第 26 届全国中学生物理竞赛决赛试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷								
复核								

选手须知

1、参赛选手考试前请认真阅读本须知.

2、本试卷包括填空题和计算题两部分，试题从本页开始，共 5 张（10 页）. 试卷的每一页下面标出了该页的页码和试卷纸的总页数，请认真核对每一页的页码和总页数是否正确，每一页中是否有印刷不清楚的地方，发现问题请及时与监考老师联系。

3、填空题把答案填在题中的横线上，不需要写出求解过程.

4、计算题解答写在题目后面，应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤. 只写出最后结果的不能得分. 有数值计算的，答案中必须明确写出数值和单位.

5、试卷纸的密封线内和背面一律不能写解答，所写的解答一律无效.

6、考生可以使用所发的草稿纸，但需要阅卷老师评阅的内容一定要写到试卷上，阅卷老师只评阅试卷上的内容，写在草稿纸上的解答一律无效.

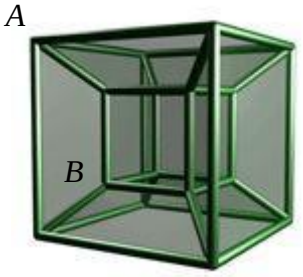
----------以下为试题----------

得分	
评阅人	

一. 填空题（每题 5 分，共 20 分）：

1. 某光滑曲面由曲线 $y=f(x)$ 绕竖直 y 轴旋转一周形成. 一自然半径 a、质量 m、劲度系数 k 的弹性圆环置于该曲面之上，能水平静止于任意高度处，则曲线方程为_____.

2. 如图所示的电阻框架为四维空间中的超立方体在三维空间中投影的模型（可视为内外两个立方体框架，对应顶点互相连接起来），若该结构中每条棱均由电阻为 R 的材料构成，则 AB 节点间的等效电阻为_____.



3. 某种蜜蜂的眼睛能够看到平均波长约为 500nm 的光，它是由约 5000 个小眼构成的复眼，小眼一个个密集排放在眼睛的整个表面上. 小眼构造很精巧，顶部有一个透光的圆形集光装置，叫角膜镜；下面连着圆锥形的透明晶体，使得外部入射的光线会聚到圆锥顶点连接的感光细胞上（入射进入一个小眼的光线不会透过锥壁进入其他小眼），从而造成一个“影像点”（像素）；所有小眼的影像点就拼成了一个完整的像. 若将复眼看作球面圆锥，球面半径 r 等于 1.5mm，则蜜蜂小眼角膜镜的最佳直径 d 约为**（请给出两位有效数字）**_____.

考场号____ 座位号____ 密封线
中学____ 姓名____ 密封线
市____

4．开路电压U_{O}与短路电流I_{SC}是半导体 p-n 结光电池的两个重要技术指标，试给出两者之间的关系表达式：$U_{\mathrm{O}}=$_____，式中各符号代表的物理量分别为_____

_____

_____.

----------以下为计算题----------

得分	
评阅人	

二．（15 分）天体或微观系统的运动可借助计算机动态模拟软件直观显示，这涉及几何尺寸的按比例缩放．为使显示的运动对缩放后的系统而言是实际可发生的，运行时间也应缩放．

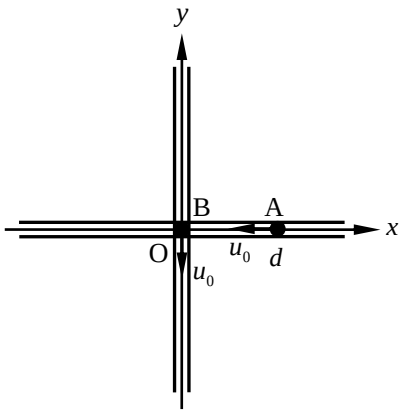
1．在牛顿力学框架中，设质点在力场$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}\right)$中作轨道运动，且有$\boldsymbol{F}\left(\alpha\boldsymbol{r}\right)=\alpha^{k}\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}\right)$，$k$为常数，$\boldsymbol{r}$为位矢．若几何尺寸按比率$\alpha$缩放显示，试确定运行时间的缩放率$\beta$．

2．由此证明，行星绕太阳轨道运动周期的平方与轨道几何尺寸的立方成正比．

密 封 线

得分	
评阅人	

三.（20 分）在水平面上有两根垂直相交内壁光滑的连通细管，管内放置两个质量均为m、电荷量均为q的同号带电质点 A 和 B．初始时质点 A 至两管交点 O 的距离为d，质点 B 位于交点 O 处，速度相互垂直，方向如图所示，大小均为$u_0=\sqrt{\dfrac{kq^2}{md}}$，$k$为静电力常量．求在以后运动中，它们之间的最小距离．



