用于硅基量子计算的自旋读出射频（RF）反射计

引言

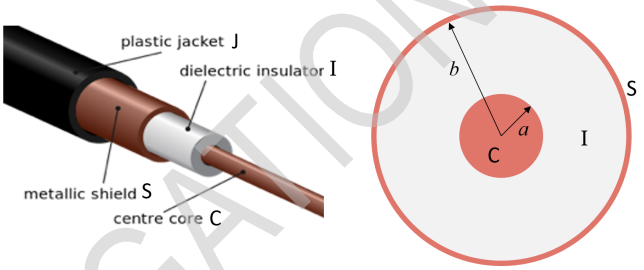
将量子计算发展成为实用的技术是科研和工程研究领域的巨大挑战之一。一个可能的途径是使用时变电磁场调控硅三极管中的单个电子。

在本题中, 我们研究使用射频 (RF) 反射计和单电子三极管来读取硅基量子计算原型机中量子比特的状态。

Part A 和 Part B 是射频电磁波在电缆和传输线中的传输，part C 是关于电磁波的反射条件，part D 引入单电子三极管，part E 和 F 介绍并让你优化反射计的方案。

Part A: 同轴电缆传输线的集总元件模型（2.0 分）

当我们处理直流（DC）或低频信号时，我们往往假设电压是瞬时通过电路的。这个假设只在信号波长远远大于器件尺寸时才成立。当我们使用射频信号时，其动力学行为非常复杂，在模型中我们必须考虑电缆的固有电容和固有电感。下面我们建立一根同轴传输线的模型，模型中传输线是作为波导使用的，并忽略铜的微小电阻和电介质的微小电导。在全题中，我们考虑在同轴电缆中的电磁波的长波极限，使得电场与磁场在电缆中各处都垂直于电缆的轴向（也称为横电磁波模式）。



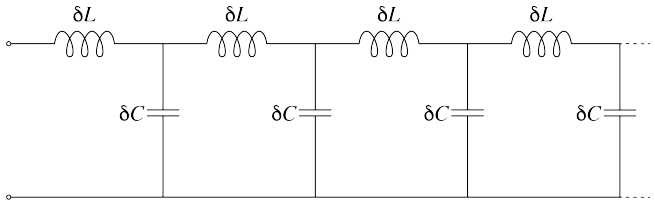
同轴电缆示意图。图中 C –内芯，I - 电介质绝缘层，S - 金属屏蔽层，J - 塑料保护层。

考虑一根同轴电缆，由铜内芯，电介质绝缘层和外部的同轴铜屏蔽层组成。铜内芯的半径为 a，其电阻和磁导率可忽略，电介质绝缘层的无量纲相对介电常数为 ε_{r}，无量纲相对磁导率为 μ_{r}，最外层的同轴铜屏蔽层的内半径为 b。当电磁信号通过同轴电缆传播时，电磁信号被限制在内芯和外屏蔽层之间。

A.1	电磁波在同轴电缆中传播的速率是多少?	0.2pt
A.2	如果长度为 Δx 的同轴电缆的内芯上有电荷 Δq，且外屏蔽层接地，写出在铜内芯和外层屏蔽层之间的电场强度。	0.2pt
A.3	写出单位长度同轴电缆的电容 C_x，你可以考虑长度为 Δx 的一段电缆。	0.3pt
A.4	写出单位长度电缆的电感 L_x。	0.3pt

电缆的集总元件模型由多个小段电缆的电感和电容构建而成，电感假设是内芯的性质，而电容将内芯和屏蔽层联系起来，集总元件模型如下图所示。

DELEGATION PRINT

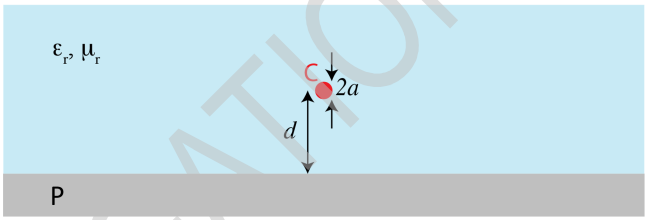


同轴电缆集总元件模型的电路图。

A.5	i. 证明半无限长电缆的阻抗是 $Z_0 = \sqrt{L_x/C_x}$. ii. 假设同轴电缆的阻抗为 $Z_0 = 50\,\Omega$，其中电介质的 $\varepsilon_\mathrm{r} = 4.0$，$\mu_\mathrm{r} = 1.0$，计算 b/a 的值。	1.0pt

Part B: 信号沿着接地平板返回的假想传输线（1.0 分）

另一个假想的传输线如下图所示。信号通过一个半径为 a 的非常细的导线输入，该导线与一个高导电性的接地平板的距离为 $d \gg a$。导线嵌入在无量纲相对介电常数为 ε_r 和无量纲相对磁导率为 μ_r 的材料里。返回电流沿接地平板流动。



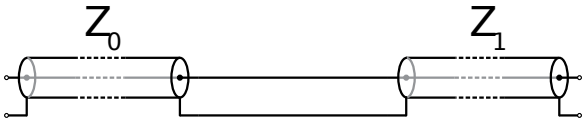
假想传输线示意图。C - 半径为 a 的导线, 与接地导体平板 P 的距离 $d \gg a$。导线 C 嵌入在相对介电常数为 ε_r 和相对磁导率为 μ_r 的材料里。

B.1	求出该假想传输线的特征阻抗的表达式。	1.0pt

Part C: 射频反射计的基础知识 (1.2 分)

电磁波可以在传输线里沿两个相反的方向传播。对每一个传播方向，特性阻抗 Z_0 用来联系电压 V_0 和电流 I_0 的幅度，就像欧姆定律一样，$Z_0 = V_0/I_0$。

考虑两根传输线特征阻抗为 Z_0 和 Z_1 的两段传输线之间的界面，电路图如下所示。



阻抗分别为 Z_0 和 Z_1 的两根传输线连的电路图。界面的尺寸远远小于波长。

当信号 V_i 通过阻抗为 Z_0 的传输线到达界面时，部分透射到第二根传输线中，产生信号 V_t，并在第二根传输线

DELEGATION PRINT

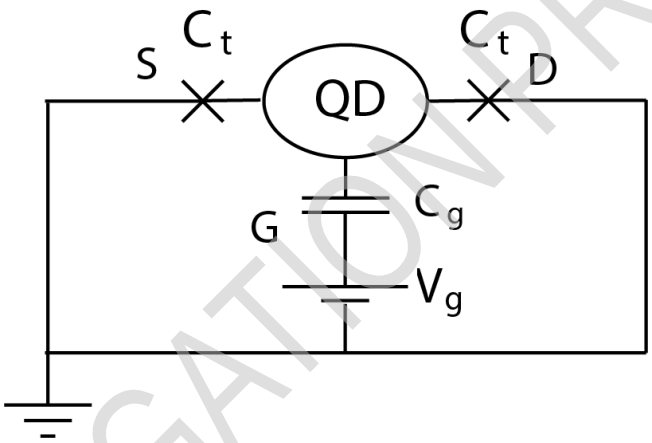
中向前传播。部分信号也可能被反射，在第一个传输线中产生反向传播的信号 V_{r}。

C.1	计算界面处的反射率 $\Gamma = V_{\mathrm{r}}/V_{\mathrm{i}}$。	1.0pt

C.2	什么条件下信号 V_{i} 反射后产生相位变化为 π。	0.2pt

Part D: 单电子三极管 (3.3 分)

单电子三极管（SET）由一个量子点及其附近的几个电极组成。量子点是一个孤立的小导体，电子可以被局域在量子点上。栅极通过电容与量子点相耦合，而另外两个电极—源极和漏极—通过隧道结相连接，由于量子力学效应，电子可以穿过隧道结。SET 的一个简化的电路如图所示。



SET 的电路图表示。QD 是量子点，S 是源极，D 是漏极, G 是栅极。

栅极的电容是 C_g，隧道结的电容 $C_t \ll C_g$。可以认为 C_g 是量子点的总电容。在 Part D 中，源极和漏极保持在零电位，栅极上的电压固定为 V_g。

D.1	考虑 SET 的一个状态，其中量子点包含 n 个电子。 i. 求出量子点（QD）上的电势 φ_n。 ii. 求出把一个额外电子从源极或漏极输送到 QD 上所需要的能量 ΔE_n。	1.5pt

如果 $\Delta E_n < 0$，那么电子将自发隧穿到量子点，直到量子点上的电子数达到 N ($\mathcal{N} > n$)，使得 $\Delta E_{\mathcal{N}} \geq 0$。平衡电子数 $\mathcal{N}$ 和相应的额外能量 $\Delta E_{\mathcal{N}}$ 可以通过选择适当的电压 V_g 来控制。

D.2	通过调节 SET 的栅极电压，求出平衡附加能量所能达到的最大可能值 $E_c = \max \Delta E_{\mathcal{N}}(V_g)$。	0.5pt

如果 $\Delta E_{\mathcal{N}} = 0$，那么电子隧穿不需要额外的能量，SET 处于高导电的 ON 状态。如果 $\Delta E_{\mathcal{N}} > 0$，则 SET 的电导减小 (处于高阻的 OFF 态)。

为了使量子点上的电子数量保持确定，需要满足某些条件。首先，如果源极或漏极中的电子具有足以自发移动到量子点上的热能，那么 ON 和 OFF 状态之间的差异将消失。

DELEGATION PRINT

D.3	求出电子温度满足的条件，使电子不能通过热激发移动到量子点上。	0.5pt

其次，电子隧穿到或隧穿出量子点限制了它们的能级的寿命。这种隧穿可以用隧道结的有效电阻来描述，该隧道结的特征隧穿时间等于量子点通过该结来充电或放电的特征时间。

D.4	i. 利用隧穿结的电容 C_t 和有效电阻 R_t 估计量子点的隧穿时间。 ii. 求出有效电阻 R_t 满足的条件，使得量子点上的电子具有确定的能量，以致于 ON 和 OFF 状态可以明显地区分。	0.8pt

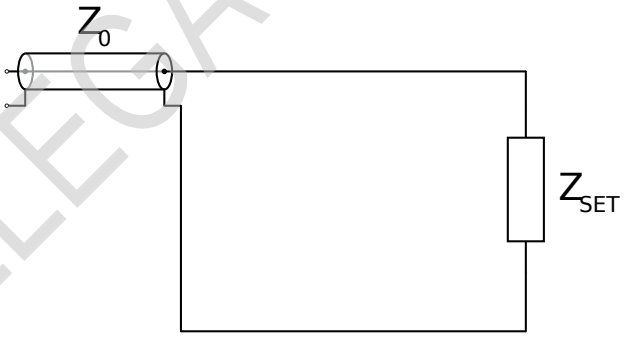
Part E: 用于读出 SET 的状态的 RF 反射计 (1.0 分)

单电子三极管（SET）的状态对附近的量子电路的元件所产生的电位敏感（例如量子比特），状态 ON 和状态 OFF 之间的可区分性提供了一种方法来读出量子计算机所产生的信息。处于 ON 状态的 SET 可以用一个 $R_{\mathrm{ON}} = 100\,\mathrm{k\Omega}$ 的电阻来等效，而在 OFF 状态，我们可以将 SET 看成是一个完美的绝缘体（忽略通过 SET 源极和漏极之间的任何电容）。虽然有可能通过测量对源极输入信号的响应来确定 SET 的状态，但使用 RF 射频反射计来测量反射信号的大小和相位（即确定反射率 Γ ）可以更快地确定 SET 的状态

由于在 ON 和 OFF 状态之间切换，SET 引起的反射率的变化是

$$\Delta\Gamma = |\Gamma_{\mathrm{ON}} - \Gamma_{\mathrm{OFF}}| \ , \tag{1}$$

其中 Γ_{ON} 和 Γ_{OFF} 是两个不同状态下的反射率。

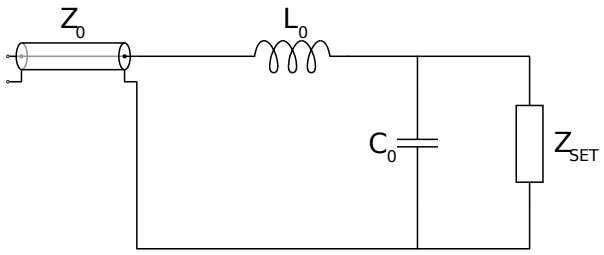


与 SET 连接的传输电缆线的电路图，其中传输电缆线的特性阻抗为 Z_0。

E.1	对一个连接到阻抗为 $50\ \Omega$ 的同轴电缆上的典型 SET，求出导电状态和绝缘状态之间的反射率的变化 $\Delta\Gamma$。	0.2pt

为了增加反射率的变化，从而增加 RF 反射计的灵敏度，可在电路中加入一个电感。同时也考虑由器件几何结构引起的固有电容 $C_0 \approx 0.4\,\mathrm{pF}$。RF 反射计采用的是角频率为 ω_{rf} 的信号。

DELEGATION PRINT



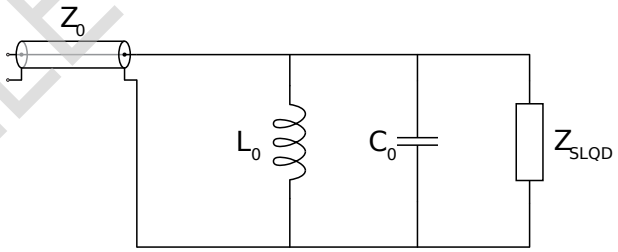
修改后的 SET 电路。

E.2	估算电感 L_0 的值，使得反射率的变化量可高达 1 的量级。数值计算当 $\omega_{\mathrm{rf}}/(2\pi) = 100\,\mathrm{MHz}$ 时 L_0 的估算值，并计算相应的 $\Delta\Gamma$。	0.8pt

Part F: 使用单引线量子点进行电荷探测 (1.5 分)

对于可扩展的量子计算架构，连接到每个量子比特的导线数需要最少。在硅基量子计算中用于电荷探测的单电子三极管（SET）的一种有前途的替代方案 是单引线量子点（SLQD）。在许多方面单引线量子点类似于 SET，但没有源极和漏极引线。栅极是唯一的电极。通过栅极可以控制量子点的电子能级，还可以进行射频（RF）反射测量。

与单电子三极管（SET）类似，单引线量子点（SLQD）也具有 OFF 状态，在 OFF 状态 SLQD 表现为纯绝缘体。不同于 SET，SLQD 的 ON 状态是电容性的，其电容为 C_{q}。为了使 SLQD 的反射率之差 $\Delta\Gamma$ 最大化，构建以下电路。电路的本征寄生电容由电路的几何构型所确定，其值为 $C_0 \approx 0.4\,\mathrm{pF}$。但电感值 L_0 和工作频率可以改变，以优化电路性能。传输线的特性阻抗为 $Z_0 = 50\,\Omega$。



与传输线相连的 SLQD 读出电路的电路图。

F.1	当给定 C_0 和 C_q 时，给出 ω_{rf} 和 $Z_{\mathrm{C}} = \sqrt{L_0/C_0}$，使得 $\Delta\Gamma \sim 1$。	1.0pt

L_0 的最佳值是比较大的，在技术上不总是可行的。因此，可能需要添加电路元件来提高反射计读出电路的灵敏度。

F.2	假设 L_0 的值固定 (因此 Z_C 的值也固定)。画出电路图，标出 SLQD 读出电路中放置添加元件的位置，并具体计算出该元件的参数，使得在不需要大电感的情况下 仍然可以达到 $\Delta\Gamma \sim 1$。	0.5pt

DELEGATION PRINT

源自活跃星系核的 X 射线喷射

简介

活跃的星系核（AGN）是超大质量黑洞，形成星系的中心，通过辐射光和粒子流来发射大量的能量。许多 AGN 的一个特征是喷射出喷射流，喷射流可以通过测量无线电波段的辐射来观察，有时也可以在电磁波谱的其他波段中观察到，包括 X 射线。这些喷射流是大流量的等离子体，以相对论速度运动，长度为 10^{20} m, 即数万光年。喷射流发出的 X 射线主要源自同步辐射，这种同步辐射是由以相对论速度运动的电子，绕着喷射流的磁场回旋造成的。

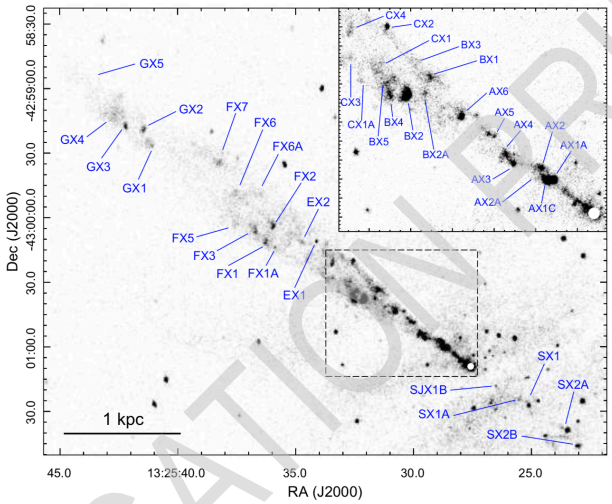


图 1：来自人马座 A AGN 的 X-射线图像。深色区域代表更高强度的 x-射线；在较弱的喷射流背景中的较亮的区域被称为 结 (Snios et al., 2019)

DELEGATION PRINT

A 部分：1D 喷射流的流体模型

喷射流的简单模型假定流动是稳定的并且沿径向远离位于中心的活跃星系核 (AGN), 因而近似为一维，并且喷射流中的等离子体与周围环境处于压强平衡。

喷射流的坐标用距离中心 AGN 的距离 s, 和锥形的开口半径 r 来表示 (参见图 2)。这些距离以 parsecs 为单位，$1\ \mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\ \mathrm{m}$. 假设喷射流的速度沿径向远离中心的 AGN，并且只是 s 的函数。喷射流中的等离子体由电子，质子和一些较重的电离的核组成。每个粒子携带的平均能量，在喷射流参照系中，是 $\epsilon_{\mathrm{av}} = \mu_{\mathrm{pp}}c^2 + h$, 其中 h 是包括所有热动能和势能的项，将用压强 P 和等离子体数密度 n 来表示。

当喷射流流经恒星们，恒星们会失去部分大气层，导致质量注入进喷射流。假定单位时间单位体积注入进喷射流的质量是恒定的，用 α 表示，且假设注入的粒子相对于 AGN 静止。

这个模型被用于人马座 A 的喷射流。人马座 A 是离我们最近的 AGN 之一，因此可以有较高的空间分辨率来观察其喷射流。喷射流携带的总功率估计为 $P_{\mathrm{j}} = 1 \times 10^{36}\ \mathrm{J.s^{-1}}$. 下图描绘了人马座 A 喷射流的几何形状，包含了测量到的喷射流的具体参数。s_1 是喷射流的起始坐标，s_2 是喷射流的终止坐标。在人马座 A 中每个粒子的平均质量是 $\mu_{\mathrm{pp}} = 0.59 m_{\mathrm{p}}$ 并且前述粒子平均能量中的 $h = \frac{13}{4}P/n$ 。在喷射流周围等离子体的压强 $P(s) = 5.7 \times 10^{-12} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{-1.5}\ \mathrm{Pa}$, 其中 $s_0 = 1\ \mathrm{kpc}$.

