可形变网格的力学性质 (总分: 20)

这里，我们研究一种在悬挂重力场中的可形变网格。它具有与单摆类似的性质。这种网格只有一个自由度，也就是说，只有一种形变的方式。这种网格的构型可以完全用一个角度α 来描述。在 19 世纪，著名物理学家麦克斯韦研究过这样的结构。近年来又发现了，这样的网格系统具有很多令人惊奇的物理性质。

如图 1 所示， N^2 个全等的等边三角盘（图中的红色三角形）由短杆自由铰接，形成 $N \times N$ 网格（$N > 1$）。图中的铰接点用小圆圈表示。等边三角盘的边长和轻杆的长度都是 l。图中的四条双虚线代表四根长滑杆。位于边缘的 N 个顶点（灰色的圆圈）约束在长滑杆上，将长滑杆作为轨道，这些顶点可以在长滑杆上自由滑动。

这四根长滑杆相互铰接成菱形，菱形的两个顶角分别为 60°和 120°, 如图 1 所示。每个三角盘的质量为 M，密度分布是均匀的。系统的其它部分没有质量。这个网格系统的构型完全由角度 α 决定。角度 α 的取值范围是 $0^\circ \le \alpha \le 60^\circ$（图 1 中显示了不同角度的一些例子）。系统像窗帘一样垂直悬挂。顶端的长杆沿水平方向固定。

我们按照图 2 选取坐标。令 $y = 0$ 为势能的零点。我们用数组 (m,n) 来标记三角盘， $m, n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ 分别代表三角盘在 x 和 y 方向上的次序。A(m,n), B(m,n) 和 C(m,n) 代表三角盘 (m,n) 的三个顶点的位置。左上角的顶点 A(0, 0)（图中的黑色大圆圈）是固定的。

整个系统的运动被约束在 x-y 平面。匀质等边三角盘相对于质心的转动惯量是 $I = Ml^2/12$。重力加速度是 g。使用 E_k 和 E_p 分别表示动能和势能。