密 封 线

得分	
评阅人	

四.（10 分）热机和热泵利用物质热力学循环实现相反功能：前者从高温处吸热，将部分热量转化为功对外输出，其余向低温处放出；后者依靠外界输入功，从低温处吸热，连同外界做功转化成的热量一起排向高温处．按热力学第二定律，无论热机还是热泵，若工作物质循环过程中只与温度为T_1、T_2的两个热源接触，则吸收的热量Q_1、Q_2满足不等式 $\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\le 0$，其中热量可正可负，分别表示从热源吸热与向热源放热．

某供暖设备原本以温度T_0的锅炉释放的热量向房间直接供暖，使室内温度保持恒温T_1，高于户外温度T_2．为提高能源利用率，拟在利用原有能源的基础上采用上述机器改进供暖方案．与直接供暖相比，能耗下降率的理论极限可达多少？

得分	
评阅人	

五.（15 分）磁场会影响电子的运动，从而使存在磁场时的电流与电压之间的关系偏离通常我们熟悉的欧姆定律，本题所要研究的问题即为一例.

设 xOy 平面内有面密度（单位面积中的电子数）为 n 的二维电子气. 平面内沿 x 轴正方向存在均匀电场 $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{i}$（$\boldsymbol{i}$ 为 x 轴正方向单位矢量），垂直于平面的 z 方向存在均匀磁场，磁感应强度为 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$（$\boldsymbol{k}$ 为 z 轴正方向单位矢量）. 已知平面内的电子运动受到的散射阻力与速度 $\boldsymbol{v}$ 成正比，可等效地用一时间参量 τ 描述为 $\frac{-m\boldsymbol{v}}{\tau}$，$m$ 为电子质量. 试求在稳态沿 x 和 y 方向的电流密度（大小为垂直于电流方向单位长度上的电流）j_x 和 j_y，将结果用电子电荷量绝对值 e、n、m、E、τ 及 ω 表出，$\omega=\frac{eB}{m}$.

得分	
评阅人	

六.（25 分）如图 A 所示的两块平行薄板，由理想导体构成，板间距为 d，y 方向无限延伸．两板间沿垂直于 y 方向传播的电磁波沿 x 正向以行波形式传播，其电场可表述为

$E = E_0 \sin(2\pi z/\lambda_z)\sin(2\pi x/\lambda_x - \omega t)$．式中 ω 为圆频率，t 为时间，λ_z，λ_x 为待定参量．这种结构的组合可以制成实用的微波发射天线，用来代替传统的巨大抛物面天线，可以大幅度降低天线成本.

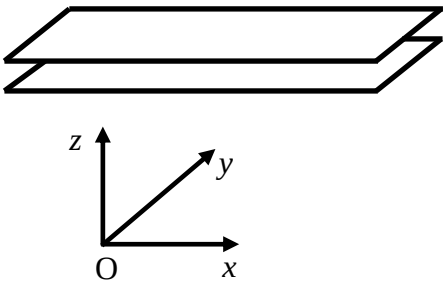


图 A

1. 证明 λ_z 只能取如下值：

$$\lambda_z = 2d/m, \quad m = 1,2,3\ldots$$

2. 当 m=1 时，求 λ_x .

3. 如将一系列板间距相等而长度不等的理想导体板相对于沿 y 方向无限延伸的线状波源（与纸面交于 O 点）平行对称叠排，板的右端对齐，而板的长度有一定分布，（此结构与纸面相交的截面图如图 B 所示）则在这一结构的右端可输出沿 x 方向传播的平面电磁波．试给出满足这一要求的板堆在 xOz 截面内左侧边缘(如图 B 所示)所满足的曲线方程.（取 m=1，已知波源到板堆左端的水平距离为 L）。

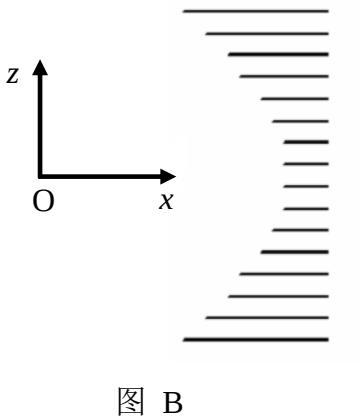


图 B

密 封 线

密 封 线

得分	
评阅人	

七.（35 分）1.在经典的氢原子模型中，电子围绕原子核做圆周运动，电子的向心力来自于核电场的作用．可是，经典的电磁理论表明电子做加速运动会发射电磁波，其发射功率可表示为(拉莫尔公式)：