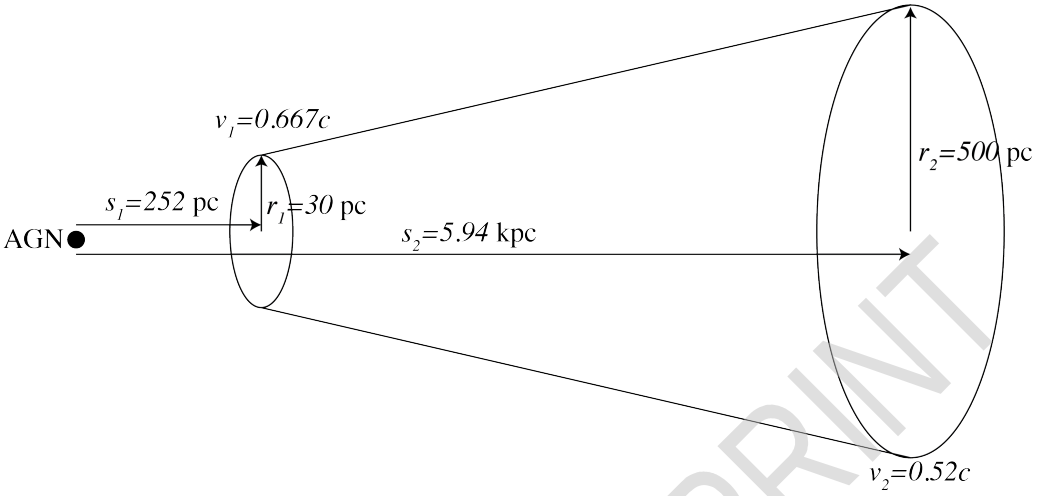


图 2: 人马座 A 喷射流，显示的是其相对于活动星系核（AGN）的几何形状。

喷射流由以下喷射流参数描述，所有这些参数都取决于到 AGN 的距离 s：

- 在 AGN 参照系中（AGN 系）喷射流锥形的开口半径 $r(s)$
- 在 AGN 系，喷射流的横截面积 $A(s)$
- 在 AGN 系，喷射流的速率 $v(s)$
- 在 AGN 系，喷射流的洛伦兹伽玛因子 $\gamma(s)$
- 在喷射流系中，粒子的数密度 $n(s)$

上述这些参数可能被用于你对问题 A1-4 的回答。

A.1	表达出在 AGN 参考系中粒子的数密度 $n'(s)$, 用恰当数密度, $n(s)$ 和上列的其它喷射流参数来表示。恰当数密度是指与喷射流同速运动的参照系中粒子数密度，该参照系我们简称为喷射流系。	0.3pt
A.2	表达出粒子流在距离 AGN 中心 s，截面积为 A 处流过 的通量（单位时间流过给定截面的粒子数）$F_p(s)$。	0.2pt
A.3	写出粒子流入流出喷射流的连续性关系式，用在 s_1 和 s_2 处的喷射流参数，以及人马座喷射流 的总体积 V 和其它必要的参数来表示。	0.5pt
A.4	写出流入和流出喷射流的能量通量间的关系式，用在 s_1 和 s_2 处的喷射流速度，截面积，恰当数密度；以及总体积 V 和其它必要的人马座 A 喷射流参数来表示。	0.6pt

喷射流所带的功率被定义为整体动能能流和热能能流的总和，因此

$$P_{\mathrm{j}}(s) = F_{\mathrm{E}}(s) - \dot{M}c^2 \tag{1}$$

其中 $F_{\mathrm{E}}(s)$ 是在 s 处流过横截面的能量通量, $\dot{M}$ 是在相同距离 s 通过横截面的质量通量。

DELEGATION PRINT

A.5	利用你在前面的部分的答案，表达出 $\frac{dP_j}{ds}$.	0.6pt
A.6	计算在 s_1 处流入人马座 A 喷射流的质量通量 $\dot{M}_1$；和在 s_2 处流出的质量通量 $\dot{M}_2$。	0.4pt
A.7	给出通过人马座 A 喷射流的总动量通量 Π 的表达式，并进行数值计算。	0.5pt
A.8	计算出外界压强作用在人马座 A 喷射流上的总的力 $F_{\rm Pr}$。	0.5pt
A.9	写出期望的 Π 和 $F_{\rm Pr}$ 间的关系；并计算你在 A7 中算出的模型值 Π 与期望值之间的百分比差。	0.2pt

B 部分：超相对论电子的气体

考虑一种超相对论电子气体 ($\gamma \gg 1$), 具有各向同性的速度分布（不依赖于方向）。能量在 ϵ 和 $\epsilon + d\epsilon$ 之间的恰当粒子数密度 用 $f(\epsilon)d\epsilon$ 表示, 其中 ϵ 是每个粒子的能量。还考虑壁上与气体接触的的一段面积 ΔA。

B.1	写出每单位体积电子气体总能量的表达式。	0.2pt
B.2	写出由于与壁的碰撞引起的气体动量沿 z 方向的总变化率 $\Delta p_z/\Delta t$ 的关系式，z 方向垂直于墙壁。	0.8pt
B.3	导出超相对论电子气的状态方程，即，将压强，体积和总内能联系起来。	0.6pt
B.4	导出经历绝热膨胀的超相对论电子气的压强和体积之间的关系。	0.6pt

C 部分：同步辐射

在 AGN 的喷射流中，在强磁场区域有高能电子群。这为同步辐射的高通量发射创造了条件。这些电子通常是非常高能的，以至于可以描述为超相对论情形 $\gamma \gg 1$。

C.1	写出 Ω 的表达式，即给出电子的回旋角频率，用洛伦兹因子 γ 及电子行进方向和磁场 B 之间的角度 ϕ 表示。	0.7pt

当电子由于磁场而加速时，它会发射电磁辐射。在电子瞬间静止的参考系，没有优势的辐射发射方向。一半向前发射，一半向后发射。然而，在观察者的参考系，电子运动速度 $\gamma \gg 1$, 辐射集中在 $\theta \lesssim 1/\gamma$ 前向锥形（因此锥体的总角度为 $2/\gamma$)。当电子绕磁场旋转时，任何观察者只能看到前向锥体扫过视线时的辐射脉冲。

DELEGATION PRINT

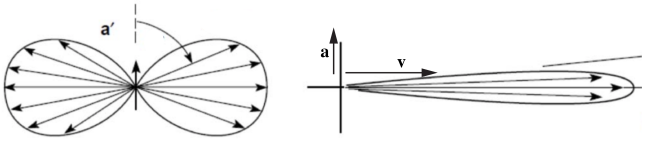


图 3：左图显示了，在电子瞬间静止的参考系，页面中的电子向上加速时，电子辐射功率的分布。右图显示了，在观察者参考系同一电子的辐射功率分布，其中大部分辐射向前锥形发射。在观察者系中，加速度用矢量 **a** ，速度用矢量 **v** 来表示

C.2	某个电子以洛伦兹 因子 γ，与磁场 B 成角度 ϕ 运动，写出它发出的同步辐射脉冲的持续时间 Δt 的表达式。	0.5pt

C.3	由此，估计同步辐射的特征频率 ν_{chr}。	0.3pt

发出的同步辐射总功率是

$$P_{\mathrm{s}} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^4 B^2 \sin^2\phi}{m^4 c^5}\right) E^2 \tag{2}$$

C.4	估计能量 E 的电子通过同步辐射冷却失去能量的时间 τ。	0.2pt

D 部分：AGN 喷射流的同步辐射

AGN 喷射流中的电子能谱通常遵循幂律，其形式为 $f(\epsilon) = \kappa\epsilon^{-p}$, 其中 $f(\epsilon)d\epsilon$ 是能量在 ϵ 和 $\epsilon + d\epsilon$ 之间的粒子数密度。相应的同步辐射光谱取决于电子能谱，而不是单个电子的辐射能谱。这个光谱是

$$j(\nu)d\nu \propto B^{(1+p)/2}\nu^{(1-p)/2}d\nu \ . \tag{3}$$

这里 $j(\nu)d\nu$ 是频率在 ν 和 $\nu + d\nu$ 之间的每单位体积光子的能量。

对人马座 A 喷射流，以及其他喷射流的观察，显示出多结的结构，这些紧致的更加明亮的发射区域叫结。在不同时间对这些结的观察已经显示出一些结的运动和亮度变化。亮度降低的两种可能机制是结中气体的绝热膨胀，以及结中气体中电子的同步辐射冷却。

假设磁场被冻结在喷射流中的等离子体中。考虑任意体积的等离子体，即使包含等离子体的体积改变形状和尺寸，通过界定体积的表面的磁通量必须保持恒定。

D.1	一个球形的结，均匀地向各个方向膨胀，从体积 V_0 变化到 V, 其内最初的均匀磁场 B_0 。求出在膨胀了的结中的磁场 B 。	0.4pt

D.2	写出球形的结因其体积绝热膨胀到 V 时对电子能量密度 $f(\epsilon)$ 的影响，已知体积 V_0 的结具有初始的电子 分布 $f_0(\epsilon) = \kappa_0\epsilon^{-p}$ 其中 是 $f_0(\epsilon)d\epsilon$ 能量 在 ϵ 和 $\epsilon + d\epsilon$ 之间的电子数密度。	1.0pt

D.3	同步辐射冷却如何影响电子的分布？经过一段时间的同步辐射冷却，电子能量的分布作为 ϵ 的函数会更陡峭，更浅或保持不变？考虑两个电子能量 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ 下的情况，用关系式支持你的回答。	0.3pt

DELEGATION PRINT

下表总结了来自两个 AGN，人马座 A（Cen A）和 M87 的喷射流中的结（较明亮区域）的一些观测结果。

AGN	观测之间的时间	结	X 射线的亮度变化	X 射线的光谱变化	其他频段的亮度变化（例如 UV，可见光）
Cen A	15 years	AX1C	-23%	No change	No data
Cen A	15 years	BX2	-15%	No change	No data
M87	5 years	HST-1	-73%	No data	No change
M87	5 years	Knot A	-12%	No data	No change

(Data from Snios et al., 2019a; 2019b.)

D.4 在答题纸中的表格，找出导致每个结亮度减少的更可能的原因，并确定之前哪个或哪些部分支持你的结论。 0.6pt

DELEGATION PRINT

翻转陀螺

Part A (10.0 分)

翻转陀螺指的是一种特殊的陀螺，它被转动后可以自行翻转。我们可以将它模拟为一个半径为 R 的球体，有一端被切除后，加上一根短杆。它具有对应于穿过短杆的轴的旋转对称性，该轴与竖直方向成一夹角 θ。沿着此对称转轴，从其质心 C 到几何中心 O 的直线距离为 αR，如图 1(a) 所示。翻转陀螺与地面的接触点为 A；我们假设地面是平面的，并将其称为地板。在某些特定的几何约束条件下，若在最初时，使它旋转得足够快，则翻转陀螺将会倾斜，导致短杆会越来越向下偏，直到开始以杆为支撑继续旋转，最终停下。

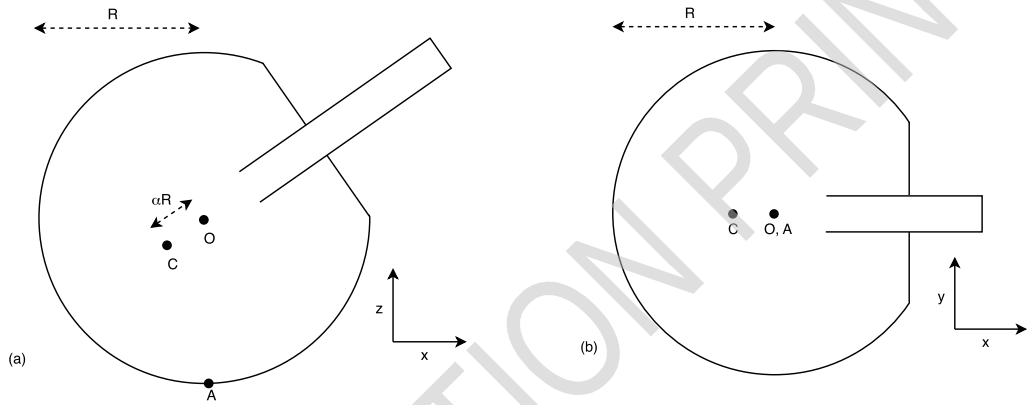


图 1. 翻转陀螺视图 (a) 从侧面，(b) 从上方

以 xyz 代表转动参考系，其 $\hat{\mathbf{z}}$ 轴固定且向上，陀螺的对称轴是在 xz-平面。图 1 所示为 翻转陀螺的侧视图与俯视图。如图 1(b) 所示，当俯视时，陀螺的对称轴是沿着 x 轴。

图 2 所示是陀螺开始转动后，在几个不同阶段的运动情况：

(a) **阶段 I:** 初始刚开始转动后瞬间，角度 $\theta \sim 0$

(b) **阶段 II:** 过后不久，角度已倾斜下偏，角度 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(c) **阶段 III:** 当短杆初次触地，角度 $\theta > \frac{\pi}{2}$

(d) **阶段 IV:** 翻转后，陀螺以杆为支撑做旋转，角度 $\theta \sim \pi$

(e) **阶段 V:** 在最后阶段，陀螺静止停在杆上，$\theta = \pi$.

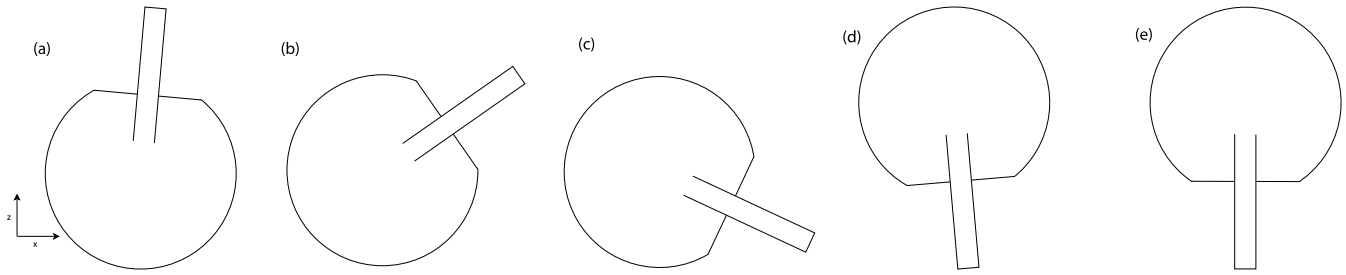


图 2. 阶段 **I** 到 **V** 的陀螺运动，图示为在 xz 平面

以 XYZ 代表惯性参考系，支撑陀螺的地面完全在 XY 平面。参考系 xyz 的定义如前所述，将 XYZ 系统绕 Z

DELEGATION PRINT

轴转动角度 ϕ 后，即与 xyz 重合。由 XYZ 系到 xyz 的转换如图 3(a) 所示，其中 $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{Z}}$。

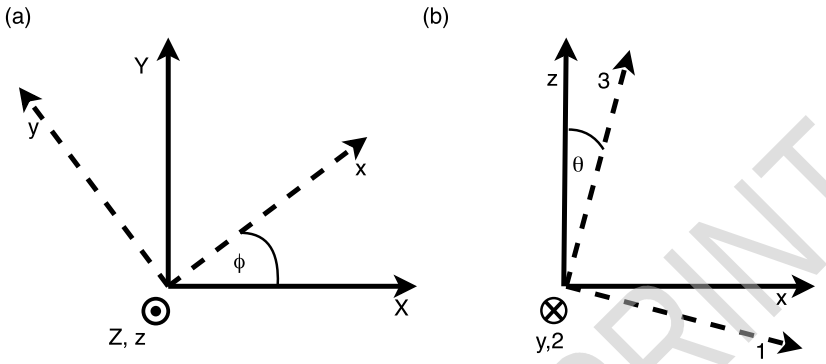


图 3. 两参考系之间的转换：(a) 由 XYZ 到 xyz，(b) 由 xyz 到 123

在 3 维空间的任何转动可用 3 个 欧拉角 (θ, ϕ, ψ) 来描述。惯性系 XYZ, 介乎中间的参考系 xyz 与陀螺参考系 123 之间的转换，可利用 欧拉角 来了解。

在我们对 翻转陀螺 运动的描述中，角度 θ 和 ϕ 分别是 球坐标系中的标准天顶角 (zenith angle) 和方位角 (azimuthal angle)。在 XYZ 系中，它们的定义如下：θ 是竖直轴 Z 到陀螺对称轴的夹角，它代表短杆偏离竖直方向的角度有多大；而 ϕ 则代表陀螺绕 Z 轴转动的角位置，它的定义是 XZ-平面与 O, A, C 所在平面 (即陀螺对称轴的竖直投影) 之间的夹角。

第三个欧拉角 ψ 描述的是陀螺绕其自身对称轴的旋转，即“自转”，其对应的角速度为 $\dot{\psi}$。

旋转的陀螺参考系被定义为一个新的转动参考系 123，此参考系可由 xyz 系绕 $\hat{\mathbf{y}}$ 轴转一角度 θ 而获得：亦即使 $\hat{\mathbf{z}}$ 轴往下“倾斜”一个角度 θ 后，可与陀螺的对称轴 $\hat{\mathbf{3}}$ 重合。由 xyz 系到 123 系的转换如图 3(b) 所示，其中 $\hat{\mathbf{2}} = \hat{\mathbf{y}}$。

注意: 若某个参考系 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 相对于惯性系 $\mathbf{K}$ 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转，则一个向量 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{K}$ 系 与 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 系的时间导数具有以下关系：

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\mathbf{K}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\widetilde{\mathbf{K}}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \tag{1}$$

翻转陀螺的运动是很复杂的，它涉及三个 欧拉角随时间的变化，以及陀螺的平移速度 (或位置) 和陀螺对称轴的运动。所有这些参数互相耦合。因此要解这样的问题，需要标准工具，包括使用牛顿定律写出系统的方程，然后计算机编程用数值方法求解。

在此问题，你会进行第一部份，探究 翻转陀螺的物理并建立方程组。

翻转陀螺和它运动时所接触地面之间的摩擦力是其运动的驱动力。假设 翻转陀螺在点 A 处与地板保持接触，直到短杆接触地板为止。陀螺在点 A 相对于地板的速度为 $\mathbf{v}_A$。陀螺与地板间的滑动摩擦系数为 μ_k，因此摩擦力 $|\mathbf{F_f}| = \mu_k N$, 此处 $\mathbf{F}_f = F_{f,x}\hat{\mathbf{x}} + F_{f,y}\hat{\mathbf{y}}$ 以及 N 为正压力的大小。假设最初只令陀螺自旋，即没有受到任何平移的冲量。

以 m 表示翻转陀螺的质量，I_3 表示绕旋转轴的转动惯量，$I_1 = I_2$ 表示为绕另两互相垂直轴的转动惯量。设 $\mathbf{s}$ 是质心位置向量，且 $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ 是由质心到接触点的向量。

除非特别说明，否则请用 xyz 参考坐标系作答以获得满分。除非另有说明，否则所有力矩和角动量均相对于质心 C。你的答案可用 N 表示。除了 **A.8** 部分，你只需考虑当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时的陀螺, 并且短杆不与地面接触。

