{m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}} \tag{4}$$

由(1)、(3)、(4)式得

$$|Q|=\frac{m_{{}^3\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}}\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}^2 \tag{5}$$

在牛顿力学中，系统的总质量是恒定不变的，这就导致系统质心的动能在反应前后恒定不变的结论，但在本题中，损失掉的机械能导致系统总质量的变化，使反应前系统的总质量与反应后系统的总质量不相等，即 $m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}\neq m_{\mathrm{n}}+m_{{}^3\mathrm{He}}$．如果仍沿用牛顿力学的结论，对一个孤立系统，其质心速度是不会改变的，故反应后质心的动能应为

$$E_{\mathrm{c}}=\frac{1}{2}\left(m_{\mathrm{n}}+m_{{}^3\mathrm{He}}\right)v_{\mathrm{c}}^2=\frac{1}{2}\left(m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}\right)v_{\mathrm{c}}^2+\frac{1}{2}\frac{|Q|}{c^2}v_{\mathrm{c}}^2$$

而

$$\frac{1}{2}\frac{|Q|}{c^2}v_{\mathrm{c}}^2=\frac{1}{2}\frac{|Q|}{c^2}\cdot\frac{m_{\mathrm{p}}^2v_{\mathrm{p}}^2}{\left(m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}\right)^2}=\frac{|\mathrm{Q}|}{c^2}\cdot\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}}\cdot\frac{|Q|}{m_{{}^3\mathrm{H}}}$$

由此可见，在忽略 $|Q|^2$ 的条件下

$$\frac{1}{2}\left(m_{\mathrm{n}}+m_{{}^3\mathrm{He}}\right)v_c^2=\frac{1}{2}\left(m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}\right)v_c^2$$

而入射质子的阀能

$$T_{th}=\frac{1}{2}\left(m_{\mathrm{p}}+m_{{}^3\mathrm{H}}\right)v_c^2+|Q| \tag{6}$$

由(2)、(5)、(6)式得

$$T_{th}=\left(1+\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{{}^3\mathrm{H}}}\right)|Q| \tag{7}$$

代入有关数据得

$$T_{th}=1.02\mathrm{MeV} \tag{8}$$

第 2 问 8 分

(1)、(5) 、(6)式各 2 分， (7)式 1 分，、(8)式 1 分.

解法三

考虑反应前后各粒子都沿同一直线运动的情况，若入射质子与与静止的 ${}_1^3\mathrm{H}$ 发生完全非弹性碰撞，即反应后产生的中子和 ${}_2^3\mathrm{He}$ 以相同的速度运动，则入射质子的动能就是阈能. 以 m_{10} 表示质子的静止质量，m_{20} 表示 ${}_1^3\mathrm{H}$ 的静止质量，m_{30} 表示中子的静止质量，m_{40} 表示 ${}_1^3\mathrm{He}$ 的静止质量，设质子的入射速度大小为 v_{p}，反应后 ${}_2^3\mathrm{He}$ 和中子的速度大小都为 v，根据动量守恒和能量守恒有

$$m_1 v_{\mathrm{p}} = \frac{\left(m_{30}+m_{40}\right)v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

$$m_1 c^2 + m_{20} c^2 = \frac{\left(m_{30}+m_{40}\right)c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

式中 m_1 是质子的动质量.由(1)、(2)两式得

$$v = \frac{m_1 v_{\mathrm{p}}}{m_1 + m_{20}} \tag{3}$$

把(3)式代入(1)式，经整理得

$$\left(m_1+m_{20}\right)^2 c^2 - m_1^2 v_{\mathrm{p}}^2 = \left(m_{30}+m_{40}\right)^2 c^2 \tag{4}$$

由

$$m_1 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1-\dfrac{v_{\mathrm{p}}^2}{c^2}}} \tag{5}$$

可得

$$m_1^2 - m_{10}^2 = \frac{m_1^2 v_{\mathrm{p}}^2}{c^2} \tag{6}$$

若入射质子的阈能为 E_{th}，有

$$m_1 c^2 = m_{10} c^2 + E_{th} \tag{7}$$

由(4)、(6)、(7)式可得

$$E_{th} = \frac{\left(m_{30}+m_{40}\right)^2 - \left(m_{10}+m_{20}\right)^2}{2m_{20}} \tag{8}$$

利用题给条件并引入反应能，得

$$E_{th} = \frac{m_{\mathrm{p}} + m_{^3\mathrm{H}} + m_{\mathrm{n}} + m_{^3\mathrm{He}}}{2m_{^3\mathrm{H}}}\left|Q\right| \tag{9}$$

或有

$$E_{th} = \frac{\dfrac{\left|Q\right|}{c^2} + 2\left(m_{\mathrm{p}} + m_{^3\mathrm{H}}\right)}{2m_{^3\mathrm{H}}}\left|Q\right| \approx \frac{m_{\mathrm{p}} + m_{^3\mathrm{H}}}{m_{^3\mathrm{H}}}\left|Q\right| \tag{10}$$

代入有关数据得

$$T_{th} = 1.02\mathrm{MeV} \tag{11}$$

第 2 问 8 分

(1)、(2) 、(8)式各 2 分， (9)或(10)式 1 分， (11)式 1 分．