$P=\dfrac{e^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}$，其中 a 为电子加速度，c 为真空光速，$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\pi k}=8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$，电子电荷量绝对值 $e=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$．若不考虑相对论效应，试估计在经典模型中氢原子的寿命 τ．（实验测得氢原子的结合能是 E_B=13.6eV，电子静止质量 m_0=$9.109\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$）

2.带电粒子加速后发射电磁波也有重要应用价值，当代科学研究中应用广泛的同步辐射即是由以接近光速运动的电子在磁场中作曲线运动改变运动方向时所产生的电磁辐射．电子存储环是同步辐射光源装置的核心，存储环中的电子束团通过偏转磁铁等装置产生高性能的同步辐射光．上海光源是近年来建成的第三代同步辐射光源，它的部分工作参数如下：环内电子能量 E=3.50GeV，电子束团流强 I=300mA，周长 L=432m，单元数（装有偏转磁铁的弯道数量）N=20，偏转磁铁磁场的磁感应强度 B=1.27T．试计算该设备平均每个出光口的辐射总功率 P_{O}．

（在电子接近光速时，若动质量不变，牛顿第二定律仍然成立，但拉莫尔公式不再适用，相应的公式变化为 $P=\dfrac{e^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}\times\gamma^4$，其中 $\gamma=\dfrac{E}{m_0c^2}$，E 为电子总能量，m_0c^2 为电子的静止能量.）

3.由于存储环内的电子速度接近光速，所以同步辐射是一个沿着电子轨道的切线方向的光锥，光锥的半张角为 $1/\gamma$，由此可见电子的能量越高，方向性越好．试计算：上述设备中，在辐射方向上某点接收到的单个电子产生的辐射持续时间 ΔT．

（本题结果均请以三位有效数字表示.）

密 封 线

密 封 线

第 26 届全国中学生物理竞赛决赛参考评分标准

一、本题共 20 分。
第 1、2 题每题填对均得 5 分；第三题只要答案在 27~30μm 之间即得 5 分，否则 0 分。第 4 题第一空格占 4 分，第二空格占 1 分。

二、本题共 15 分
第 1 小题占 10 分。正确得出（6）式得 10 分，其中正确得出（5）式得 5 分。
第 2 小题占 5 分。正确得出（9）式得 5 分。

三、本题共 20 分
正确得出（3）式得 10 分；（4）、（5）、（6）、（7）与（8）式各占 2 分。

四、本题共 10 分
其中（4）式占 4 分。

五、本题共 15 分
其中（1）式与（2）式各占 2 分；$a_x=0$, $a_y=0$ 各占 2 分；（3）式与（4）式各占 1 分；（5）（6）式共占 3 分；（7）式与（8）式各占 1 分；

六、本题共 25 分
第 1 小题 5 分，第 2 小题 10 分，第 3 小题 10 分；
其中（2）式占 5 分；（5）式占 6 分；（6）式占 4 分；（8）式占 6 分；

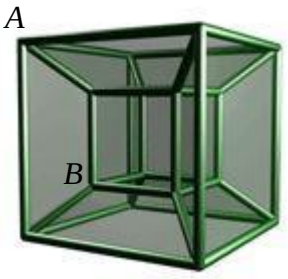
七、本题共 35 分
第 1 小题 10 分，其中（4）（5）式各占 1 分；
第 2 小题 12 分，其中（6）与（7）式各占 1 分；（8）式占 6 分；
第 3 小题 13 分；其中（4）式占 5 分。

一．填空题（每题 5 分，共 20 分）：

1. 某光滑曲面由曲线 $y=f\left(x\right)$ 绕竖直 y 轴旋转一周形成. 一自然半径 a、质量 m、劲度系数 k 的弹性圆环置于该曲面之上，能水平静止于任意高度处，则曲线方程为_____.

参考解答： $y=C-\dfrac{2\pi^2k}{mg}\left(x-a\right)^2$（$C$ 为任意常数）.

2．如图所示的电阻框架为四维空间中的超立方体在三维空间中投影的模型（可视为内外两个立方体框架，对应顶点互相连接起来），若该结构中每条棱均由电阻为 R 的材料构成，则 AB 节点间的等效电阻为_____.