DELEGATION PRINT

A.1	求此翻转陀螺所受的总外力 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$。画出此陀螺投射在 xz 和 xy 平面上的受力图 (free body diagram)，在 xy 平面图上指出 $\mathbf{v}_A$ 的方向。	1pt
A.2	求此 翻转陀螺相对于质心的总外力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$。	0.8pt
A.3	在接触条件下，亦即 $(\mathbf{s}+\mathbf{a})\cdot\hat{z}=0$, 证明在 A 的速度没有 z 方向分量，亦即 $\mathbf{v}_A = v_x\hat{\mathbf{x}}+v_y\hat{\mathbf{y}}$。	0.4pt
A.4	求陀螺相对质心 C 旋转的总角速度 ω，以欧拉角的时间导数：$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$, $\dot{\phi}=\frac{d\phi}{dt}$, 和 $\dot{\psi}=\frac{d\psi}{dt}$ 来表示。使用图 3 分别给出在 xyz 参考系以及 123 参考系中的答案。	0.8pt
A.5	用 v_x, v_y 和欧拉角的时间导数、来表示翻转陀螺的旋转总能量。若是用 $\dot{\mathbf{s}}=\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ 来表示答案也可得部分分数。	1pt
A.6	求出相对 z 轴的角动量的变化率。	0.4pt
A.7	什么力抵抗重力作功？求陀螺的能量的瞬时变化率的表示式，用 $\mathbf{v}_A$ 表示。给出造成 A.5 中的能量变化的力和力矩的分量。	1.4pt
A.8	关于陀螺 在图 2 中所示的五个阶段 I 至 V 的运动，在答案纸中定性地描绘以下能量项作为时间的函数：总能量 E_T, 重力势能 U_G, 平移动能 K_T, 旋转动能 K_R。你所描述的能量轴不需要按比例绘制。	2pt
A.9	证明角动量 $\mathbf{L}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在垂直于 $\hat{\mathbf{3}}$ 方向的分量成正比，也就是 $$\mathbf{L}\times\hat{\mathbf{3}}=k(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{3}}),\qquad(2)$$ 以及求正比系数 k.	0.5pt

结合 **A.1**、**A.2** 及接下来的结果可推出正压力 N 的大小以及方程组，和欧拉角、A 点速度的分量 v_x、v_y、对称轴 $\hat{\mathbf{3}}$ 的单位向量，及它们的时间导数有关。此系统是不可积的，但可以用数值方法求解。

运动积分是守恒量，能够减少系统的维度 (也就是需要求解的方程数目，无论用解析或数值方法)。在封闭系统，典型的守恒量包括能量、动量、角动量，它们可明显地简化问题。

A.10	由于耗散力和外力矩的作用，你已经看到翻转陀螺的能量和角动量都不守恒。然而，有一个相关的量，称作 Jellett 积分 λ, 是代表角动量的某一个分量是守恒的，也就是若 $\mathbf{v}$ 是某一个向量，则 $\lambda=\mathbf{L}\cdot\mathbf{v}$ 不随时间变化。 据你对 翻转陀螺的了解以及到目前为止的结果，写出向量 $\mathbf{v}$ 的表达式，并证明 λ 的时间导数为零。	1.7pt

DELEGATION PRINT

Experiment

Asian Physics Olympiad Adelaide 2019

Q1-1

chinese (China)

磁活性流体的静态响应 (10 分)

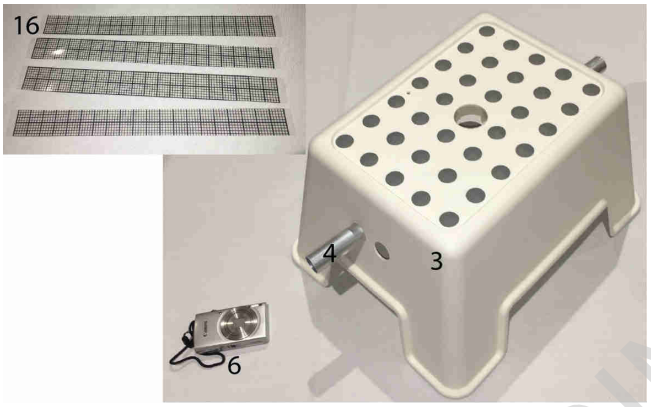
引言

铁磁流体是悬浮在载体溶液中的纳米颗粒磁铁 (Fe_3O_4) 。它们表现出一系列有趣的特性，尤其是在被施加磁场时表现出强烈响应-它们有时被描述为超顺磁体。在本实验中，你将使用静态和动态测试方法，并使用一系列实验测量和评估方法，实证研究铁磁流体的一些特性。实验分为两大部分，但建议按顺序解决问题。

设备清单



DELEGATION PRINT



1. 小玻璃瓶装有置于透明溶液中的铁磁流体。**不得打开瓶子！**
2. 带密封盖的玻璃盒，装有铁磁流体。**不得打开盒盖！**
3. 凳子（可用于挡光与支撑）
4. 金属管，上有用于调节磁铁的位置的螺纹杆（已插入凳子）
5. 可调式木质底座，带尼龙螺栓，用于水平调节
6. 带存储卡的相机
7. 2×N52 磁铁, 14.2 mm × 3.2 mm
8. 1×N42 磁铁, 20.0 mm × 5.0 mm (图中未显示)
9. 500mm 长带螺纹的杆，用作台灯的支杆
10. 垫圈和翼形螺母，用于将支杆连接到凳子上
11. 用电池供电的小台灯，带螺纹安装孔
12. 铝箔，用于导光或遮光
13. 橡皮泥（Blutack），用于粘接器件
14. 绿色楔子
15. 透明的 30 厘米标尺
16. 透明网格条，4 个
17. 木制垫片，2 个
18. 纸卷尺

DELEGATION PRINT

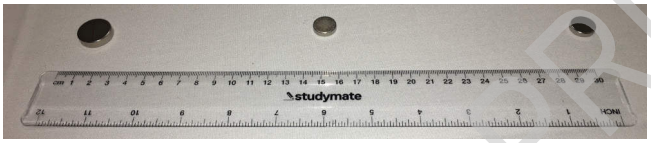
安全事项和重要说明

本实验需使用强磁铁。磁铁吸在一起可能夹伤你的手指，磁铁也可能因撞击而损坏。任何时间都要小心操作磁铁，不用磁铁时把它们隔远。**磁铁损坏不能更换！**

实验中用到两个密封的装有液体的容器。在实验过程中，任何时候都不要打开小玻璃瓶或带密封盖的玻璃盒。**铁磁流体粘在玻璃盒壁上将很难看清内部的现象，因此，如无必要不要倾斜！**

小台灯是用电池的。如果需要，可要求**一个**额外的电池。

如果将磁铁靠近铁磁流体超过 10 秒，会因为残余磁化以及与周围流体的相互作用，使得流体表现有所不同。虽然你的实验仍然可以进行，但可能更难以看到正确的效应。



当你存放磁铁时，请确保它们相距足够远，以免它们咬合在一起。它们相隔距离必须至少是上图所示那么远。

Part A：静态测试 (1.6 分)

这一部分通过测量铁磁流体对磁场的静态响应研究铁磁流体的性质。

磁相互作用：对铁磁流体施加力

小玻璃瓶包含一团铁磁流体，它被未知的流体包围，且互不相溶。铁磁流体具有密度 $1.21 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$，磁化率 $\chi = 2.64$。

铁磁流体对磁场 **B** 有响应，单位体积产生感应磁矩 $m = \frac{\chi B}{\mu_0}$。

圆柱形磁铁轴上的磁场大约是

$$B_z = \frac{B_r}{2}\left(\frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right) \ , \tag{1}$$

其中 z 是到磁铁表面的距离，l 是它的厚度，a 是它的半径，B_r 是剩磁的磁感应强度，这个剩磁强度取决于磁铁材料。对于大磁铁 (由 N42 制成的) $B_r = 1.3\,\mathrm{T}$，对于小磁铁 (由 N52 制成的) $B_r = 1.4\,\mathrm{T}$。

作用于单位体积铁磁流体上的沿 z 方向（沿着磁体的磁化方向）上的力取为

$$\frac{f}{V} = \frac{\chi B_z \frac{dB_z}{dz}}{2\mu_0} \ . \tag{2}$$

用整体磁场来计算太繁琐。在这个部分你可以使用偶极近似来计算铁磁流体上的力。在这个近似下沿 z 方向单位体积上的力是

$$\frac{f}{V} = -\frac{3\chi B_r^2 a^4 l^2}{8\mu_0 z^7} \tag{3}$$

DELEGATION PRINT

使穿过凳子的铝管上的螺纹杆的平的端面朝下。你可以旋转铝管以实现这一点–注意旋转铝管时螺纹杆不要碰到其它地方。

用橡皮泥将玻璃瓶侧向粘到楔子厚边缘的顶部。



Part A 中磁铁（大）固定在螺纹杆上的方式



Part A 中瓶子的固定方式

DELEGATION PRINT

A.1	找到大磁铁的位置，使得铁磁流体正好能悬浮在清澈的未知流体中，并在答题纸上记录距离 z 以及它的不确定度。实现完美平衡可能很困难，因此只能尽量使铁磁流体稳定悬浮，然后估算距离及其不确定度。 在答题纸上画出你是如何测量距离的示意图。 注意有时铁磁流体看上去分成两团，一团磁性，一团飘浮。这通常是因为瓶中有少量空气。你可以利用磁铁将磁性团移到瓶中一处干净的地方，再提升它。	0.8pt

A.2	使用测出的距离和其他任何需要的测量值，计算铁磁流体密度和周围透明流体密度之间的差异，包括其不确定度。	0.8pt

Part B: 磁相互作用：铁磁流体的表面张力 (1.2 分)

铁磁流体在三个能量的影响下移动：重力势能，表面张力相关的表面能，以及磁能。

使用其中一个磁铁，观察当磁铁非常靠近瓶子时的现象。铁磁流体中会出现尖刺。这是由于垂直磁场引起不稳定性，当重力-表面张力-磁场作用下产生的波的有效频率变为虚数时发生的。色散关系是

$$\omega^2 = \frac{gk\Delta\rho}{\rho_1+\rho_2} + \frac{\sigma k^3}{\rho_1+\rho_2} - \frac{k^2\mu_0 M_0^2}{1+(1+\chi)^{-1}}, \tag{4}$$

其中 σ 是铁磁流体-清澈流体界面处铁磁流体的表面张力系数，ρ_1 是铁磁流体的密度，ρ_2 是清澈流体的密度，$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$，$M_0$ 是铁磁流体的磁化强度，k 是波数。

当 $\omega^2 = 0$ 和 $\frac{\partial\omega^2}{\partial k} = 0$ 时，可得到表面张力系数与密度差以及流体表面受到扰动**即将出现不稳定性时**的有效波长之间的关系，其关系式为

$$\sigma = \frac{g\Delta\rho\lambda^2}{4\pi^2}, \tag{5}$$

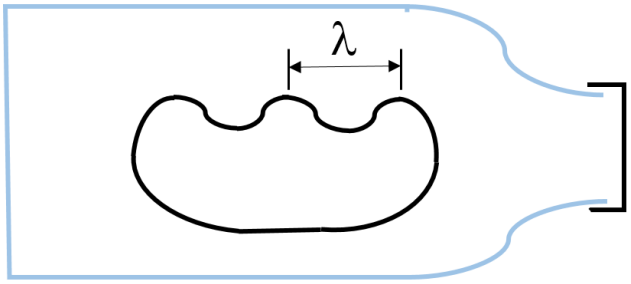
其中 λ 是当磁化强度达到不稳定临界时，相邻两个尖刺的中心之间的距离。



Part B 的磁铁和螺纹杆

改变螺纹杆的方向（最简单的办法是旋转铝管并调节螺纹杆的位置），使得磁铁正对着凳子上方的孔，并位于孔口的下方，从而可以升高和降低磁铁。

DELEGATION PRINT



B.1	使用玻璃瓶，测量不稳定刚刚开始出现时（尖刺刚刚开始形成）的距离 z_{crit}。使用网格条或其他方法，测量铁磁流体中尖刺的间距 λ，并记录下来。估算两个测量结果的不确定度。 **重要提示：**如果用磁铁将液体牢固地吸在玻璃壁上，它会粘在上面，使测量变得困难。如果发生这种情况，可以用磁铁将液体从粘着的区域吸走，并使用瓶子的其它地方进行测量。	0.6pt

B.2	求出铁磁流体在透明流体中的表面张力系数及其不确定度。	0.6pt

Part C: 光学表面的特征：无尖刺状态 (4.1 分)

当施加的磁场低于临界值时，流体表面会产生变形，以近似平衡磁和重力势能。在下面部分中，我们将磁铁与流体相距足够远，使流体中的磁场非常接近磁偶极场。

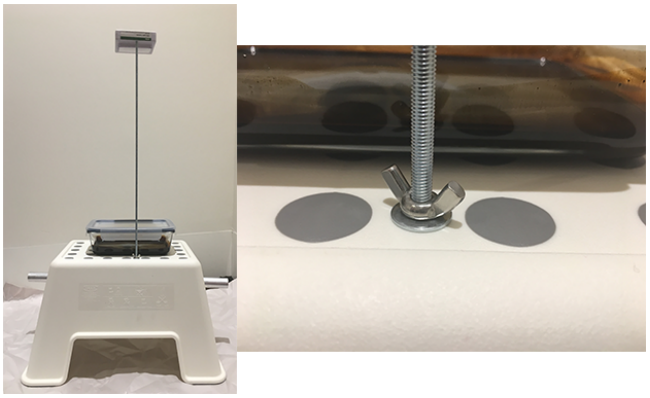
将流体表面看作为近似球面镜，就可以用光学方法测量其表面变形。变形表面中心的有效半径遵循幂律，$R = \alpha z^n$，其中 α 是与材料有关的常量，z 是磁铁与未受干扰处的流体表面的距离。

首先，我们需要校准带磁铁的螺纹杆。

C.1	使用你的设备，尽可能精确地确定拧一圈螺纹杆时 z 的变化，并评估其不确定度。记录你使用的测量值并绘制你的实验装置示意图。	0.6pt

将铁磁流体玻璃盒放在凳子上，使凳子中心的孔位于玻璃盒中心的下方。**注意在实验过程中不得打开塑料盒的密封盖。**将两个小的磁铁中的一个放在螺纹杆上面。

将小台灯穿在长杆上，并使用垫圈和蝶形螺母将长杆固定到凳子上的孔中（见图）。



DELEGATION PRINT

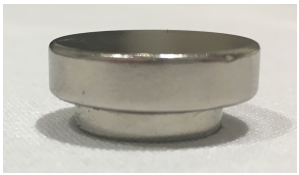
C.2	利用球面镜的曲率半径 R 和球面镜放大倍数 M 的关系 $R=\frac{2lM}{1-M}$，其中 l 是物距，测量并绘出合适的图确定上述关系中的常数 n。评估答案的不确定度。	3.5pt

DELEGATION PRINT

Part D: 尖刺表面的特征：尖刺形成和消失 (3.1 分)

在较强的磁场下，表面将经历不稳定性并且形成尖刺，与玻璃瓶中所观察到的类似。

D.1 使用叠在一起的小的磁铁和大的磁铁，以及由不稳定性理论给出的 $\sigma = \frac{g\rho\lambda^2}{4\pi^2}$，确定铁磁流体在空气界面处的表面张力系数。 0.5pt



D.2 将磁铁放在距离表面足够远的地方，开始明显没有尖刺。使磁铁逐渐接近流体，记录每个尖刺形成时的距离读数。再逐渐使磁铁远离，读取每个尖刺消失时的距离读数。评估测量数据的不确定度。 1.0pt

D.3 绘制尖刺数量相对磁铁距离 z 的关系图。根据数据点画出平滑曲线 (curves)，并在曲线上标明磁铁的移动方向。 1.0pt

D.4 当磁铁与流体表面的距离发生变化时，流体的重力势能、磁能和表面能量会发生变化。把表面能和磁势能看作是磁铁与流体表面的距离的函数，定性地画出来。根据之前绘制的图，标出全部临界点，并明确大体趋势。你不需要使用整个范围的数据，足以显示出想法即可。 0.6pt

DELEGATION PRINT

磁活性流体（magnetically active fluid）中的波脉冲 (10 points)

引言

在本问题中，你将研究铁磁流体（ferrofluids）中波脉冲的特性。流体中的表面波脉冲是由于重力，表面张力和磁力相互作用的结果，满足的色散关系是考题 1 中的方程（4）。对于波脉冲，没有单个波长或频率，但是知道在没有磁场的情况下脉冲的传播速度是

$$v(d) = \kappa\sqrt{d}, \tag{1}$$

其中 d 是流体的深度，κ 是比例常数。这种关系仅适用于波振幅较小的情况。当波振幅较大时，流体深度的变化会引起传播速度的变化，从而导致非线性效应。当非线性效应不显著时，波脉冲传播时基本保持它们的轮廓。但是，当非线性效应很显著时，脉冲可以在传播中改变轮廓，并常常在主脉冲的前方或后方产生小波痕。

Part A: 平面波脉冲 (1.3 points)



所需实验装置的照片，（a）木质底座上的装有铁磁流体的玻璃盒，（b）木质底座上的玻璃盒，放在凳子下，（c）相机放在凳子上。

为了在铁磁流体中产生平面波，将装有铁磁流体的容器盒子放在木质底座上，容器盒子长边沿着木质底座边缘的挡条（barrier）。挡条是为了确保推动盒子时，盒子只能向一个方向移动。确保底座平整且水平。为了产生脉冲，用手快速推盒子约 2 厘米。为了确保脉冲产生的一致性，你可以在木质底座上使用橡皮泥和/或木质垫片（woodenspacer）来标记铁磁流体容器起始和终了位置。强烈建议你反复练习生成脉冲，使得产生的脉冲更具有一致性。

然后将凳子放在玻璃盒上方。必须使用灯来提供足够的照明以便能够清楚地观察到流体中的脉冲。确保你可以生成平面波脉冲，并能通过凳子中央的孔，眼睛能够清晰观察到脉冲。当你做到这一点后，将相机放在凳上孔中，录制脉冲视频。请注意，可能需要调整照明和脉冲幅度，以便拍出可用的视频。为了调整照明，你可以用橡皮泥将灯贴在合适的位置，也可以用铝箔纸挡住光线或进一步导光。

当调整光照时，重要的是要考虑如何最大限度地减少光源的光线直接进入相机，以及如何最大限度地减少玻璃盒盖子的反射。提醒：出于安全原因，你绝对不能从玻璃盒上取下盖子。在不同情况下有以下两种可选方案：一是，凳子内的所有方向都有非常漫射的光（diffuse light），二是，将光从玻璃盒子的侧面射到流体上。

有关如何录制和回放视频的信息，请参阅附录 A 中的相机说明。请注意相机的默认自动设置适合制作所需的视频。如果你难以清晰地拍摄所观察到的现象，你需要调整光照直到更清晰观察到波脉冲。

A.1	画出你的装置图，尤其要显示灯的位置和光的方向。	0.3pt

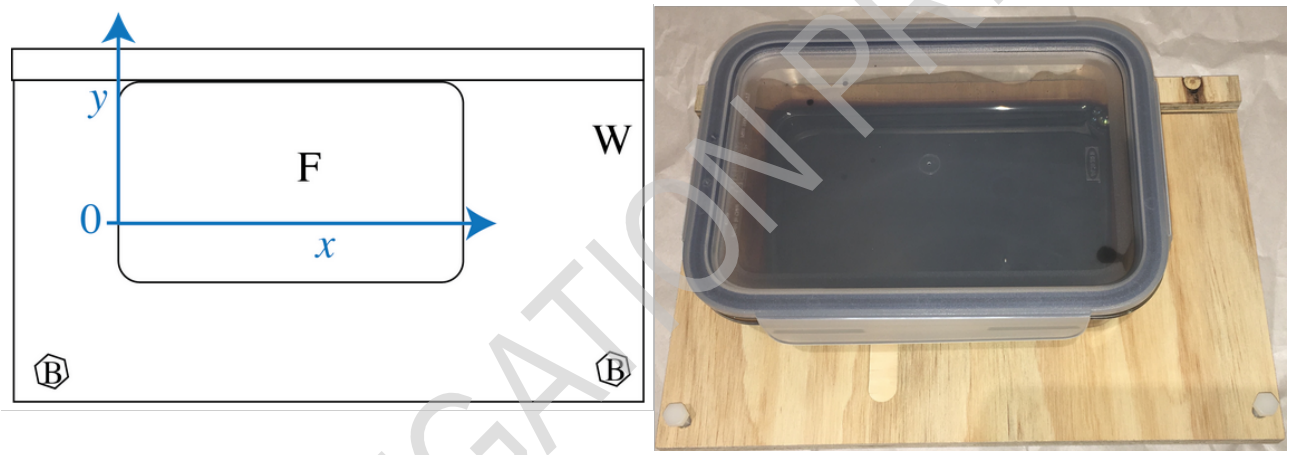
DELEGATION PRINT

A.2	从视频中进行测量，并计算出铁磁流体中的波的速度。当进行测量时，草绘出视频中的关键帧，草图中要显示重要特征，标记出所有所做的测量。	0.8pt

A.3	估算测量的不确定度，写出你用来估算的所有公式。	0.2pt

Part B: 在深度有变化的流体中的波脉冲 (3.4 分)