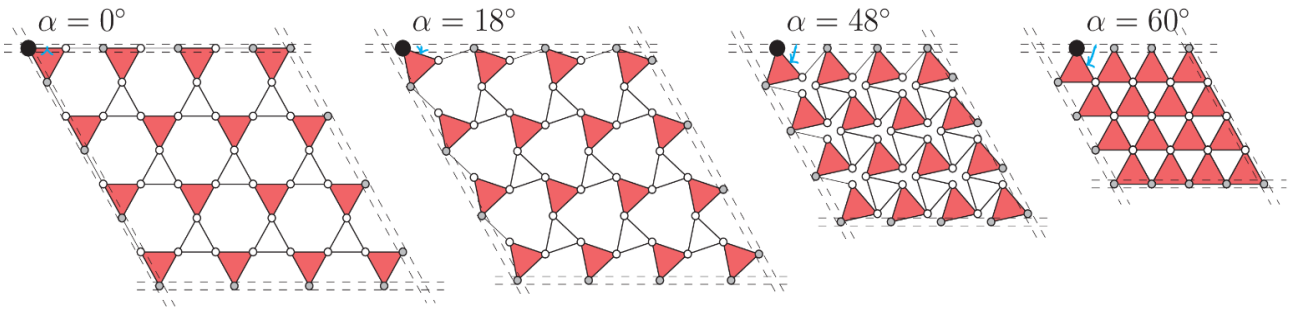


图 1

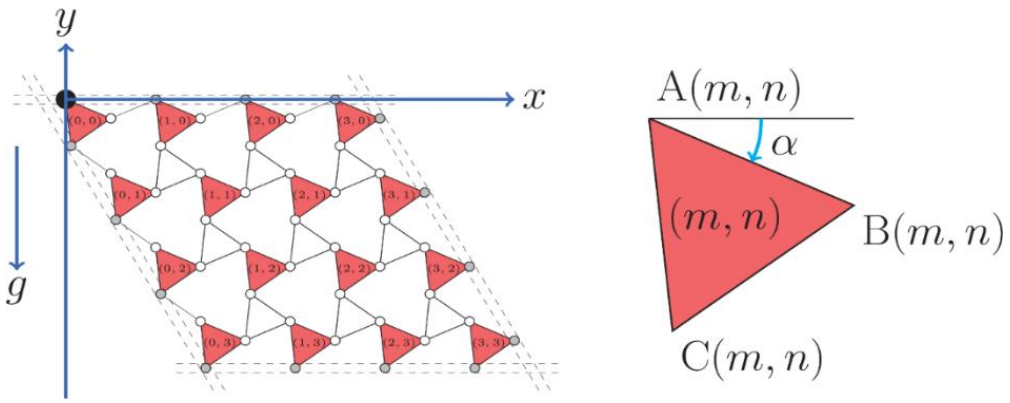


图 2

A 部分: 考虑 N=2 的情况 （如图 3 所示）：

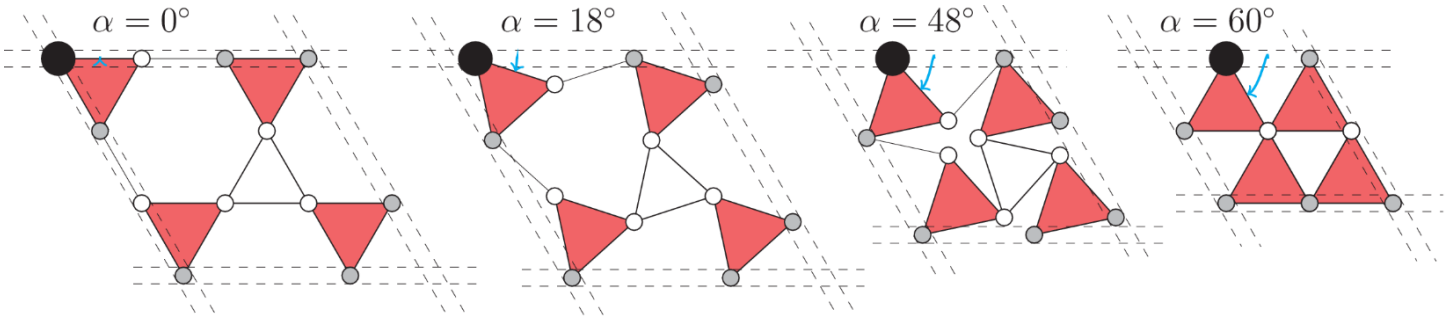


图 3

A1	令 $N = 2$，求系统处于任意角度 α 时的势能 E_{p} 。	**2 分**

A2	令 $N = 2$，求系统在引力场中处于平衡状态时的角度 α_{E} 的值。	**1 分**

A3	令 $N = 2$，在平衡态时给一个微小的扰动下，系统会简谐振动。求系统动能，用 $\Delta\dot{\alpha} \equiv \mathrm{d}(\Delta\alpha)/\mathrm{d}t$ 等来表示。并求系统简谐振动的频率 f_{E}。	**5 分**

B 部分: 考虑任意的 N:

B1	对于任意的 N，求重力作用下系统的平衡角度 α'_{E} 。	**3 分**

B2	考虑 $N \to \infty$的极限情况。给角度 α 一个微小扰动，系统势能的变化 $\Delta E_p \propto N^{\gamma_1}$，系统的动能$E_k \propto N^{\gamma_2}$，振动频率$f'_E \propto N^{\gamma_3}$。求 γ_1, γ_2 和 γ_3 的值。	**3 分**