参考解答： $\dfrac{7}{12}R$.

3．某种蜜蜂的眼睛能够看到平均波长约为 500nm 的光，它是由约 5000 个小眼构成的复眼，小眼一个个密集排放在眼睛的整个表面上．小眼构造很精巧，顶部有一个透光的圆形集光装置，叫角膜镜；下面连着圆锥形的透明晶体，使得外部入射的光线会聚到圆锥顶点连接的感光细胞上（入射进入一个小眼的光线不会透过锥壁进入其他小眼），从而造成一个“影像点”（像素）；所有小眼的影像点就拼成了一个完整的像．若将复眼看作球面圆锥，球面半径 r 等于 1.5mm，则蜜蜂小眼角膜镜的最佳直径 d 约为**（请给出两位有效数字）**_____.

参考解答： 30 μm .

4．开路电压 U_{O} 与短路电流 I_{SC} 是半导体 p-n 结光电池的两个重要技术指标，试给出两者之间的关系表达式：$U_{\mathrm{O}}=$_____，式中各符号代表的物理量分别为_____.

参考解答：

$U_{\mathrm{O}}=\dfrac{kT}{e}\ln\left(\dfrac{I_{\mathrm{SC}}}{I_{\mathrm{S}}}+1\right)$，式中 e 为电子电荷量的绝对值，k 为玻尔兹曼常量，T 为绝对温度，I_{S} 为 p-n 结反向饱和电流.

二.（15 分）天体或微观系统的运动可借助计算机动态模拟软件直观显示，这涉及几何尺寸的按比例缩放．为使显示的运动对缩放后的系统而言是实际可发生的，运行时间也应缩放．

1. 在牛顿力学框架中，设质点在力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 中作轨道运动，且有 $\boldsymbol{F}(\alpha\boldsymbol{r})=\alpha^k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$，$k$ 为常数，$\boldsymbol{r}$ 为位矢．若几何尺寸按比率 α 缩放显示，确定运行时间的缩放率 β．

2．由此证明，行星绕太阳轨道运动周期的平方与轨道几何尺寸的立方成正比．

参考解答：

1．设位矢、时间缩放为 $\boldsymbol{r}'=\alpha\boldsymbol{r}$ 、 $t'=\beta t$ ，故速度、加速度满足关系

$$\boldsymbol{v}'=\lim_{\Delta t'\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}'}{\Delta t'}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{v}\ , \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}'=\lim_{\Delta t'\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}'}{\Delta t'}=\frac{\alpha}{\beta^2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\alpha}{\beta^2}\boldsymbol{a}\ . \tag{2}$$

缩放前后质点运动均满足牛顿运动方程，即

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\ , \tag{3}$$

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\ . \tag{4}$$

利用(2)式及 $\boldsymbol{F}(\alpha\boldsymbol{r})=\alpha^k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$，(4)式化为

$$m\boldsymbol{a}=\alpha^{k-1}\beta^2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\ . \tag{5}$$

对照(3)式，得

$$\beta=\alpha^{\frac{1-k}{2}}\ . \tag{6}$$

2．万有引力场 $k=-2$，设想轨道尺寸按

$$l'=\alpha l \tag{7}$$

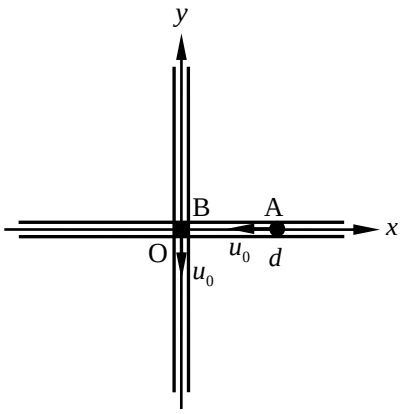
缩放，则周期按

$$\tau'=\beta\tau=\alpha^{3/2}\tau \tag{8}$$

缩放，故有

$$\frac{\tau'^2}{l'^3}=\frac{\tau^2}{l^3}\ . \tag{9}$$

三.（20 分）在水平面上有两根垂直相交的内壁光滑连通细管，管内放置两个质量均为 m、电荷量均为 q 的同号带电质点 A 和 B. 初始时质点 A 至两管交点 O 的距离为 d，质点 B 位于交点 O 处，速度相互垂直，方向如图所示，大小均为 $u_0=\sqrt{\dfrac{kq^2}{md}}$，$k$ 为静电力常量. 求在以后运动中，它们之间的最小距离.