将尼龙螺栓从上面拧入木质底座角落的孔中。通过调整螺栓，可以使得平台上的容器盒子中的流体深度随着与低部边缘的距离而线性变化（该方向为 y 方向），而与其垂直的方向（x 方向）上深度不变。我们选择 流体深度 $d = 0$ 处 $y = 0$，xy 平面即是流体的表面。



在木质底座 W 上盛有铁磁流体的玻璃盒装置，容器中流体深度沿 y 方向变化。

因为流体中波速随深度变化，所以，如果平面波脉冲在容器的一端产生，在传播时会变得弯曲。

在木质底座上安装装有铁磁流体的玻璃盒，使得你能最好地表征铁磁流体中脉冲速度随深度的变化。

B.1	i. 装置设置好后，画出装置示意图。在图上标记出所有长度测量值与其不确定度。这些长度对你知道容器中流体的深度随 y 变化的函数关系很重要。 ii. 写出容器中流体深度 d(y) 的表达式。	0.3pt

B.2	在容器中生成平面波脉冲，并定性绘制出你观察到的一个脉冲。在草图上用字母 A 标记脉冲传播最快的区域，用字母 B 标记脉冲传播最慢的区域。 注意：为了清楚观察脉冲，你需要调整灯的位置。要调整照明，您可以使用橡皮泥将灯放在合适的位置，也可以用铝箔制作光阻挡器（light blockers）或光反射器 (light reflectors) 进一步引导光线。	0.3pt

作为一级近似，我们只考虑开始沿 x 方向行进的波脉冲保持在 x 方向传播。注意：(x, y) 是在时间 t 时，脉冲上各点的坐标。

B.3	i. 当 $t = 0$ 时，对于处于的 $x = 0$ 一个平面波脉冲，求出 x，y 与 t 之间的关系。 ii. 在 B2 的图中，用字母 V 来标出铁磁流体满足这一近似条件的最合理的地方。	0.3pt

DELEGATION PRINT

B.4	画出你的装置示意图，尤其显示灯的位置和光的方向。 采集用来计算 κ 的数据，并记录在答题纸的表格中。包括所有数据的不确定度。当进行测量时，需要画出视频关键帧，图中显示重要特征，并标记所有所做的的测量。	1.2pt

B.5	i. 作图计算 κ 的值。包含每个测量数据的误差棒（errorbar）。提供用于计算 v 及其不确定度 Δv 和 d 及其不确定度 Δd 的所有公式。在 B4 部分的表格中，记录用于作图的任何额外的计算值。 ii. 在 B3 部分，你给出了 x，y 和 t 的关系来描述观察到的波脉冲。根据你的数据，给出 x，y 和 t 满足的条件。	1.3pt

Part C: 波及其磁效应 (1.8 points)

警告：如果磁铁碰撞，它们可能会破裂。破碎的磁铁是危险的，如果你弄碎磁铁，将不再提供新的磁铁。

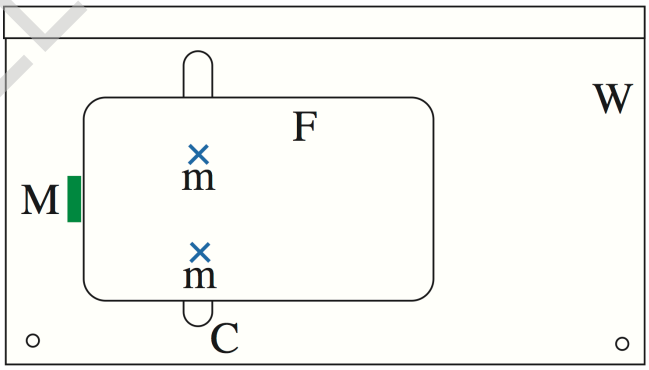
正如你在问题 1 中所观察到的那样，在存在磁场的情况下，铁磁流体会运动到磁场最强的区域。你在这一部分的目的是定性研究波的磁效应。

使玻璃盒中铁磁流体的深度相同，就如你之前产生平面波时那样。之后如下图将两个小磁铁放在玻璃盒下方。磁铁在木制底座的轨道槽里应该这样放置，当推动磁铁让它们侧边靠近时它们相互排斥。整个装置应该是这样的，当流体容器放好后，处于轨道槽里的两个磁铁在不相互排斥的情况下尽可能近。

将磁铁放置到位的一个安全方法是先将**一个**磁铁放在轨道槽中，然后将装有铁磁流体玻璃盒子放在轨道槽上。你可以用木质垫片（wooden spacer）协助来放置第二个磁铁。先将第二块磁铁放在容器盒子附近，再用木质垫片将其沿着容器盒子下方的轨道槽推到合适的位置。

用以下三种方法生成波脉冲：

- 磁性方法：将大的磁铁靠近容器，然后快速远离流体，
- 机械方法：在木质底座上滑动容器，
- 机械方法：容器放在木质底座上，滑动木质底座



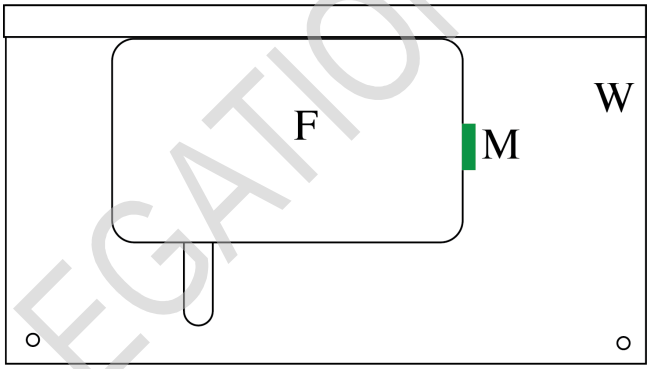
用磁性方法产生脉冲示意图。图中显示了大的磁铁 M 快速回撤之前磁铁的位置。图中 F 是装有磁性流体的玻璃盒，m 是小的磁铁，W 是木质底座，C 是轨道槽

DELEGATION PRINT

C.1	定性观察用上述三种方法产生的波脉冲，并画出波脉冲的草图，确保示意图清楚地显示流体下的磁铁及脉冲波前，以表明磁铁对波前的影响。识别你观察到的各种波现象。用相应的数字标记哪种效应导致你观察到的脉冲传播的哪种特征。 1. 反射 2. 折射 3. 多普勒效应 4. 拍 5. 衍射 6. 干涉 (a) 驻波 (b) 来自两个狭缝或波源 (c) 来自衍射光栅 (d) 其他	1.8pt

Part D: 强磁场中铁磁流体的内部特性 (3.5 points)

在这一部分中，你的目标是量化研究磁铁对铁磁流体中脉冲传播的影响。



示意图显示 D1 中产生波脉冲的磁铁的位置

放置铁磁流体容器，使铁磁流体具有恒定的深度，和前面生成平面波脉冲时一样。

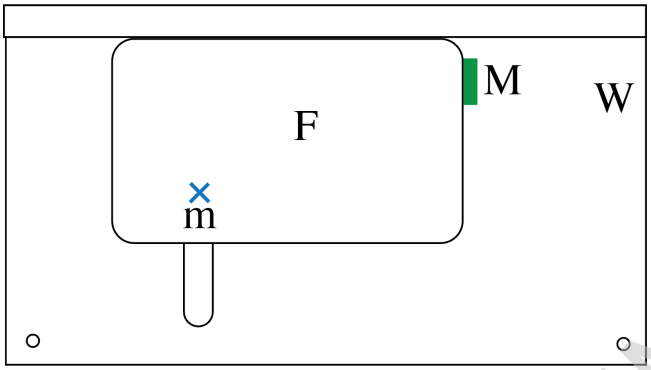
与 C1 一样，用**大的** N42 磁铁生成脉冲，并调整照明以清楚地观察磁性驱动的脉冲。

D.1	定性画出铁磁流体中用磁性方法产生的波脉冲的草图。	0.2pt

D.2	确定脉冲速度及其不确定度。画出装置图，包括灯的位置和光照方向，记录你使用的所有数据和公式。进行测量时，绘制视频关键帧的草图，草图要显示重要特征，并标记出所有所做的测量。	0.8pt

将单个小的磁铁放入木质底座的轨道槽中，然后将玻璃盒和铁磁流体放置在磁铁上面。磁铁的位置可以用木质垫片调整。

DELEGATION PRINT



装有铁磁流体的玻璃盒下方小磁铁的位置用 x 标记，产生波脉冲的大磁铁的位置用 M 表示。大磁铁先放在玻璃盒的外面，然后快速离开，从而产生波脉冲。

用磁性方法产生波脉冲。产生之前先将大的磁铁放在上图中 M 位置。观察流体中脉冲的传播，包括小磁铁上方的强磁场区域。

D.3	画出定性观察到的波脉冲草图。确保图中清楚地显示流体下的磁铁及波前，以表明磁铁对波前的影响。	0.4pt
D.4	画出你的装置示意图以确定铁磁流体下磁铁对波脉冲传播时间的影响。清楚地标出磁铁的位置和灯的位置。	0.3pt
D.5	测量，记录数据及其不确定度，确定一个波脉冲通过磁铁区域的时间及其不确定度。当测量时，也要画出视频关键帧的示意图，示意图要显示重要特征，并标记所有所做的测量。	1.0pt
D.6	铁磁流体经过磁铁上方时高度增加，这个额外的高度是否解释了波脉冲速度的差异？用计算支持你的答案。	0.8pt

DELEGATION PRINT

附录 A：如何使用佳能 IXUS-185

要打开或关闭相机，请按相机顶部标有“ON / OFF”的按钮（O）。注意一段时间后相机会自动关闭。

要聚焦相机，请按相机顶部的按钮（S）到半（别按到底）。

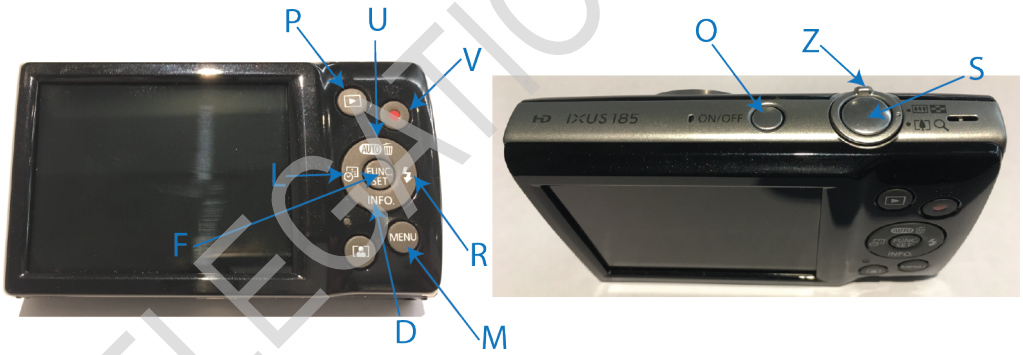
要拍照，请按相机顶部的按钮（S）。

要拍摄视频，请按标有红点的按钮（V）开始录制。再按一次停止录制。请注意 HD 视频录制的默认设置为 25 帧 每秒。

要查看拍摄的照片或视频，请按回看按钮（P）。使用相机背面环形按钮中的右（R）和左（L）按钮浏览照片和视频。

- 您可以使用相机顶部的环（Z）放大或缩小照片。注意：你不能缩放拍摄的视频。
- 要播放视频，请按下背面环形按钮中间的“FUNC.SET”按钮（F）相机两次。
- 要暂停播放视频，在视频播放过程中按相机背面环形按钮中间的“FUNC.SET”按钮（F）暂停视频播放.
- 视频暂停时，在屏幕底部有选项。从左到右选项依次是：退出，播放，慢动作，向后跳过，上一帧，下一帧，向前跳过。使用在相机背面的环形按钮上的右（R）和左（L）按钮切换选项，以及相机背面环形按钮中间的“FUNC.SET”按钮（F）改变视频播放的音量。

要放大或缩小，请将相机顶部的环（Z）向左推以缩小，向右推以放大。



要进入相机设置菜单，请按标有“MENU”的按钮（M），然后使用相机背面的右侧环形按钮（R）在进入相机设置菜单。请注意，第一个选项是静音相机声音。

- 使用相机背面环形按钮上的右（R），左（L），上（U）和下（D）按钮浏览菜单。
- 使用相机背面响环形按钮中间的“FUNC.SET”按钮（F）进行选择选项。
- 使用“MENU”按钮（M）退出菜单或返回上一级菜单。

要更改相机的语言，请先进入相机设置菜单（参见上文）。按相机背面向右下方标有“INFO”的按钮（D）。向下滚动许多页面列表找到“语言”。然后按相机背面的环形右侧按钮（R）进入列表语言选择。按背面环形按钮上的右（R），左（L），上（U）和下（D）按钮，相机导航到你选择的语言。使用环形按钮中间的“FUNC.SET”按钮（F）选择语言。

注意：因为默认的自动设置适合你视频录制的需要，除了更改语言外，你不应更改相机上的任何设置。通过调整实验装置的照明，你将获得更好的效果。

DELEGATION PRINT

Theory Q1, APhO 2019, Adelaide
RF Reflectometry of Single-Electron Circuits

Version 1.0.

PART A: LUMPED ELEMENT MODEL OF A CO-AXIAL TRANSMISSION LINE

A.1 The speed of wave propagation in free spaces ($c_0 = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$) is $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$. The speed in the dielectric & diamagnetic medium is

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\,\varepsilon_0\,\mu_\mathrm{r}\,\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\,\mu_\mathrm{r}}} \tag{1}$$

A.2 Gauss law for the flux through a cylindrical surface with radius r co-axial with the the core, $a < r < b$:

$$\Delta l\, 2\pi r\, E(r) = \frac{\Delta q}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\Delta q}{\Delta l}\frac{1}{2\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 r} \tag{2}$$

A.3 The capacitance

$$c\,\Delta l = \frac{\Delta q}{\phi} \tag{3}$$

where the potential ϕ of the core with respect to the shield is

$$0 - \phi = -\int_a^b E(r)\,dr \Rightarrow \phi = \frac{\Delta q}{\Delta l}\frac{1}{2\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \tag{4}$$

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} \tag{5}$$

A.4 The magnetic flux through a rectangular contour paralel to the axis equal inductance times the current:

$$\Delta l\int_a^b B(r)\,dr = l\,\Delta l\,I \tag{6}$$

Biot-Savart law $B(r) = \frac{\mu_\mathrm{r}\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$ gives

$$l = \frac{\mu_\mathrm{r}\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{7}$$

A.5 i. Adding Δl length of the cable should not change its impedance. Hence the impedance Z of the following circuit must be equal to Z_0:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_0 + j\omega\Delta L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega\Delta C}} = \frac{1}{Z_0} \tag{8}$$

$$Z_0 + i\omega\Delta L\,Z_0 - \Delta L/\Delta C = 0 \tag{9}$$

$\Delta L/\Delta C = l/c$ and the $\Delta L \to 0$ for $\Delta l \to 0$, hence

$$Z_0 = \sqrt{l/c} \tag{10}$$

ii.

$$Z_0 = \sqrt{l/c} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}\mu_0}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}} = \ln(b/a)\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}} \times 59.96\,\Omega \tag{11}$$

For $Z_0 = 50\,\Omega$, $\varepsilon_\mathrm{r} = 4.0$ and $\mu_\mathrm{r} = 1.0$ this gives $b = 5.30\,a$.

PART B: HYPOTHETICAL TRANSMISSION LINE WITH RETURN ALONG A GROUNDED PLANE

B.1 The high-conductance ground plate can be replaced by an image of the wire with opposite direction of the current at distance $2d$ from the real wire. The magnetic fields from the real and the imaginary wires add up and need to be integrated to get the magnetic flux between the wire and the plate:

$$l\,\Delta l\,I = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I \int_a^d \underbrace{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2d-r}\right)}_{\approx 2d/r} dr\,\Delta l \tag{12}$$

$$l = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln\frac{2d}{a} \tag{13}$$

The potential difference between the wire and the plate can be obtained similarly by integrating the combined field for the wire and its image:

$$\phi = \frac{\Delta q}{\Delta l}\frac{1}{2\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}\int_a^d \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2d-r}\right) dr = \frac{\Delta q}{\Delta l}\frac{\ln(2d/a)}{2\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0} \tag{14}$$

$$c = \frac{\Delta q}{\Delta l}\frac{1}{\phi} = \frac{2\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}{\ln(2d/a)} \tag{15}$$

Hence the impedance of the wire-plate system is

$$Z_0 = \sqrt{l/c} = \frac{\ln(2d/a)}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}\mu_0}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}} = \ln(2d/a)\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}} \times 59.96\,\Omega \tag{16}$$

PART C: BASICS OF RF REFLECTOMETRY

C.1 At the interface, values of the voltage on both transmission lines have to coincide:

$$V_\mathrm{i} + V_\mathrm{r} = V_\mathrm{r} \tag{17}$$

The current has to be conserved at the interface, however, the incident and the reflected waves carry the current in opposite directions:

$$\frac{V_\mathrm{i}}{Z_0} - \frac{V_\mathrm{r}}{Z_0} = \frac{V_\mathrm{t}}{Z_1} \tag{18}$$

It is clear from the equation above that $V_\mathrm{t} \neq 0$ if $Z_0 \neq Z_1$ – impedance mismatch has to cause reflection. Solving the voltage and the current equations for $\Gamma = V_\mathrm{r}/V_\mathrm{i}$ gives

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \tag{19}$$

C.2 A π-shift implies opposite signs of V_i and V_r and hence requires $\Gamma < 0$. This implies $Z_1 < Z_0$.

PART D: THE SINGLE ELECTRON TRANSISTOR

D.1 i. The potential on the QD is

$$\varphi_n = V_g + \frac{-ne}{C_\mathrm{g}} \tag{20}$$

where $e > 0$ is the elementary charge.

ii. Bringing the additional electron decreases the potential to $\varphi_{n+1} = \varphi_n - e/C_g$. The work necessary to perform the transition is

$$\Delta E_n = -e\frac{\varphi_n + \varphi_{n+1}}{2} = \frac{e^2}{C_g}\left(n + \frac{1}{2}\right) - eV_g \tag{21}$$

Note that without $C_t \ll C_g$ approximation, the answer is $\Delta E_n = \frac{e^2}{C_g + C_t}\left(n + \frac{1}{2}\right) - eV_g C_g/(C_t + C_g)$.