C 部分：我们选择 $3N^2$ 个三角形顶点当中的一个，在这个顶点上施加外力，使得系统维持在$\alpha_m = 60°$。

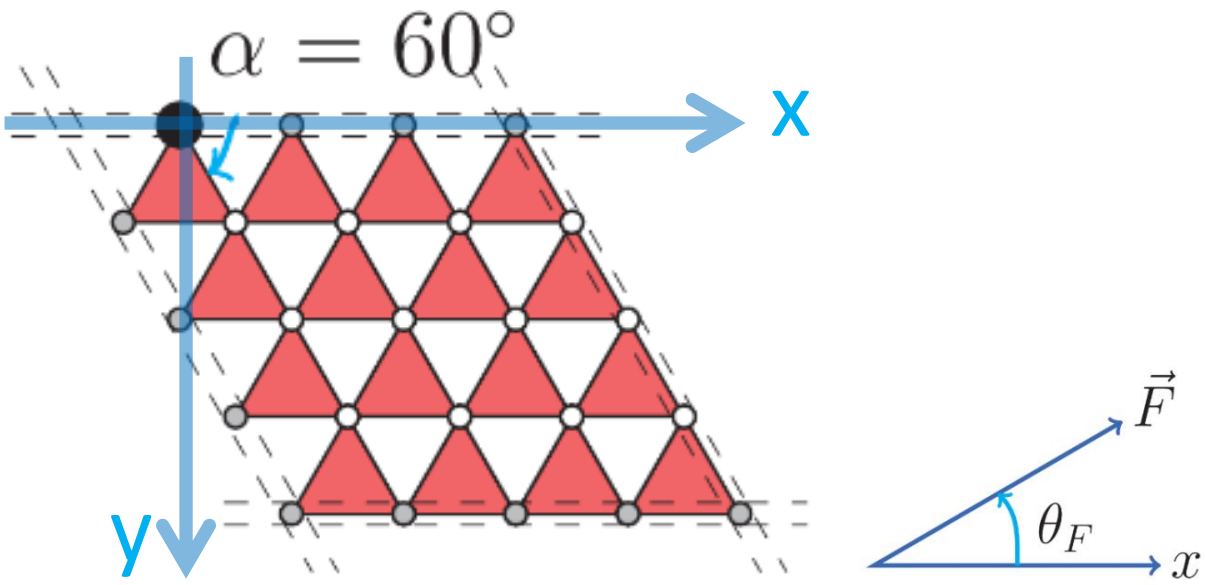


图 4

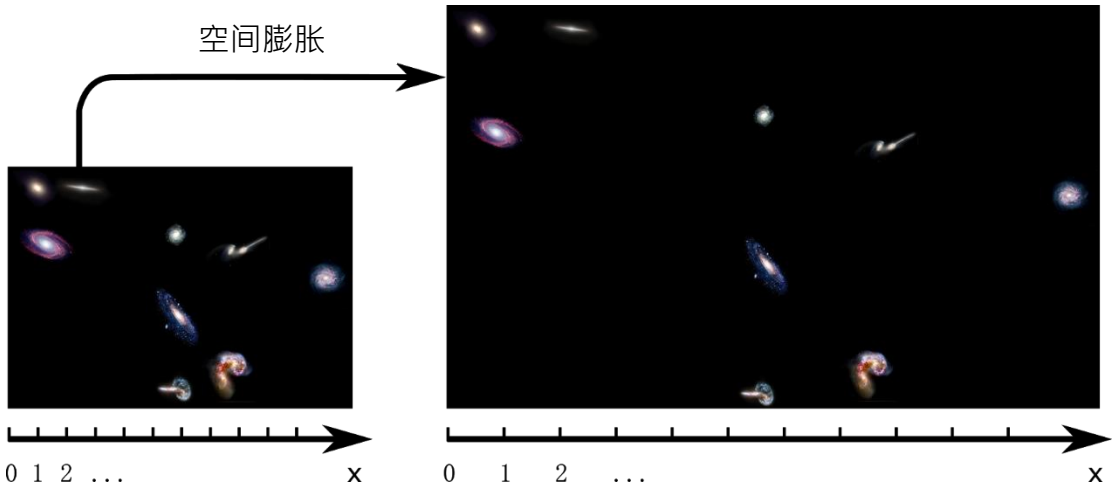
C1	为了施加的外力最小，我们应该选择哪个顶点施加外力？	**1 分**

C2	求这个最小外力的方向和大小（对于方向，用图 4 中角度 θ_F 的具体角度值来表示力的方向）。	**5 分**

膨胀的宇宙

(总分:20 分)

宇宙膨胀是现代宇宙学中最重要的观测事实。在宇宙膨胀过程中，随着时间推移，空间不断膨胀。于是，宇宙中物体之间的距离也随之膨胀。为了方便地计算宇宙膨胀造成的影响，我们引入“共动”坐标系 $\vec{r}=(x,y,z)$，用以标记膨胀宇宙中的空间位置。在宇宙膨胀过程中，共动坐标系下两物体间坐标的共动距离 $\Delta r=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ 是恒定不变化的（这里我们假设没有本征运动，也就是说，我们这里考虑的物体只随着宇宙的膨胀而运动，而自己没有额外的运动）。下面示意图中描述了宇宙膨胀（注意，这张示意图只含有二维空间，但是我们的真实宇宙有三维空间。）。



现代宇宙学的理论是建立在爱因斯坦的广义相对论的基础上的。但是，如果做一些适当假设，我们也可以简单的用牛顿的万有引力理论框架来理解宇宙学。下面的问题中，我们将只在牛顿的万有引力理论框架下理解宇宙。