参考解答：

两质点的相对位矢为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$，记其单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{r}/r$. 由于质点约束在管内运动，所受合力必定沿运动方向，即为静电力沿运动方向的分力. 两质点运动方程

$$\begin{cases} m\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}=-\dfrac{kq^2}{r^2}\left(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{i} \\ m\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}}=\dfrac{kq^2}{r^2}\left(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{j} \end{cases}, \tag{1}$$

相减可得

$$m\boldsymbol{a}=\frac{kq^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}$ 为 B 相对 A 的加速度. (2)式表明，B 相对 A 的运动即力心固定之库仑势场中质点 m 的运动，其电势能为：

$$U=\frac{kq^2}{r}. \tag{3}$$

中心力场中运动质点的角动量、能量守恒. 此处角动量与能量均应为 B 相对 A 运动的值，可由初始条件定出：

$$L=\left|-md\boldsymbol{i}\times\left(-u_0\boldsymbol{j}+u_0\boldsymbol{i}\right)\right|=md\sqrt{\frac{kq^2}{md}}, \tag{4}$$

$$E=\frac{1}{2}m\left(-u_0\boldsymbol{j}+u_0\boldsymbol{i}\right)^2+\frac{kq^2}{d}=\frac{2kq^2}{d}. \tag{5}$$

所求量即近力心点到力心的距离 r_{m}，该点速度 u_{m} 必与矢径 $r_{\mathrm{m}}\boldsymbol{e}_r$ 垂直，故有

$$mr_{\mathrm{m}}u_{\mathrm{m}}=md\sqrt{\frac{kq^2}{md}}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}mu_{\mathrm{m}}^2+\frac{kq^2}{r_{\mathrm{m}}}=\frac{2kq^2}{d}. \tag{7}$$

从上两式解得

$$r_{\mathrm{m}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} d \ . \tag{8}$$

四.（10 分）热机和热泵利用物质热力学循环实现相反功能：前者从高温处吸热，将部分热量转化为功对外输出，其余向低温处放出；后者依靠外界输入功，从低温处吸热，连同外界做功转化成的热量一起排向高温处．按热力学第二定律，无论热机还是热泵，若工作物质循环过程中只与温度为T_1、T_2的两个热源接触，则吸收的热量Q_1、Q_2满足不等式 $\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\le 0$，其中热量可正可负，分别表示从热源吸热与向热源放热．

某供暖设备原本以温度T_0的锅炉释放的热量向房间直接供暖，使室内温度保持恒温T_1，高于户外温度T_2．为提高能源利用率，拟在利用原有能源的基础上采用上述机器改进供暖方案．与直接供暖相比，能耗下降率的理论极限可达多少？

参考解答：

为方便表述，以下热量均用绝对值表示．

可以采用热机热泵联合供暖方案：利用热机从锅炉吸收热量，转化为功；此功驱动热泵，从户外吸热，向室内放热．

热机的高温热源为锅炉，低温热源可选室内或户外环境．以室内为例，设热机从锅炉吸热Q_0，向室内放热Q_{10}，则有

$$\frac{Q_0}{T_0}-\frac{Q_{10}}{T_1}\le 0\,. \tag{1}$$

热泵的高、低温热源分别为室内、户外环境．设热泵从户外吸热Q_2，向室内放热Q_{12}，则有

$$-\frac{Q_{12}}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\le 0\,. \tag{2}$$

通过热机、热泵联合循环工作，室内获得的总热量为

$$Q_1=Q_{10}+Q_{12}\,. \tag{3}$$

将(1)、(2)两式相加，得

$$\frac{Q_0}{T_0}+\frac{Q_2}{T_2}-\frac{Q_1}{T_1}\le 0\,. \tag{4}$$

若热机以户外环境为低温热源，同理可得上式．

能量守恒定律给出

$$Q_1=Q_0+Q_2\,. \tag{5}$$

直接供暖时，给室内供热Q_1，锅炉所释放的热量为

$$Q_0' = Q_1 . \tag{6}$$

联立(4)、(5)式，可得热机热泵供暖锅炉释放的热量

$$Q_0 \geq \frac{T_0\left(T_1 - T_2\right)}{T_1\left(T_0 - T_2\right)} Q_1 . \tag{7}$$

成本的下降率为

$$\frac{Q_0' - Q_0}{Q_0'} \leq \frac{T_2\left(T_0 - T_1\right)}{T_1\left(T_0 - T_2\right)} . \tag{8}$$

理论极限为上式取等号.