D.2 Consider such V_g that $\Delta E_{\mathcal{N}} \to 0^+$. Then $\Delta E_{\mathcal{N}+1} = \frac{e^2}{C_g}$ can become the new equilibrium addition energy once V_g is made slightly more positive another electron jumps onto the dot, $\mathcal{N} \to \mathcal{N} + 1$. Further increase of V_g only lowers the addition energy till the next resonance condition is reached. In other words, $\Delta E_{\mathcal{N}(V_g)}(V_g)$ is a periodic function of V_g with a discontinuity at the maximal value of

$$E_c = \frac{e^2}{C_g} \tag{22}$$

D.3 Thermal energy per electron $k_{\mathrm{B}}T$ should not exceed characteristic addition energy E_c:

$$k_{\mathrm{B}}T < E_c \tag{23}$$

Here k_{B} is the Boltzmann constant.

D.4 i. $\tau = R_t\, C_t$

ii. Quantum uncertainty of energy (life-time broadening) h/τ must be less the energy difference between the states with n and $n + 1$ electrons,

$$h/\tau < E_c \tag{24}$$

$$\frac{h}{R_t C_t} < \frac{e^2}{C_t + C_g} \tag{25}$$

$$R_t > \frac{h}{e^2}\frac{C_t + C_g}{C_t} > \frac{h}{e^2} \tag{26}$$

PART E. RF REFLECTOMETRY TO READ OUT SET STATE

E.1

$$\Gamma = \frac{Z_{\mathrm{SET}} - Z_0}{Z_{\mathrm{SET}} + Z_0} \tag{27}$$

$$\Gamma_{\mathrm{ON}} = \frac{10^5 - 50}{10^5 + 50} \approx 1 - 2\frac{50}{10^5} \tag{28}$$

$$\Gamma_{\mathrm{OFF}} = \lim_{Z_1 \to \infty} \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = 1 \tag{29}$$

$$\Delta\Gamma = |\Gamma_{\mathrm{ON}} - \Gamma_{\mathrm{OFF}}| \approx 1.0 \cdot 10^{-3} \tag{30}$$

E.2 In the OFF state of the SET, the circuit is an LC contour with resonance frequency $\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0}$. If we choose L_0 such that $\omega_0 = \omega_{\mathrm{rf}}$, then Z_{tot} (the total impedance of the circuit) in the OFF state of the SET equals to 0 and the reflectance is that of a short-circuited line, $\Gamma_{\mathrm{OFF}} = -1$.

The change in reflectance will be large if $|Z_{\mathrm{tot}}|$ is the ON state is on the order of Z_0 or larger, which is indeed the case. For the ON state and $\omega_0 = \omega_{\mathrm{rf}}$

$$Z_{\mathrm{tot}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R_{\mathrm{SET}}}\right)^{-1} + j\omega L \tag{31}$$

$$= \frac{R_{\mathrm{SET}}}{1 + j\omega C\, R_{\mathrm{SET}}} + j\omega L \tag{32}$$

$$= \frac{R_{\mathrm{SET}} + i\sqrt{L/C}}{1 + R_{\mathrm{SET}}^2 C/L} \tag{33}$$

For $C_0 = 0.4 \cdot 10^{-12}\mathrm{F}$, $Z_0 = 50\,\Omega$ and $\omega_{\mathrm{rf}} = 2\pi \cdot 10^8\,\mathrm{Hz}$, we have $L_0 = 6.33\,\mathrm{mH}$, $Z_{\mathrm{tot}} = (158 + 6.3\,j)\Omega$, $\Gamma_{\mathrm{ON}} = 0.5198 + 0.0145\,j$, and $\Delta\Gamma = 1.52$.

PAR F. CHARGE SENSING WITH A SINGLE LEAD QUANTUM DOT

F.1 The SLQD readout circuit contains only reactive elements, so $|\Gamma| = 1$ will always be zero. The OFF state of the SLQD corresponds to an inductor L_0 and a capacitor C_0 connected in series. We again choose $\omega_{\mathrm{rf}} = 1/\sqrt{L_0 C_0}$, so that Z_{tot} is the OFF state is infinite and $\Gamma_{\mathrm{OFF}} = 1$.

The ON state corresponds to $Z_{\mathrm{SET}} = -j\frac{1}{\omega_{\mathrm{rf}} C_q}$ and Z_{tot} at $\omega_{\mathrm{rf}} = \omega_0$ is just the impedance of the SLQD

$$Z_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{(j\omega_{\mathrm{rf}} L_0)^{-1} + j\omega_{\mathrm{rf}}(C + C_q)} = -j\frac{1}{\omega_0 C_q} = -j\frac{C_0}{C_q} Z_C \tag{34}$$

For the phase of $\Gamma_{\mathrm{ON}} = (Z_{\mathrm{tot}} - Z_0)/(Z_{\mathrm{tot}} + Z_0)$ to be significantly different from zero, we need $|Z_{\mathrm{tot}}| \sim Z_0$ since Z_{tot} is purely imaginary. Hence

$$Z_C \sim \frac{C_q}{C_0} Z_0 \tag{35}$$

F.2 If L_0 is fixed, we can still operate the circuit at the frequency $\omega_{\mathrm{rf}} = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ that gives $\Gamma_{\mathrm{OFF}} = 1$. However, we need to deduce a way to increase $|Z_{\mathrm{tot}}|$ even if Z_C is not sufficient. One of the ways to do that is to add an additional capacitance C_m is series with rest of the circuit.

This will give (at $\omega_{\mathrm{rf}} = \omega_0$)

$$Z_{\mathrm{tot}} = -j\left(\frac{C_0}{C_q} Z_C + \frac{1}{\omega_0 C_m}\right) = -j\omega_0^{-1}\left(C_q^{-1} + C_m^{-1}\right) \tag{36}$$

From the condition $|Z_{\mathrm{tot}}| \approx Z_0$ we have

$$C_m \approx \frac{C_q}{Z_0 C_q \omega_0 - 1} = \frac{C_q\sqrt{L_0 C_0}}{Z_0 C_q - \sqrt{L_0 C_0}} \tag{37}$$

Question 2: X-ray jets from active galactic nuclei

Part A: 1d fluid model of a jet

A1

If you consider a prism of plasma in the jet frame, it contains a number of particles N, has length l in the direction of motion, and cross sectional area A. The total number of particles in the volume is invariant on transformation into the AGN frame, however the volume occupied by the plasma changes as lengths are contracted in the direction of motion, while perpendicular lengths are unchanged. Hence, $A' = A$, and $l' = l/\gamma$.

This gives us two relationships:

$$N = n(s)Al \tag{1}$$

and

$$N = n'(s)Al/\gamma \tag{2}$$

Equating these gives

$$n(s)Al = n'(s)Al/\gamma \quad ,$$

which leads to

$$n'(s) = \gamma n(s) \quad . \tag{3}$$

.

A2

The particles in the jet have a bulk flow speed of $v(s)$, so in a time Δt a volume $V = A(s)v(s)\Delta t$ crosses the cross section of the jet. Using the number density in the AGN frame,

$$F_{\rm p}(s) = n'(s)A(s)v(s) \tag{4}$$

$$= \gamma(s)n(s)A(s)v(s) \tag{5}$$

A3

As the plasma travels along the jet there are no particles passing through the side boundary of the jet. Hence, the total flux through the curved edges of the jet is zero, and the total flux into the jet is the flux in through the cross section at s_1 is $F_{\rm p}(s_1)$ and the total flux out of the jet is $F_{\rm p}(s_2)$. There is an additional term in the continuity equation due to the mass injection. There are $\alpha V/\mu_{\rm pp}$ particles injected.

This gives

$$\gamma(s_2)v(s_2)n(s_2)A(s_2) - \gamma(s_1)v(s_1)n(s_1)A(s_1) = \alpha V/\mu_{\rm pp} \tag{6}$$

A4

Similarly, in the AGN frame the energy flux

$$F_{\rm E}(s) = n'(s)A'(s)v(s)\epsilon'_{\rm av}(s) \quad . \tag{7}$$

We use previous results for all quantities except average energy per particle.

Consider the total energy in a volume ΔV of the plasma, $E_{\rm tot} = \epsilon_{\rm av}N$ in the jet frame. As this is the proper frame v(s)=0.

Transforming to the AGN frame, $E'_tot = \gamma(s)\epsilon_{\rm av}N$, and $\epsilon'_{\rm av} = \gamma\epsilon_{\rm av}$.

Hence,

$$F_{\rm E}(s) = \left(\gamma(s)\right)^2 n(s)A's)v(s)\epsilon_{\rm av}(s) \tag{8}$$

.

Energy conservation requires that the total energy flux out of the jet is equal to the energy added through injection of mass, so

$$\left(\gamma(s_2)\right)^2 v(s_2)n(s_2)A(s_2)\epsilon_{\rm av}(s_2) - \left(\gamma(s_1)\right)^2 v(s_1)n(s_1)A(s_1)\epsilon_{\rm av}(s_1) = \alpha V c^2 \tag{9}$$

A5

From the defintion of jet power and also (8),

$$P_j(s) = (\gamma(s))^2 n(s)A's)v(s)\epsilon_{\rm av}(s) - \dot{M}c^2 \quad . \tag{10}$$

Here $\dot{M}$ is the flux of mass flux across the surface, so $\dot{M} = F_{\rm p}(s)\mu_{\rm pp}$ and

$$P_j(s) = (\gamma(s))^2 n(s)A's)v(s)\epsilon_{\rm av}(s) - F_{\rm p}(s)\mu_{\rm pp}c^2 \quad . \tag{11}$$

In order to find how jet power varies along the jet, we consider jet power at two points along the jet.

$$P_{\rm j}(s_2) - P_{\rm j}(s_1) = (\gamma(s_2))^2 n(s_2)A'(s_2)v(s_2)\epsilon_{\rm av}(s_2) - F_{\rm p}(s_2)\mu_{\rm pp}c^2 \tag{12}$$

$$- \left((\gamma(s_2))^2 n(s_1)A'(s_1)v(s_1)\epsilon_{\rm av}(s_1) - F_{\rm p}(s_1)\mu_{\rm pp}c^2\right) \tag{13}$$

. We can identify the two terms with $\epsilon_{\rm av}$ to be those from the left hand side of (8), and the two terms with $\mu_{\rm pp}$ are $\mu_{\rm pp}c^2$ times the left hand side of (6). Making these substitutions,

$$P_{\rm j}(s_2) - P_{\rm j}(s_1) = \alpha V c^2 - \alpha V c^2 = 0 \quad . \tag{14}$$

This argument applies to arbitary s_1 and s_2, so the jet power is constant along the jet and $\frac{dP_{\rm j}}{ds} = 0$.

A6

We start from (10) and substitute $\epsilon_{\rm av} = \mu_{\rm pp}c^2 + \frac{13}{4}\frac{P}{n}$, to arrive at

$$P_{\rm j}(s) = (\gamma(s))^2 n(s)A(s)v(s)(\mu_{\rm pp}c^2 + \frac{13}{4}\frac{P}{n(s)}) - \gamma(s)n(s)A(s)v(s)\mu_{\rm pp}c^2 \tag{15}$$

$$= (\gamma(s)-1)\gamma(s)n(s)A(s)v(s)\mu_{\rm pp}c^2 + (\gamma(s))^2 A(s)v(s)\frac{13}{4}P \tag{16}$$

$$= (\gamma(s)-1)\dot{M}c^2 + (\gamma(s))^2 A(s)v(s)\frac{13}{4}P \tag{17}$$

Rearranging to find $\dot{M}$ gives

$$\dot{M} = \frac{P_{\rm j} - \gamma(s)^2 A(s)v(s)\frac{13}{4}P}{(\gamma(s)-1)c^2} \tag{18}$$

Using the relationship $P(s) = 5.7 \times 10^{12}\left(\frac{s}{s_0}\right)^{-1.5}$ and substituting values for s_1 and s_2 respectively into (18), give $\dot{M}_1 = 2.8 \times 10^{19}\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$ and $\dot{M}_2 = 4.8 \times 10^{19}\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$.

A7

From lorentz transforming $\epsilon_{\rm av}$ from the jet frame where $v = 0$ to the AGN frame, the average momentum per particle is $p_{\rm av} = \gamma(s)\frac{v(s)}{c}\epsilon_{\rm av}$. As the momentum is directly proportional to the total energy, the flux argument is the same, and

$$\Pi(s) = \frac{F_{\rm E}}{c}\frac{v(s)}{c} \quad . \tag{19}$$

This can be related to the jet power and $\dot{M}$,

$$\Pi(s) = \left(\frac{P_{\rm j}}{c} + \dot{M}c\right)\frac{v(s)}{c} \quad . \tag{20}$$

Again, there is no particle flux, and hence no momentum flux through the sides of the jet, so the total momentum flux out of the jet is

$$\Pi = \Pi(s_2) - \Pi(s_1) \quad . \tag{21}$$

Substituting values for the jet at s_2 and s_1 gives $\Pi = 9.2 \times 10^{27}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$.

A8

The total force on the jet due to external pressure has contributions from the cross section at s_1, $F_1 = P(s_1)A(s_1)$, at s_s, $F_2 = P(s_2)A(s_2)$, and from the pressure on the curved surface. We have a linear relationship $r(s) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{s_2 - s_1}(s - s_1)$, and the force on a element of the surface from from s to $s + ds$ is

$$dF = 2\pi r P(s) \quad , \tag{22}$$

where $P(s) = 5.7 \times 10^{12} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{-1.5}$. To find the total force due to the external pressure,

$$F_{\rm Pr} = F_1 - F_2 + \int_{s_1}^{s_2} dF \tag{23}$$

. Evaluating the integral gives $\int_{s_1}^{s_2} dF = 9.8 \times 10^{26}$ N, so $F_{\rm Pr} = 8.2 \times 10^{26}$ N.

A9

As there are no other forces on the jet, it is expected that $\Pi = F_{\rm Pr}$.

The % deviation is $|(\Pi - F_{\rm Pr})/F_{\rm Pr}| \approx 40\%$

Gas of ultrarelativistic electrons

B1

The total energy per volume is

$$\int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) d\epsilon$$

B2

Consider the particles colliding with a surface ΔA,with the normal to the surface in the z-direction, in time Δt. As the electrons are ultrarelativistic, theirs speeds are all approximately c. We assume that the collisions with wall are elastic, and electrons depart with their parallel mometnum unchanged and $p_{z,\ \rm final} = -p_z$. Hence, $\Delta p_z = 2p_z$, where $p_z = \frac{epsilon}{c}\cos\theta$, since the electrons are ultrarelativistic and $E \approx pc$.

The distribution is isotropic so electrons are equally likely to be travelling in any direction.

All electrons within a parallelepiped of length $c\Delta t$ which approach the surface at an angle θ will hit it in the time Δt. The volume of the paralleleiped is $c\Delta t \Delta A \cos\theta$. From here, the total change in momentum is

$$\Delta p_z = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2n(\epsilon) p_z c\Delta t \Delta A \cos\theta \frac{\sin\theta}{4\pi} d\phi d\theta d\epsilon \tag{24}$$

$$= \frac{2\Delta t \Delta A}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) d\epsilon \tag{25}$$

$$= \frac{2\Delta t \Delta A}{4\pi} \times \frac{1}{3} \times 2\pi \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) d\epsilon \tag{26}$$

B3

As the remaining integral in the expression above was identified as the energy per volume in B1, $\Delta p_z = \Delta t \Delta A \frac{1}{3}\frac{E}{V}$. The pressure is the force per area normal to the wall, so $P = \frac{Deltap_z}{\Delta t}\Delta A$. Combining these gives $P = \frac{E}{3V}$, or $E = 3PV$, which is the equation of state.

B4

For an adiabatic process $dQ = 0$ so $dE = dW = -PdV$. $dE = d(3PV) = 3PdV + 3VdP$, so equating these expressions gives

$$3PdV + 3VdP = -pdV \tag{27}$$
$$4PdV = -3VdP \tag{28}$$
$$4\frac{dV}{V} = -3\frac{dP}{P} \tag{29}$$
$$4\int_{V_0}^{V} \tag{30}$$
$$\frac{dV'}{V'} = -3\int_{P_0}^{P}\frac{dP'}{P} \tag{31}$$
$$4\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -3\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \tag{32}$$
$$\frac{PV^{4/3}}{P_0V_0^{4/3}} = 1 \tag{33}$$

Synchrotron emission

C1

An electron in a magnetic field has a component of its velocity, $v\cos\alpha$ along the magnetic field, and $v\sin\alpha$ perpendicular to the field. The parallel component of the velocity remains constant, but in the perpendicular direction the electron experiences a force in a direction perpendicular to its motion, so it undergoes simple harmonic motion. The perpendicular component of its velocity is Ωr where Ω is its angular frequency and r the radius of the circular motion. The force on the electron is $\mathbf{F}_\mathrm{B} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = e\Omega rB\sin\alpha$. The acceleration of the electron is perpendicular to the direction of motion, so $F_B = \frac{ma}{\gamma}$, where a is the acceleration and m the mass of the electron. For uniform circular motion, $a = -\Omega^2 r$, so

$$F_\mathrm{B} = m\Omega^2 r \tag{34}$$
$$e\Omega rB\sin\alpha = \frac{m\Omega^2 r}{\gamma} \tag{35}$$
$$\Omega = \frac{eB\sin\alpha}{\gamma m} \tag{36}$$

C2

The observer only sees the synchrotron emission when they are within the forward light cone. As the electron is gyrating around the magnetic field, this direction is changing. The observer is in this light cone for time $\Delta t = \frac{2\theta}{2\pi\Omega} = \frac{m}{\pi eB}$. However, the emitting electron is moving directly toward the observer over this time, so although the light emitted at the start of the pulse is ahead of the light at the end of the pulse, it is only ahead by $c\Delta t\left(1-\frac{v}{c}\right)$. The pulse then has an apparent duration of

$$\Delta t_a = \Delta t\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

. Since $\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right) = 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$, we can write $\left(1-\frac{v}{c}\right) = \frac{1}{\gamma^2}\left(1+\frac{v}{c}\right)$. As the electrons are ultrarelativistic, $\left(1+\frac{v}{c}\right) = 2$, and

$$\Delta t_\mathrm{a} = \frac{m_e}{2\pi\gamma^2 eB} \quad .$$

C3

$$\nu_\mathrm{chr} \approx \frac{1}{\Delta t_{rma}} = \frac{2\pi\gamma^2 eB}{m_e}$$

C4

Making a linear approximation,

$$\tau \approx -\frac{E}{\left(\frac{dE}{dt}\right)} \tag{37}$$

$$= \frac{6\pi\varepsilon_0 m^4 c^5}{e^4 b^2 \sin^2\alpha}\frac{1}{E} \tag{38}$$

Synchrotron emission from an AGN jet

D1

As the magnetic field is frozen in, and magnetic flux is constant, the magnetic field must decrease as the area increases in the expansion.

For a small area A, $B_0 A_0 = BA$. Since $A \propto v^{2/3}$, $B = B_0(A/A_0) = B_0\left(\frac{V}{V_0}\right)^{2/3}$

D2

A volume of plasma V_0 with number density n_0 contains a total number of particles $N = n_0 V_0$. As the volume expands, the total number remains constant, so $n = N/V = (V/V_0)n_0$.

The internal energy of the plasma $E = 3PV$, and since $PV^{4/3} = P_0 V_0^{4/3}$, $EV^{1/3} = E_0 V_0^{1/3}$. The scaling for particle energy with volume is then $E = (V/V_0)^{-1/3}E_0$. This means that the particles initially with energies between ϵ_0 and $\epsilon + d\epsilon$, will have energies between $(V/V_0)^{-1/3}\epsilon_0$ and $(V/V_0)^{-1/3}(\epsilon + d\epsilon)$. As $((V/V_0)^{-1/3}\epsilon)^{-p} = (V/V_0)^{-p/3}\epsilon^{-p}$.

Hence, we can write

$$n(\epsilon) = \kappa\epsilon_{-p} \quad .$$

The value of κ is determined by the relationship

$$\int_0^\infty \kappa\epsilon^{-p} d\epsilon = N/V \quad .$$

Given

$$\int_0^\infty \kappa_0\epsilon^{-p} d\epsilon = N/V_0$$

$\kappa_0 V_0 = \kappa V$, and

$$n(\epsilon) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-1} \kappa_0\epsilon^{-p}$$

D3

As the energy loss rate due to synchrotron emission increases as E^2, and the cooling time decreases as $1/E$, the more energetic electrons lose energy more rapidly. If we consider electrons with energies $\epsilon_1 < \epsilon_2$, both will move to lower energies in the distribution, but $dE/dt \propto E^2$, so $\frac{dE}{dt}|_{\epsilon_2} > \frac{dE}{dt}|_{\epsilon_1}$. This will reduce the relative number of electrons with higher energies, and steepen the power law of the electron energy distribution.

D4

For the knots in Centaurus A there is no change in the x-ray spectrum, so this rules out synchrotron cooling as in that case the spectrum would steepen (Part D3). Hence adiabatic cooling is more likely for these two knots.

For the knots in M87, there is no change in brightness in other bands. Adiabatic expansion would reduce the number density at all energies (Part D2) and hence brightness at all wavelengths, so this is not likely. Hence, synchrotron cooling is more likely for these two knots.

Q3 SOLUTIONS: TIPPE TOP

1. (a) **Reference sheet for markers**

Coordinate systems for convenience (note: use of matrices not needed) xyz from XYZ

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}\\ \hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{X}}\\ \hat{\mathbf{Y}}\\ \hat{\mathbf{Z}}\end{bmatrix}$$

123 from xyz

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{1}}\\ \hat{\mathbf{2}}\\ \hat{\mathbf{3}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}\\ \hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix}$$

Position of point A from centre of mass, in xyz and 123 frames:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \alpha R\hat{\mathbf{3}} - R\hat{\mathbf{z}} \\ &= \alpha R\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + R(\alpha\cos\theta - 1)\hat{\mathbf{z}} \\ &= R\sin\theta\hat{\mathbf{1}} + R(\alpha - \cos\theta)\hat{\mathbf{3}}\end{aligned} \tag{1}$$

Useful products:

$$\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{3}} = \sin\theta\hat{\mathbf{y}} \tag{2}$$
$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{3}} = \cos\theta \tag{3}$$
$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{3}} = \sin\theta \tag{4}$$
$$\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{3}} = R(\alpha - \cos\theta) \tag{5}$$
$$\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{z}} = R(\alpha\cos\theta - 1) \tag{6}$$

Note (given in question):

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\mathbf{K}} = \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\widetilde{\mathbf{K}}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A} \tag{7}$$

Time derivatives:

$$\dot{\hat{\mathbf{3}}} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{3}} \tag{8}$$
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{y}} \tag{9}$$
$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = -\dot{\phi}\hat{\mathbf{x}} \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

Triple product (given in question):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} &= -\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\end{aligned} \tag{12}$$

(b) **Solutions**

i. (**0.8 marks**)

For free body diagram, refer to figure at end

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} &= (N - mg)\hat{z} + \mathbf{F}_f \quad \text{(full marks)} \\ &= (N - mg)\hat{z} - \frac{\mu_k N}{|v_A|}\mathbf{v_A}\end{aligned} \tag{13}$$

Sketched $\mathbf{v_A}$ must be in opposite direction to $\mathbf{F}_f$.

ii. (**0.8 marks**)

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} &= \mathbf{a} \times (N\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}_f) \qquad (14)\\ &= (\alpha R\hat{\mathbf{3}} - R\hat{\mathbf{z}}) \times (N\hat{\mathbf{z}} + F_{f,x}\hat{\mathbf{x}} + F_{f,y}\hat{\mathbf{y}}) \\ &= \alpha RN\hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{z}} + \alpha R(\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}) \times (F_{f,x}\hat{\mathbf{x}} + F_{f,y}\hat{\mathbf{y}}) - R\hat{\mathbf{z}} \times (F_{f,x}\hat{\mathbf{x}} + F_{f,y}\hat{\mathbf{y}}) \\ &= -\alpha RN\sin\theta + \alpha R\sin\theta F_{f,y}\hat{\mathbf{z}} + \alpha R\cos\theta F_{f,x}\hat{\mathbf{y}} - \alpha R\cos\theta F_{f,y}\hat{\mathbf{x}} - RF_{f,x}\hat{\mathbf{y}} + RF_{f,x}\hat{\mathbf{x}} \\ &= RF_{f,y}(1 - \alpha\cos\theta)\hat{\mathbf{z}} + [RF_{f,x}(\alpha\cos\theta - 1) - \alpha RN\sin\theta]\,\hat{\mathbf{y}} + \alpha R\sin\theta F_{f,y}\hat{\mathbf{z}} \qquad (15)\end{aligned}$$

iii. (**0.4 marks**)

Motion at A satisfies

$$\mathbf{v_A} = \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \tag{16}$$

Contact condition:

$$(\mathbf{s} + \mathbf{a}) \cdot \hat{z} = 0 \tag{17}$$

Differentiating w.r.t. time, using hint (7) (also $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = 0$)

$$(\dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0 \tag{18}$$

The LHS is precisely $\mathbf{v_A} \cdot \hat{\mathbf{z}}$.

iv. (**0.7 marks**)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{2}} + \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\psi}\hat{\mathbf{3}} \\ &= \dot{\psi}\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\hat{\mathbf{z}} \qquad (19)\\ &= -\dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{2}} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{\mathbf{3}} \qquad (20)\end{aligned}$$

v. (**0.8 marks**)

Where $\mathbf{I}$ is the inertia tensor,

$$\begin{aligned}E_{\text{tot}} &= K_{\text{rot}} + K_{\text{trans}} + U_{\text{grav}} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{s}}^2 + mgR(1 - \alpha\cos\theta)\end{aligned}$$

From 18,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{v_A} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \\ &= \mathbf{v_A} - (\dot{\theta}\hat{\mathbf{2}} + \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\psi}\hat{\mathbf{3}}) \times (\alpha R\hat{\mathbf{3}} - R\hat{\mathbf{z}}) \\ &= v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} - \left(\dot{\theta}\alpha R\hat{\mathbf{1}} - \dot{\theta}R\hat{\mathbf{z}} + \dot{\phi}\alpha R\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{3}} - \dot{\psi}\hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{z}}\right) \\ &= \left(v_x + \dot{\theta}R(1 - \alpha\cos\theta)\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(v_y - R\sin\theta(\alpha\dot{\phi} - \dot{\psi})\right)\hat{\mathbf{y}} + \dot{\theta}\alpha R\sin\theta\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

using 2. Thus

$$\begin{aligned}E_{\text{tot}} = &\frac{1}{2}\left[I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2\right] \\ &+ \frac{m}{2}\left[\left(v_x + \dot{\theta}R(1 - \alpha\cos\theta)\right)^2 + \left(v_y - R\sin\theta(\alpha\dot{\phi} - \dot{\psi})\right)^2 + \dot{\theta}^2\alpha^2R^2\sin^2\theta\right] + mgR(1 - \alpha\cos\theta)\end{aligned}$$

vi. (**0.3 marks**)

From 15,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sum \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \alpha R\sin\theta F_{f,y} \tag{21}$$

vii. (**1.0 marks**)

Centre of mass of top rises, therefore $U_{\text{grav}} \sim 0$ increases.

Normal force does no work. Frictional force does work at point A, and decreases the total energy monotonically:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v_A}\ dt < 0$$

Frictional force points in opposite direction to $\mathbf{v_A}$:

$$\frac{d}{dt}E_{\text{tot}} = -\mu_k N|\mathbf{v_A}|$$

At start and end (phases I and V) there is little translation so $K_{\text{trans}} \sim 0$; the predominant energy transfer is from $K_{\text{rot}} \sim 0$ to $U_{\text{grav}} \sim 0$.

21 implies only the y-component of the frictional force acts to decrease the component of the angular momentum about the z-axis, thereby transferring energy from the K_{rot} term to the U_{grav} term. The resultant torque is in the $\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{y}}$ direction.

viii. (**1.2 marks**)

See attached sketches. Required:

- E_{tot}: monotonically decreasing
- K_{rot}: monotonically decreasing; zero at V
- K_{trans}: zero at I and V; higher between; close to zero at IV
- U_{grav}: flat at start and finish; higher at end; increases from I to IV then flat; increase roughly at same time that K_{rot} decreases

ix. (**0.4 marks**)

From 20,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = I_1\left(-\dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{2}}\right) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{\mathbf{3}} \tag{22}$$

Taking cross product with $\hat{\mathbf{3}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{3}} &= I_1\left(\dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{2}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{1}}\right) \\ &= I_1(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}})\end{aligned} \tag{23}$$

x. (**2.1 marks**)

Using Newton's third laws with 13 and 15:

$$m\ddot{\mathbf{s}} = (N - mg)\hat{z} + \mathbf{F}_f \tag{24}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{a} \times (N\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}_f) \tag{25}$$

Differentiating 18 again:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\ddot{\mathbf{s}} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \qquad (26)\\ &= \ddot{\mathbf{s}}.\hat{\mathbf{z}} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega} \times \alpha R\hat{\mathbf{3}} - \boldsymbol{\omega} \times R\hat{\mathbf{z}}\right).\hat{\mathbf{z}} \quad \text{using 1}\\ &= \frac{-mg + N}{m} + \frac{\alpha R}{I_1}\frac{d}{dt}(\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{3}}).\hat{\mathbf{z}} - R\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \hat{\mathbf{z}}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad \text{using 24, 23, and } \dot{\hat{\mathbf{z}}} = 0\\ &= \frac{-mg + N}{m} + \frac{\alpha R}{I_1}\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \times \hat{\mathbf{3}}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \frac{\alpha R}{I_1}\left(\mathbf{L} \times \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Substituting in 25 and 8,

$$\begin{aligned} 0 &= I_1(N - mg) + m\alpha R\left((\mathbf{a} \times (N\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}_f)) \times \hat{\mathbf{3}}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + m\alpha R\left(\mathbf{L} \times (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}})\right) \cdot \hat{\mathbf{z}}\\ &= I_1(N - mg) + m\alpha RN\left(-\mathbf{a}(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{3}}) + \hat{\mathbf{z}}(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{3}})\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + m\alpha R\left(-\mathbf{a}(\mathbf{F}_f \cdot \hat{\mathbf{3}}) + \mathbf{F}_f(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{3}})\right) \cdot \hat{\mathbf{z}}\\ &+ m\alpha R\left(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}) - \hat{\mathbf{3}}(\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega})\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad \text{using 12} \qquad (27)\\ &= I_1(N - mg) + m\alpha RN\left(-\cos\theta\mathbf{a} + R(\alpha - \cos\theta)\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + m\alpha R\left(-F_{f,x}\sin\theta\mathbf{a}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}}\\ &+ m\alpha R\left(I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\boldsymbol{\omega} - \left(I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{\mathbf{3}}\right)\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad \text{as } \mathbf{F}_f \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0, \text{ and using 20, 22}\\ &= I_1(N - mg) + m\alpha RN\left(-R(\alpha\cos\theta - 1)\cos\theta + R(\alpha - \cos\theta)\right) + m\alpha R\left(-R(\alpha\cos\theta - 1)F_{f,x}\sin\theta\right) \text{ using 6}\\ &+ m\alpha R\left(I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}\right) - \cos\theta\left(I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right) \quad \text{using 5, 19,3} \qquad (28) \end{aligned}$$

Gathering terms with and without the normal force in 28, and noting $F_{f,x} = -\frac{v_x\mu_k}{|\mathbf{v_A}|}N$,

$$\begin{aligned} &I_1mg - m\alpha RI_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})) + m\alpha RI_3\cos\theta\left(I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right)\\ =&N\left[I_1 + m\alpha^2R^2(1 - \cos^2\theta) + m\alpha R^2\frac{v_x\mu_k}{|\mathbf{v_A}|}(1 - \alpha\cos\theta)\right] \end{aligned}$$

Rearranging:

$$\begin{aligned} N &= \frac{I_1mg - m\alpha RI_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})) + \cos\theta(I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta))}{I_1 + m\alpha^2R^2(1 - \cos^2\theta) + m\alpha R^2\frac{v_x\mu_k}{|\mathbf{v_A}|}(1 - \alpha\cos\theta)}\\ &= m\frac{I_1g + \alpha R\left(I_1\cos\theta(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) - I_3\sin^2\theta\dot{\phi}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right)}{I_1 + m\alpha R^2\sin\theta\left(\alpha\sin\theta - \frac{\mu_kv_x}{|\mathbf{v_A}|}(1 - \alpha\cos\theta)\right)} \end{aligned}$$

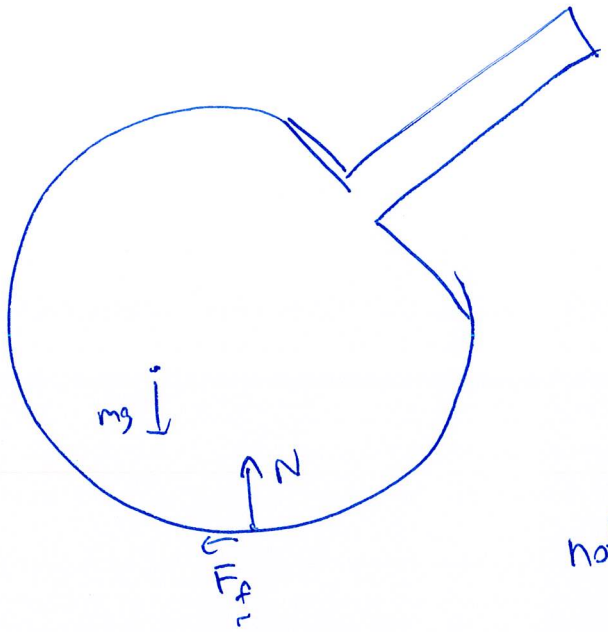
xi. (**1.5 marks**)

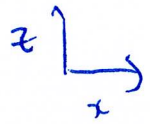
The angular momentum about the centre of mass is nonconstant precisely because there is an external torque about the centre of mass. This external torque is given by 14. Thus is must be always orthogonal to the moment arm $\mathbf{a}$, the vector from the centre of mass to the point of contact A where the frictional and normal forces apply. Thus, the angular momentum in the direction of $\mathbf{a}$ is necessarily constant, and $\mathbf{v} = \mathbf{a}$.

To demonstrate this mathematically, 8, 15, 23 allow

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \mathbf{a} + \alpha R\mathbf{L} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt}\\ &= (\mathbf{a} \times (N\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F_f})) \cdot \mathbf{a} + \frac{\alpha R}{I_1}\mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})\\ &= 0 \end{aligned}$$

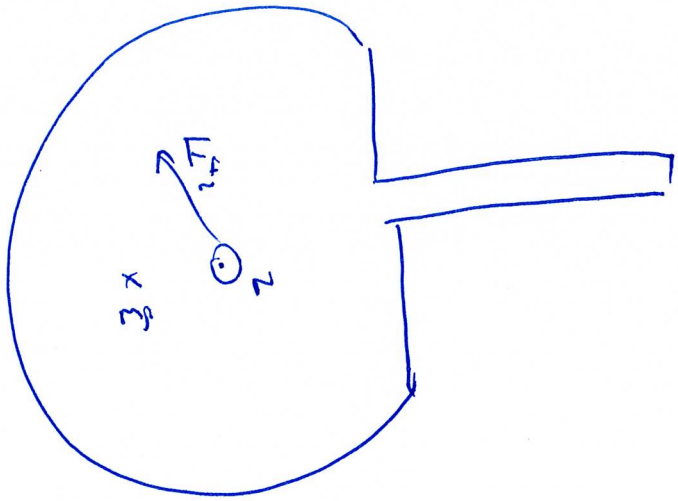
Q3 A1 SOLN





note: direction of F_f unimportant

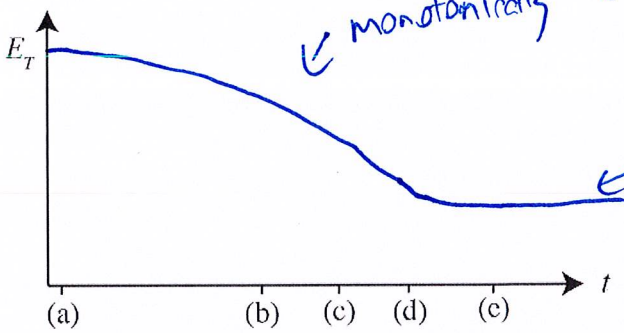


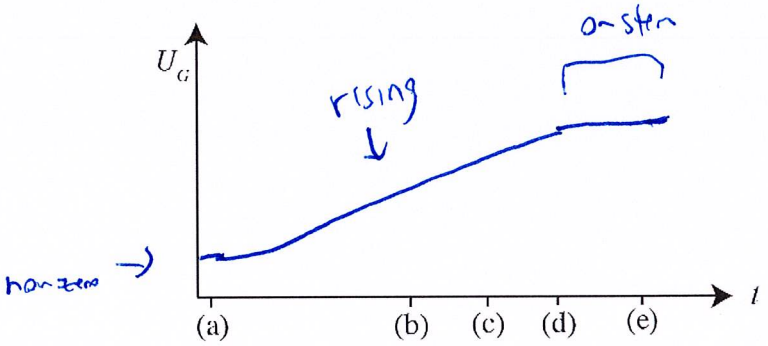


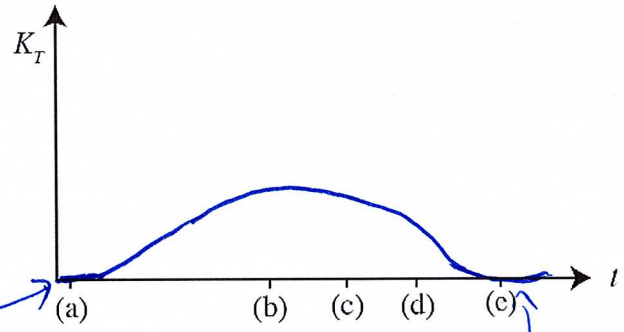


v_A in direction of $-F_L$

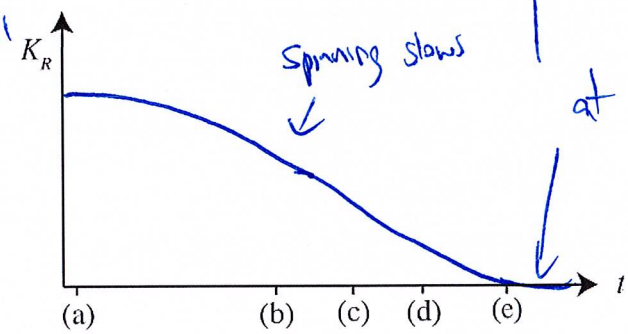
A.8 1.2 pt)







spinning upright $\Rightarrow$ K_T small



Sample solutions for Experiment 1: Static response of a magnetically active fluid

General Note: these solutions look brief for many parts. Students do, however, have to manipulate the equipment and try to take good data, which will require taking some time. The solutions try to indicate some of the tricks.