五.（15 分）磁场会影响电子的运动，从而使存在磁场时的电流与电压之间的关系偏离通常我们熟悉的欧姆定律，本题所要研究的问题即为一例.

设 xOy 平面内有面密度（单位面积中的电子数）为 n 的二维电子气．平面内沿 x 轴正方向存在均匀电场 $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{i}$（$\boldsymbol{i}$ 为 x 方向单位矢量），垂直于平面的 z 方向存在均匀磁场，磁感应强度为 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$（$\boldsymbol{k}$ 为 z 方向单位矢量）．已知平面内的电子运动受到的散射阻力与速度 $\boldsymbol{v}$ 成正比，可等效地用一时间参量 τ 描述为 $\frac{-m\boldsymbol{v}}{\tau}$，$m$ 为电子质量．试求在稳态沿 x 和 y 方向的电流密度（大小为垂直于电流方向单位长度上的电流）j_x 和 j_y，将结果用电子电荷量绝对值 e、n、m、E、τ 及 ω 表出，$\omega=\frac{eB}{m}$.

参考解答：

列出 x 和 y 方向的二维电子的牛顿方程如下：

$$ma_x=-eE-ev_yB-\frac{mv_x}{\tau}, \tag{1}$$

$$ma_y=ev_xB-\frac{mv_y}{\tau}. \tag{2}$$

在稳态，$\boldsymbol{v}$ 不随时间变化，电子无加速度，$a_x=a_y=0$．因此由(2)式得

$$v_y=\omega\tau v_x, \tag{3}$$

代入(1)式得

$$v_x=-\frac{e\tau E}{m\left(1+\omega^2\tau^2\right)}, \tag{4}$$

根据定义，有

$$j_x=\frac{ne^2\tau E}{m\left(1+\omega^2\tau^2\right)}, \tag{5}$$

$$j_y=\frac{ne^2\omega\tau^2 E}{m\left(1+\omega^2\tau^2\right)}, \tag{6}$$

可见在垂直于电场的方向也产生电流.

六.（25 分）如图 A 所示的两块平行薄板，由理想导体构成，板间距为 d，y 方向无限延伸．两板间沿垂直于 y 方向传播的电磁波沿 x 正向以行波形式传播，其电场可表述为 $E=E_0\sin(2\pi z/\lambda_z)\sin(2\pi x/\lambda_x-\omega t)$．式中 ω 为圆频率，t 为时间，λ_z，λ_x 为待定参量．这种结构的组合可以制成实用的微波发射天线，用来代替传统的巨大抛物面天线，可以大幅度降低天线成本．

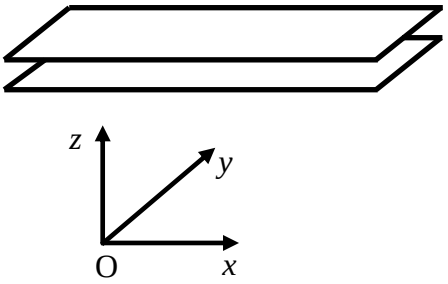


图 A

1. 证明 λ_z 只能取如下值：

$$\lambda_z=2d/m,\quad m=1,2,3\ldots$$

2. 当 m=1 时，求 λ_x．

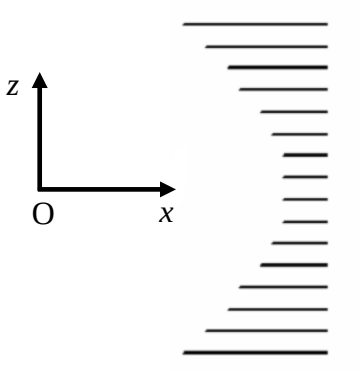


图 B

3. 如将一系列板间距相等而长度不等的导体板相对于沿 y 方向无限延伸的线状波源（与纸面交于 O 点）平行对称叠排，板的右端对齐，而板的长度有一定分布，（此结构与纸面相交的截面图如图 B 所示）则在这一结构的右端可输出沿 x 方向传播的平面电磁波．试给出满足这一要求的板堆在 xOz 截面内左侧边缘(如图 B 所示)所满足的曲线方程．（取 m=1，已知波源到板堆左端的水平距离为 L）。