A1: Measurement taken on sample bottle: $\Delta z = 0.061 \pm 0.004$ m, when well balanced. (0.5 for good z, 0.3 for reasonable uncertainty) *Expect to see multiple attempts for full credit*

A2: Density difference gives the nett buoyant force, so balancing gravitational and magnetic forces: $\Delta\rho g = 3\,\chi B_r^2 a^4 l^2 / 8\mu_0 z^7$ (0.3)

Need to divide by g to rho, then substituting in the values for the large magnet yields

$\Delta\rho = 15$ kg m^{-3} (0.3)

Uncertainty sources: primarily z - hard to measure but can be controlled, and χ - not actually constant for a superparamagnet.
Any reasonable uncertainty method is fine. Using the data above, an estimate of 6 kg m^{-3} (0.2) could be made. Students should have some indication of where their labels come from.

Fresh bottles will be measured.

B1: $z_{crit} = 22 \pm 1$ mm (from uncertainty in when spikes appear) (0.2 + 0.1)

$\lambda = 6 \pm 1$ mm (from angle through the glass causing uncertainty about measurements of the incipient wavelength) (0.2 + 0.1)

Expect multiple attempts for full credit

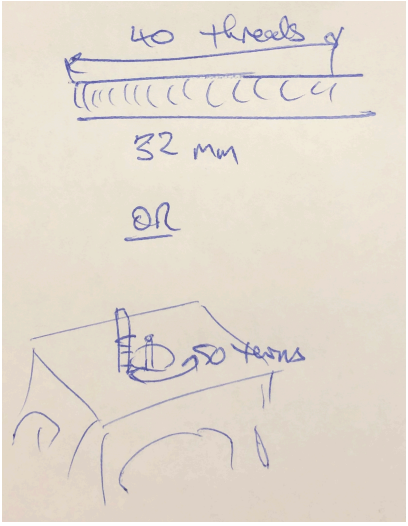
Points will be given to good values. Doing this part is easiest if the bottle is on its side, although it can be done with the bottle upright.

B2: It may look as though there are a lot of points for nothing much here, but the credit is for the experimental skill that goes into taking high quality data. It is possible to be quite precise if one is careful and this will be rewarded here as well as the calculation details..

Surface tension may be calculated using the relationship above. It also requires the density difference from the earlier part, meaning that a large uncertainty in both parts will compound to the point where the uncertainty in this part is unreasonable.

For the values in these sample solutions $\sigma = 1.3 \times 10^{-2}$, N m^{-1} (0.3 if correct within an order of magnitude). Uncertainty estimate: in these data, $\Delta\sigma = 6 \times 10^{-3}$ N m^{-1} . (0.2 if correctly calculated from a reasonable method, 0.1 additional if less than 50%).

C1: There are many solution approaches.. All need to count threads and measure distance. For a diagram of a useful setup, **0.2**. For example:



0.2 for measurements and calculations.

Students should find that
$\Delta z = 0.80 \pm 0.02$ mm (**0.2**)

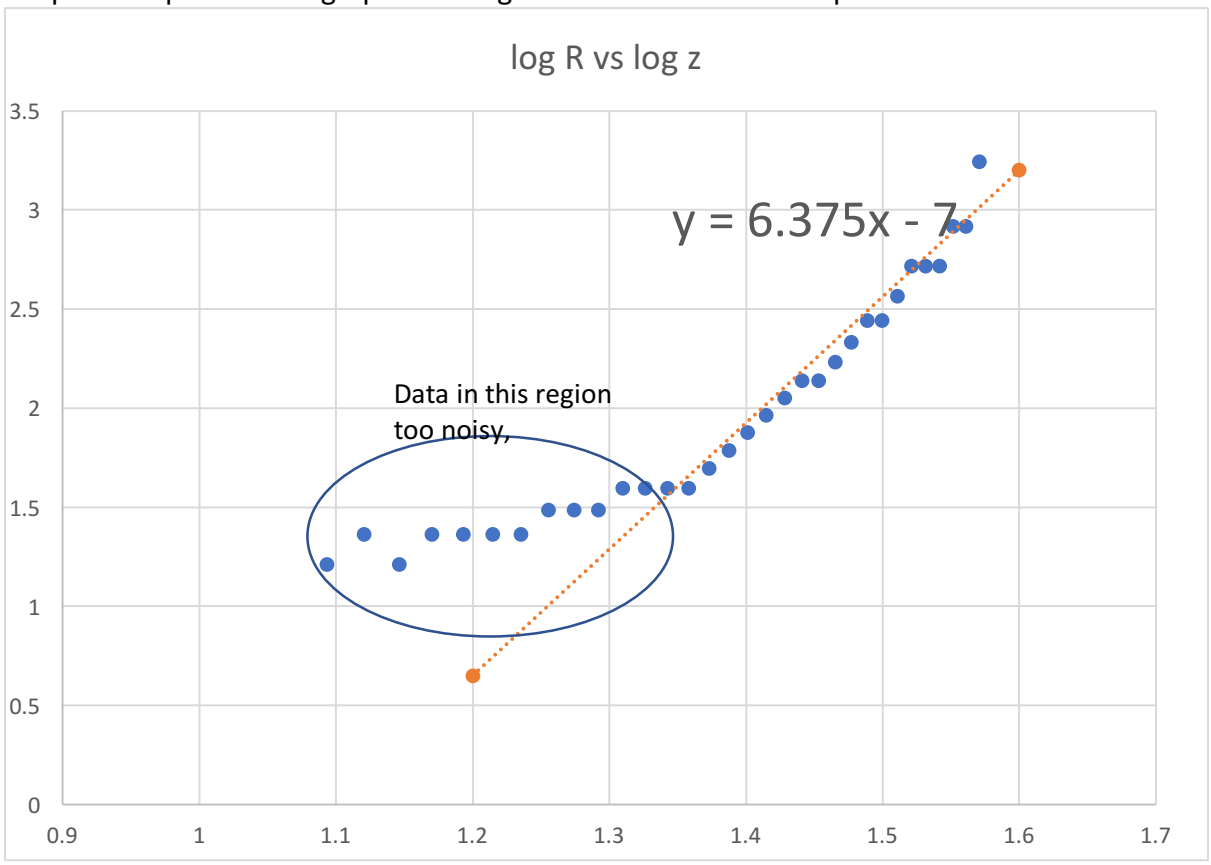
If a visual counting technique is used, at least three measurements are expected. If a turn-by-turn method, then distance measurements should be taken for at least three numbers of turns.

C2: Table of measurements:

turns	length of ligh	z (has offset)	M	R	z (corrected)	log z	log R
32.50	20.00	26.00	1.00	#DIV/0!	38.00	1.58	#DIV/0!
31.50	19.00	25.20	0.95	1748.00	37.20	1.57	3.24
30.50	18.00	24.40	0.90	828.00	36.40	1.56	2.92
29.50	18.00	23.60	0.90	828.00	35.60	1.55	2.92
28.50	17.00	22.80	0.85	521.33	34.80	1.54	2.72
27.50	17.00	22.00	0.85	521.33	34.00	1.53	2.72
26.50	17.00	21.20	0.85	521.33	33.20	1.52	2.72
25.50	16.00	20.40	0.80	368.00	32.40	1.51	2.57
24.50	15.00	19.60	0.75	276.00	31.60	1.50	2.44
23.50	15.00	18.80	0.75	276.00	30.80	1.49	2.44
22.50	14.00	18.00	0.70	214.67	30.00	1.48	2.33
21.50	13.00	17.20	0.65	170.86	29.20	1.47	2.23
20.50	12.00	16.40	0.60	138.00	28.40	1.45	2.14
19.50	12.00	15.60	0.60	138.00	27.60	1.44	2.14
18.50	11.00	14.80	0.55	112.44	26.80	1.43	2.05
17.50	10.00	14.00	0.50	92.00	26.00	1.41	1.96
16.50	9.00	13.20	0.45	75.27	25.20	1.40	1.88
15.50	8.00	12.40	0.40	61.33	24.40	1.39	1.79
14.50	7.00	11.60	0.35	49.54	23.60	1.37	1.69
13.50	6.00	10.80	0.30	39.43	22.80	1.36	1.60
12.50	6.00	10.00	0.30	39.43	22.00	1.34	1.60
11.50	6.00	9.20	0.30	39.43	21.20	1.33	1.60
10.50	6.00	8.40	0.30	39.43	20.40	1.31	1.60
9.50	5.00	7.60	0.25	30.67	19.60	1.29	1.49
8.50	5.00	6.80	0.25	30.67	18.80	1.27	1.49
7.50	5.00	6.00	0.25	30.67	18.00	1.26	1.49
6.50	4.00	5.20	0.20	23.00	17.20	1.24	1.36
5.50	4.00	4.40	0.20	23.00	16.40	1.21	1.36
4.50	4.00	3.60	0.20	23.00	15.60	1.19	1.36
3.50	4.00	2.80	0.20	23.00	14.80	1.17	1.36
2.50	3.00	2.00	0.15	16.24	14.00	1.15	1.21
1.50	4.00	1.20	0.20	23.00	13.20	1.12	1.36
0.50	3.00	0.40	0.15	16.24	12.40	1.09	1.21

1.0 points for the raw measurements of number of turns and M.
0.5 points for correct conversion to R.

Graph:.. **1.0** points for a graph allowing the calculation of the exponent.



0.5 for fit to correct region
0.5 for answer n within range 6 to 7 with reasonably estimated uncertainty.

Note: if students do not account for the distance between the surface of the stand and the surface of the fluid, the log-log graph will not have a proper linear region as it does not follow a reasonable power law. In this case there will be no credit for the conversion, the fit or the answer.

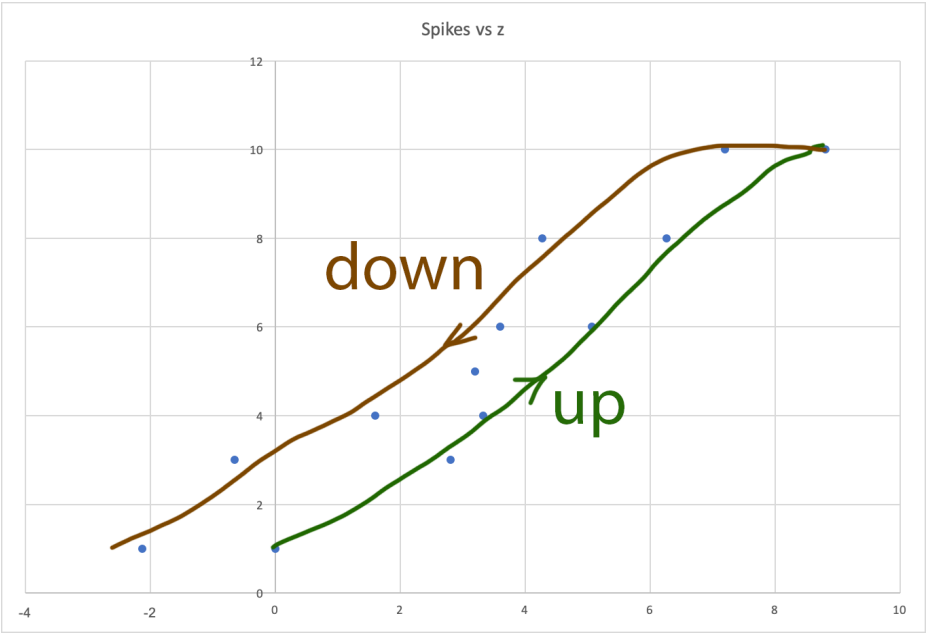
D1: Surface tension $\sigma \cong 2.3 \times 10^{-2}$N m^{-1}. **0.5** if within 10%, 0.3 within 20%, else 0.

D2: Table:

Spikes	Turns	z
1	0	0
3	3.5	2.8
4	4.16	3.328
6	6.33	5.064
8	7.82	6.256
10	11	8.8
10	2	7.2
8	5.66	4.272
6	6.5	3.6
5	7	3.2
4	9	1.6
3	11.82	-0.656
1	13.66	-2.128

1.0 for at least 6 measurements each way with conversion to z and a reasonable uncertainty estimate..
Note: this requires time and care to get the points of appearance and disappearance correctly.

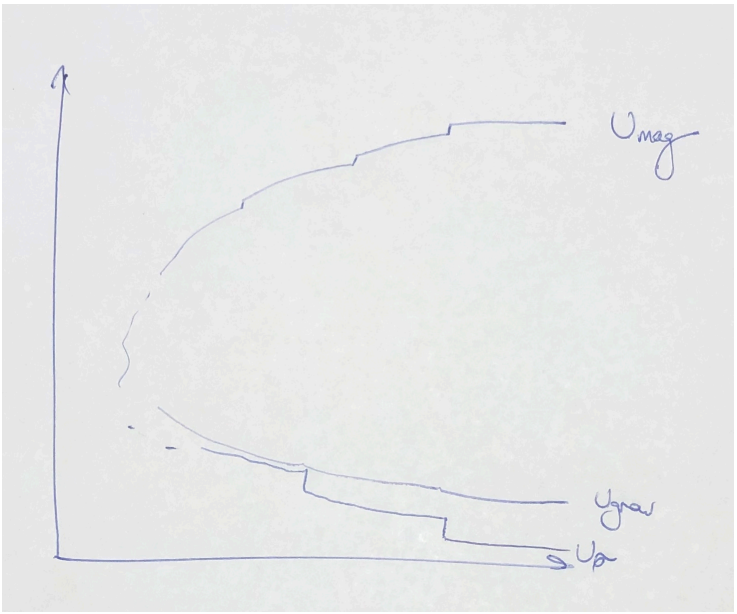
D3:



0.3 for a correctly plotted graph. 0.2 for each smooth curve fitting points. 0.3 if clear hysteresis shown: at least 1.5 mm separation in z between the up and down measurements.

Although the data are quantised they should still follow a reasonable curve.

D4:



Key features:
Magnetic energy should decrease at a rapid rate as the magnet moves closer, following a power law – as long as it looks reasonable credit will be given without trying to determine the power. There should be small steps at the spike formations as there is a slight release of magnetic potential energy from the drawing of fluid along a new unstable surface.

Surface energy should jump significantly at spike formation points and change much more slowly although still steadily throughout the rest of the time.

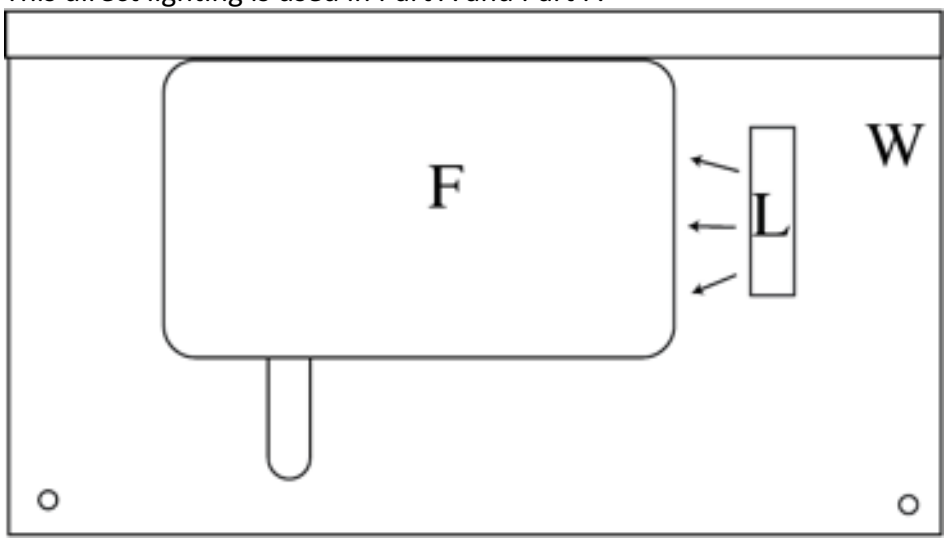
It is important that the overall energy decrease. Students should be able to tell this as the ferrofluid chamber will attract a magnet from underneath – most of the magnetic potential energy goes into lifting the magnet rather than being bound in the internal structure of the ferrofluid.

0.2 for each graph and 0.2 for correct behaviour of total energy.

Experiment 2 Solutions

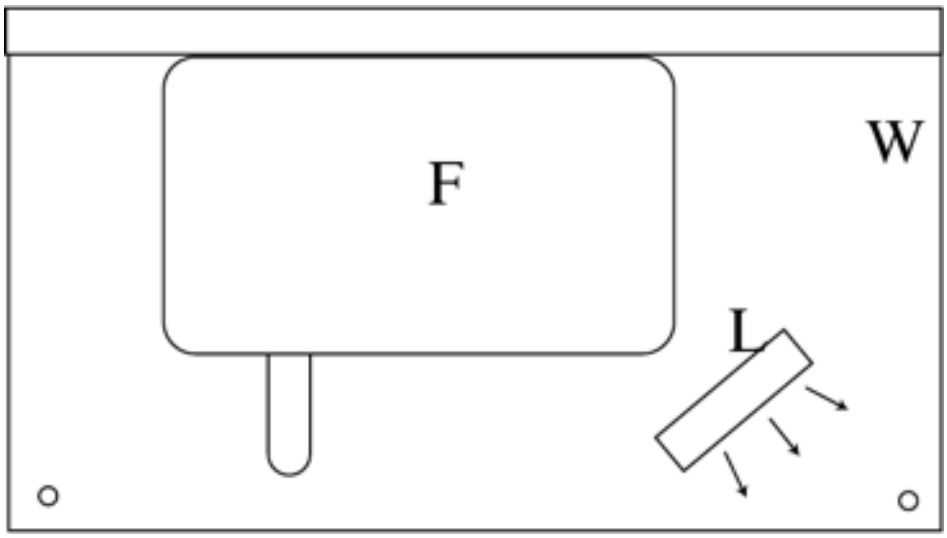
Throughout the light is used in two modes when taking videos. For parts A and D, the light is set up so that it is illuminating the ferrofluid surface through the sides of the box.

This direct lighting is used in Part A and Part F.



F – box with fluid
L – light
W – wooden base

Diffuse lighting is used for other parts. In this case the light is direction up and away from the box with ferrofluid.



A1 – Direct lighting was used, so see above for diagram.
A2. Some example frames from videos are shown below.

Note that the scale on the graticule does not directly measure position.

A measurement with a ruler of the internal length of the container is 17.3 ± 0.3 cm . The distance is equivalent to 13.4 graticule squares, so there is a factor of 17.0/13.4 to convert from graticule squares to cm.




The images above show two frames from a video of a plane pulse. The videos are recorded at 25 fps by default

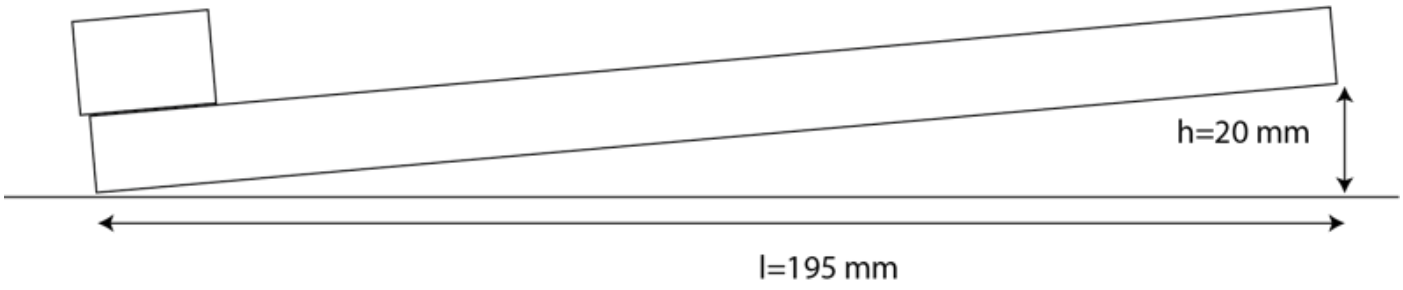
Frames	Distance (graticule squares)	Distance (m)	Speed (m/s)
8	6.5	0.83	0.26
7	6.0	0.76	0.27
9	6.8	0.85	0.24

This gives $v = 0.26 \pm 0.02$ m/s
A3. The uncertainty is estimated from the spread of values.