参考解答：

1. 已知两板间电磁波的电场强度 E 为

$$E=E_0\sin(2\pi z/\lambda_z)\sin(2\pi x/\lambda_x-\omega t)\,. \tag{1}$$

由于是理想导体板，当 z=0 和 d 时应有 E=0．从而

$$2\pi d/\lambda_z=m\pi,\quad \lambda_z=2d/m,\quad m=1,2,3\ldots. \tag{2}$$

2. 对于(1)式描述的电磁波，可以通过

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right], \tag{3}$$

表达为两列平面电磁波的叠加，

$$\begin{cases} E=E_1+E_2 \\ E_1=\dfrac{1}{2}E_0\cos(2\pi x/\lambda_x-2\pi z/\lambda_z-\omega t) \\ E_2=\dfrac{1}{2}E_0\cos(2\pi x/\lambda_x+2\pi z/\lambda_z-\omega t-\pi) \end{cases}, \tag{4}$$

式中两列电磁波的波长 λ_0 都可表达为

$$\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2=\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2=\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2. \tag{5}$$

当 m=1 时， $\lambda_z=2d$ ，

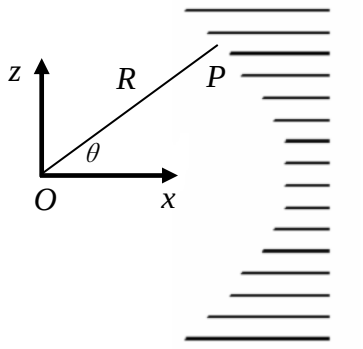
$$\lambda_x=\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi c/\omega\right)^2-\left(1/2d\right)^2}}. \tag{6}$$

3. 因此，x 方向波速 v_x 为

$$v_x=\left(\omega/2\pi\right)\lambda_x=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi c}{\omega d}\right)^2}}. \tag{7}$$

如图所示，设板堆左端任一点 P 到波源的距离 $OP=R$，OP 与水平线交角 θ. 要使得输出为沿水平方向的平面波，应满足，

$$L/c=R/c+(L-R\cos\theta)/v_x, \tag{8}$$



由此可得

$$R=L(1-\sqrt{1-\left(\frac{\pi c}{\omega d}\right)^2})(1-\sqrt{1-\left(\frac{\pi c}{\omega d}\right)^2}\cos\theta). \tag{9}$$

七.（35 分）1.在经典的氢原子模型中，电子围绕原子核做圆周运动，电子的向心力来自于核电场的作用．可是，经典的电磁理论表明电子做加速运动会发射电磁波，其发射功率可表示为(拉莫尔公式)：$P=\dfrac{e^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}$，其中 a 为电子加速度，c 为真空光速，$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\pi k}=8.854\times10^{-12}\,\mathrm{Fm^{-1}}$，电子电荷量绝对值 $e=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$．若不考虑相对论效应，试估计在经典模型中氢原子的寿命 τ．（实验测得氢原子的结合能是 E_B=13.6eV，电子静止质量 m_0=9.109×10^{-31}kg ）

2.带电粒子加速后发射电磁波也有重要应用价值，当代科学研究中应用广泛的同步辐射即是由以接近光速运动的电子在磁场中作曲线运动改变运动方向时所产生的电磁辐射．电子存储环是同步辐射光源装置的核心，存储环中的电子束团通过偏转磁铁等装置产生高性能的同步辐射光．上海光源是近年来建成的第三代同步辐射光源，它的部分工作参数如下：环内电子能量 E=3.50GeV，电子束团流强 I=300mA，周长 L=432m，单元数（装有偏转磁铁的弯道数量）N=20，偏转磁铁磁场的磁感应强度 B=1.27T．试计算该设备平均每个出光口的辐射总功率 P_O．（在电子接近光速时，若动质量不变，牛顿第二定律仍然成立，但拉莫尔公式不再适用，相应的公式变化为 $P=\dfrac{e^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}\times\gamma^4$，其中 $\gamma=\dfrac{E}{m_0c^2}$，E 为电子总能量，m_0c^2 为电子的静止能量.）

3.由于存储环内的电子速度接近光速，所以同步辐射是一个沿着电子轨道的切线方向的光锥，光锥的半张角为 $1/\gamma$，由此可见电子的能量越高，方向性越好．试计算：在上述设备中，观察者在辐射方向上某点接收到的单个电子产生的辐射持续时间 ΔT．

（本题结果均请以三位有效数字表示.）

参考解答 1：

由方程

$$F=ma\,, \tag{1}$$

$$a=\frac{v^2}{r}\,, \tag{2}$$

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\,, \tag{3}$$

可推导出电子的总能量为

$$U=\frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}\,. \tag{4}$$

由条件 $E_B = -U = 13.6\text{eV}$ 推导出氢原子的轨道半径和运动速度分别为：

$$r_0 = 5.29\times10^{-11}\text{m}, \tag{5}$$

$$v_0 = 2.19\times10^{6}\text{m/s}. \tag{6}$$

由拉莫尔公式得初始发射功率

$$P = \frac{e^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0} = \frac{e^6}{96\pi^3c^3\varepsilon_0^3m^2r_0^4}. \tag{7}$$