B1. If x=0 when t=0, then $x = vt$, however, $v = \alpha\sqrt{d}$, so $x = \alpha\sqrt{d}t$.
Since the depth varies linearly, $d = y\ tan\theta$. Hence, $x = \alpha\sqrt{y \tan\theta}\, t$, or equivalently, $x^2 = \alpha^2 \tan\theta\ t^{2}y$.

This approximation will be least valid when the direction of propagation varies the most from the x-direction, and when the depth is least as there are nonlinear effects. Both of these happen for small y, in other words, $y < k$ for some constant k.

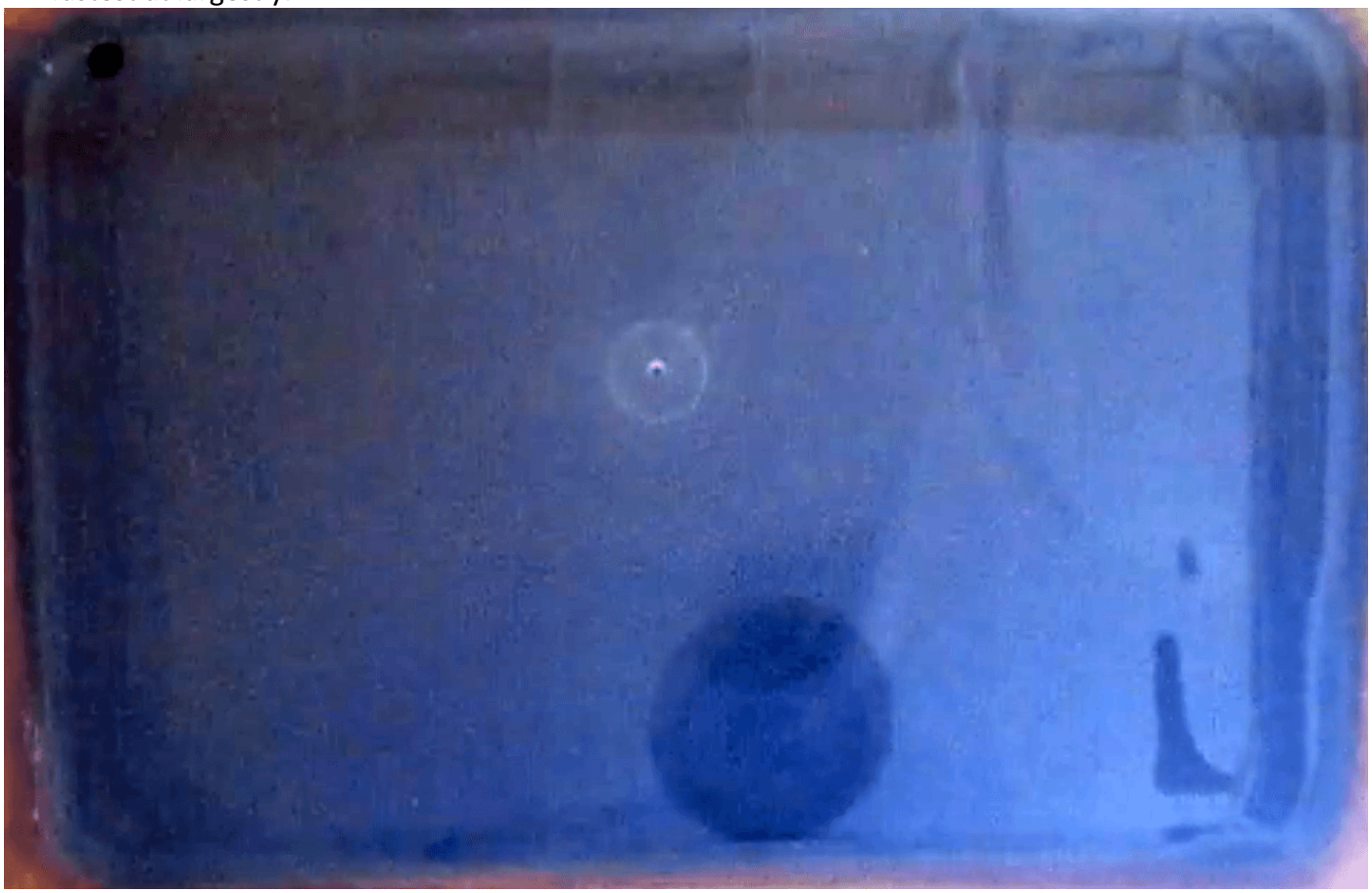
B2.



$h = 20 \pm 1\ mm$, $l = 195 \pm 2\ mm$. The latter uncertainty is larger due to difficulty lining up ruler with projection of end of the board.

B3.

B – fastest at largest y.



A – slowest at y=0.

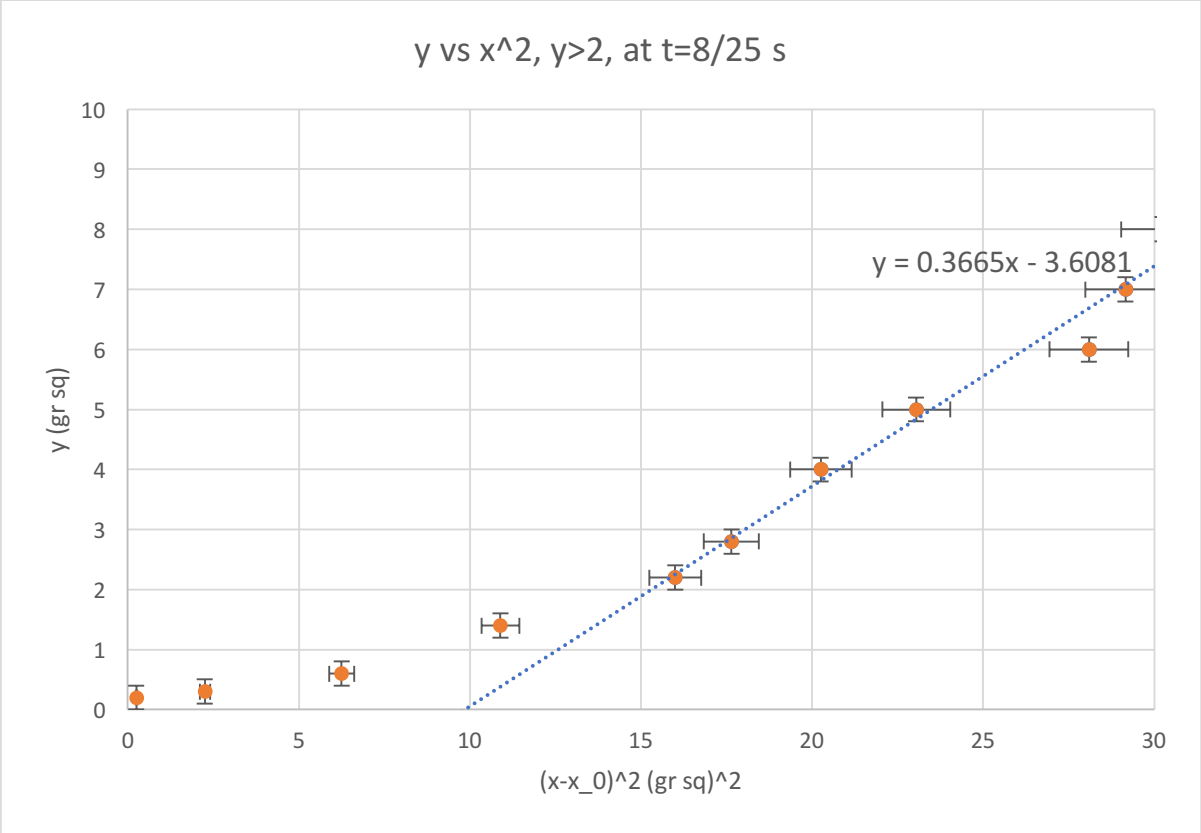
B4. i. Diffuse light is more appropriate as the pulses are curved, so it is not possible to get direct reflections from the available source from enough of the pulse. See the start for a diagram of light position.

ii.

x (gr sq)	y (gr sq)	x^2 (gr sq^2)	(x-x_0)^2			
5	0.2	25	0.25			
6	0.3	36	2.25	t=	0.28	s
7	0.6	49	6.25	x_0=	4.5	gr sq
7.8	1.4	60.84	10.89			
8.5	2.2	72.25	16			
8.7	2.8	75.69	17.64			
9	4	81	20.25			
9.3	5	86.49	23.04			
9.8	6	96.04	28.09			
10	8	100	30.25			
9.9	7	98.01	29.16			

Here x_0 is the x coordinate of the position where the pulse front is at y=0. This is treated as the new origin.

B5



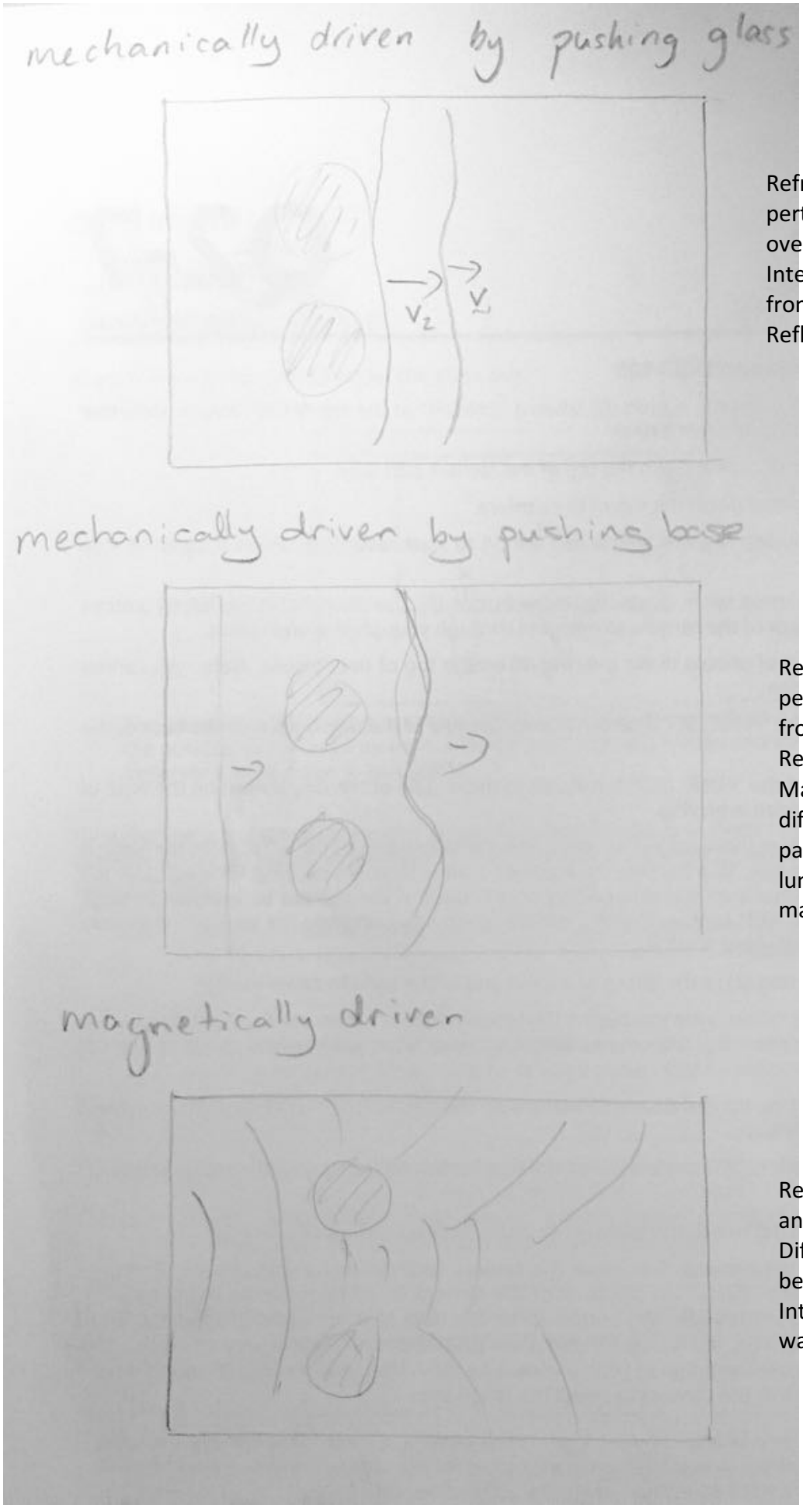
Converting to SI units, the slope m = 0.280 /m.

$$m = \alpha^2 \tan\theta\, t^2$$

Hence $\alpha = 5.9 \pm 0.5\ m^{1/2}s^{-1}$, and $v(d) = 5.9 \times\sqrt{d}$.

Uncertainty was calculated from the slope of the line of worst fit m = 0.331/m.

Part C

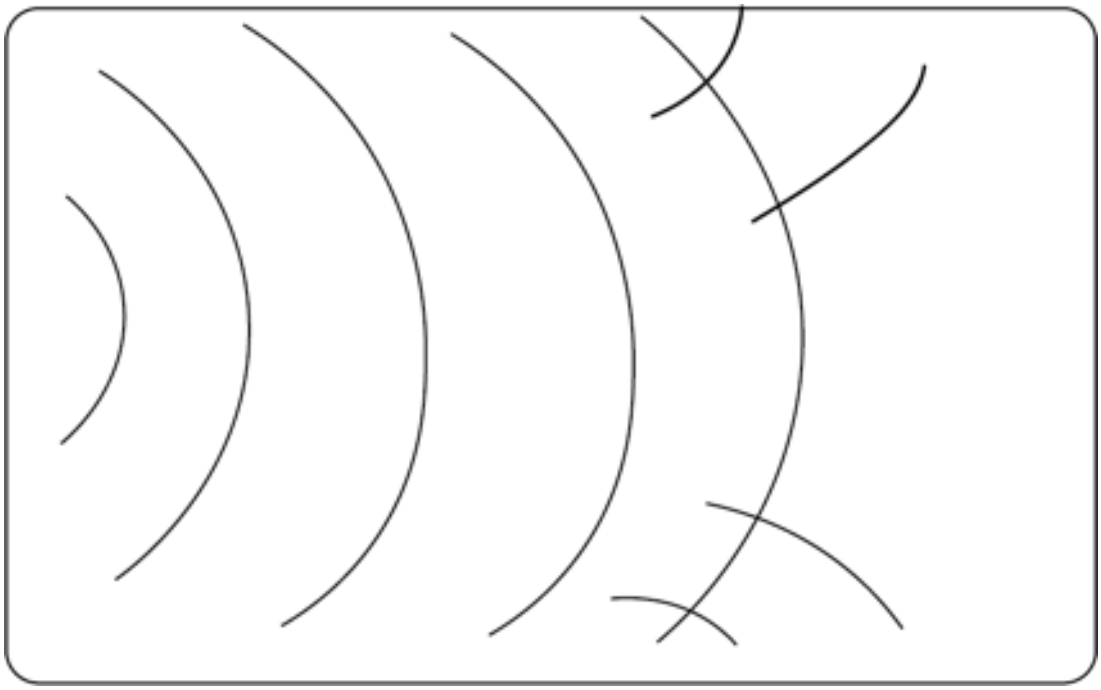


Refraction observed by perturbation of front over magnets,
Interference when the fronts meet,
Reflections from end.

Refraction as wave is perturbed over the fronts,
Reflections from ends,
Maybe some diffraction after passing between the lumps over the magnets.

Reflections from side walls and ends
Diffraction after passing between the lumps.
Interference from many waves crossing.

D1



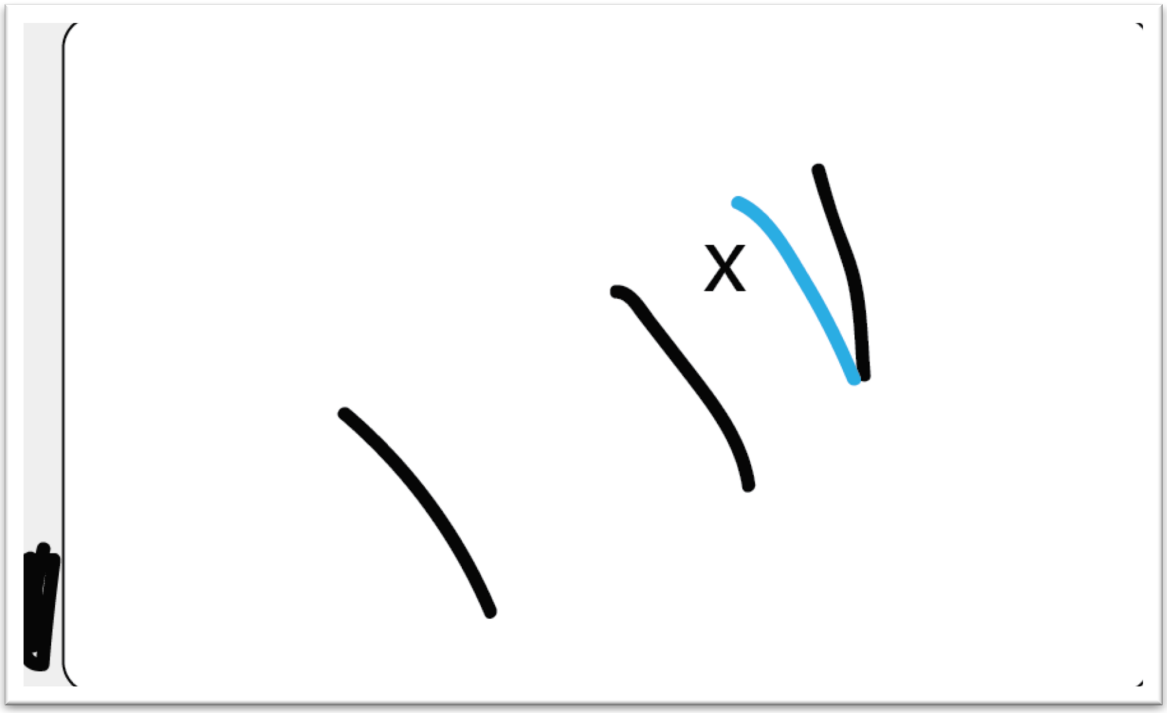
Note the multiple lines demonstrate times rather than wave fronts.

D2 Speed measurements of the magnetically driven waves are around the same, to somewhat faster than small amplitude mechanically driven waves. Students should find that pulses are around 0.1-0.4 (gr sq)/m faster than in A2/3.

Data and sketches should look similar to A2/3 otherwise.

The height of the lump can be estimated by observing from the side, or more accurately by using the limiting value from E1 Part C.

D3 The light was placed in the diffuse light set up. See figure near start.



The black represents observed pulses over the magnet x. The blue represents the expected positionsing of the pulseafter travelled that distance.

A wave front was observed to travel as additional 0.8 gr sq over 8 frames. The extent of the lump is assumed to be 3cm in diamete and the additional distance in the time all occurs over the lump. This means that the wave travels at a speed of around 0.35 m/s over the lump.

By looking through the side of the box, with a ruler it is estimated the height of the lump be 5mm. The expected speed of fluid of depth 9mm, compared to fluid of depth 4mm is $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ times larger, which is $\frac{3}{2} \times 0.26 \frac{m}{s} = 0.39\ m/s$. As these are estimates they are close enough that we cannot conlcude that the change in wave speed is due to anything other than the additional depth of the fluid.