在微小时间间隔 Δt 中，辐射使电子总能量 U 减少

$$\Delta U = -P\times\Delta t, \tag{8}$$

$$\Delta U = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-\Delta r}-\frac{1}{r}\right) = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\Delta r, \tag{9}$$

其中 Δr 为电子轨道半径的减小量．由此可导出时间和半径 r 的变化方程：

$$\Delta t = \frac{12\pi^2c^3\varepsilon_0^2m^2r^2}{e^4}\Delta r = A\times4\pi r^2\Delta r, \tag{10}$$

其中 $A = \dfrac{3\pi c^3\varepsilon_0^2m^2}{e^4}$.

构造一个半径为 r_0 的球体，则 $4\pi r^2\Delta r$ 即为距离球心为 r 的薄球壳体积，在 r_0 到0 的求和过程中可以计算出球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi r_0^3$. 对应本题情况解出电子轨道从 r_0 减少到 0 所需的时间为

$$\tau = \sum\Delta t = \frac{4\pi^2c^3\varepsilon_0^2m^2r_0^3}{e^4}, \tag{11}$$

带入数据后得：

$$\tau = 1.56\times10^{-11}\text{s}. \tag{12}$$

参考解答 2：

对于高能电子有

$$v \simeq c\,, \tag{1}$$

$$E = mc^2\,, \tag{2}$$

$$a = \frac{v^2}{R}\,, \tag{3}$$

$$F = ecB\,, \tag{4}$$

$$F = ma\,, \tag{5}$$

以上条件可以得出电子的偏转半径：

$$R = \frac{E}{ecB}\,. \tag{6}$$

存储环中的电子数量：

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{I\Delta t}{e}\,, \tag{7}$$

其中 Δt 为电子旋转一圈所花费的时间．由(3)式及辐射条件可得每个电子每圈损失的总能量为（电子在直道上不辐射能量）：

$$E_{\text{turn}} = \frac{e^2a^2\gamma^4}{6\pi c^3\varepsilon_0} \times \frac{2\pi R}{c} = \frac{e^2\gamma^4}{3\varepsilon_0 R}\,. \tag{8}$$

由(7)、(8)式得到存储环中的电子消耗的总功率为：

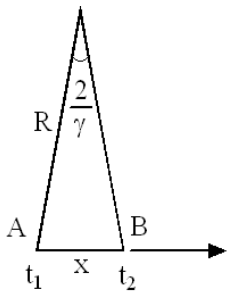
$$P_{\text{total}} = \frac{nE_{\text{turn}}}{\Delta t} = \frac{Ie\gamma^4}{3\varepsilon_0 R} = 4.34\times10^5\,\text{W}\,. \tag{9}$$

出光口的功率为：

$$P_{\text{O}} = \frac{P_{\text{total}}}{N} = 2.17\times10^4\,\text{W}\,. \tag{10}$$

参考解答 3：

在电子轨道上某点的切线方向上的某一点 P 处观察，观察者只能够在一个很短的时间间隔内看到电子发出的辐射，这段时间是电子的速度方向改变圆锥顶角（即 $2/\gamma$）的角度所对应的光到达观察者位置的时间间隔．在这段时间内电子移动的距离为



$$x=\frac{2R}{\gamma}. \qquad (1)$$

令 $\beta=v/c$，则电子在这两点发出的辐射间隔时间为：

$$t_2-t_1=\frac{2R}{\gamma c\beta}. \qquad (2)$$

但在轨道的切线方向的观察者看来，上述时间还要扣除 A 点发射出的光到达 B 点位置所花费的时间

$$t'=\frac{2R}{\gamma c}, \qquad (3)$$

则

$$\Delta T=t_2-t_1-t'. \qquad (4)$$

又

$$\gamma=\frac{mc^2}{m_0c^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (5)$$

由 $1-\beta\to 0$ 可得

$$\frac{2}{\beta}(1-\beta)=\frac{1}{\gamma^2}. \qquad (6)$$

代入(4)式得到

$$\Delta T=\frac{R}{c\gamma^3}. \qquad (7)$$

代入数据得

$$\Delta T=9.51\times10^{-20}\text{s} \qquad (8)$$