为了描述“物理距离”，我们引入“尺度因子”$a(t)$。两个共动坐标点$\vec{r}_1$和$\vec{r}_2$之间的物理距离为

$$\Delta r_{\mathrm{p}}=a(t)\Delta r$$

因为宇宙的膨胀，$a\,(t)$是随时间增加的增函数。

在大尺度情况---远大于星系团的尺度下，宇宙可以近似看成是均匀和各向同性的。所以，我们考虑宇宙的一个玩具模型：宇宙中布满了均匀分布的粒子。粒子如此之多，以致于我们可以用连续的流体来描述这些粒子。我们假设粒子数是守恒的。

目前，我们的宇宙主要是非相对论物质为主的。对非相对论物质而言，相比于质量能量，动能是可以忽略的。我们用$\rho_{\mathrm{m}}(t)$代表t时刻非相对论物质的物理能量密度，即在单位物理体积内的能量（也就是说，“物理能量密度”只由非相对论质量能量决定，不包括引力势能等）。我们把当前时刻记作t_0

A	推导t时刻非相对论的物质的物理能量密度$\rho_{\mathrm{m}}(t)$，用 $a(t)$,$a(t_0)$和$\rho_{\mathrm{m}}(t_0)$表示。	**2 分**

除了非相对论物质以外，我们现在的宇宙中还有一小部分“辐射”成分。这些“辐射”成分是由无质量粒子（例如光子）组成的。无质量粒子的物理波长会随着宇宙的膨胀被拉长为$\lambda_{\mathrm{p}} \propto a(t)$。我们用$\rho_{\mathrm{r}}(t)$代表“辐射”成分的物理能量密度。

B	推导在t时刻的“辐射”成分的物理能量密度$\rho_{\mathrm{r}}(t)$，用 $a(t)$,$a(t_0)$和$\rho_{\mathrm{r}}(t_0)$表示。	**2 分**

考虑处于热平衡下的无相互作用的光子气体。光子气体的温度随时间的变化可以写作$T(t) \propto [a(t)]^{\gamma}$.

C	计算γ的值。	**2 分**

考虑一种无相互作用的粒子**X**的热力学。假设宇宙膨胀足够慢且绝热，因而**X**的熵不随时间变化。我们把**X**的物理能量密度记为$\rho_{\mathrm{X}}(t)$（包括质量能量和内能），把**X**的物理压强记为$p_{\mathrm{X}}(t)$。

D	推导$\mathrm{d}\rho_{\mathrm{X}}(t)/\mathrm{d}t$，用$a(t)$, $\mathrm{d}a(t)/\mathrm{d}t$,$\rho_{\mathrm{X}}(t)$和$p_{\mathrm{X}}(t)$表示。	**4 分**

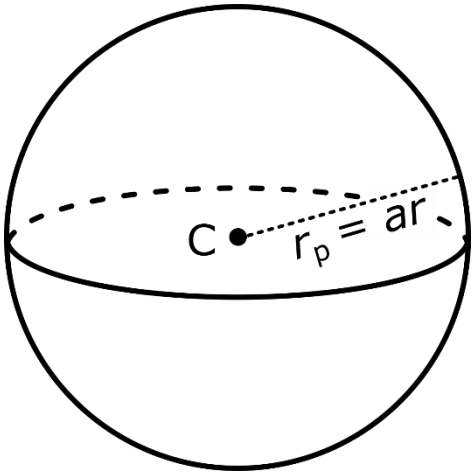
考虑一颗星体 S。在当前时刻t_0，这颗星和我们之间的物理距离为$r_p = a(t_0)r$，其中r是共动距离。这里我们忽略本动运动，也就是说，我们以及这颗星都只服从宇宙膨胀，而没有额外运动。

设这颗星以光功率P_{e}均匀地向所有方向释放能量。我们利用望远镜观测它的星光。为简单起见，我们假设望远镜可以以 100%的效率接收所有波段的光。设望远镜镜片的面积为 A。

E	推导望远镜从星体 S接收到的功率P_{r}，用 r, A, P_{e}，星光发出时刻的尺度因子$a(t_{\mathrm{e}})$，和目前（即星光被望远镜接受时刻）的尺度因子$a(t_0)$表示。	**4 分**

假如没有引力，宇宙膨胀的速度会是一个常数。在牛顿力学的框架下，可以理解为，没有引力的情况下，物质以恒定速度相互远离，所以 $\mathrm{d}a(t)/\mathrm{d}t$是一个只依赖于初始条件的常数。

现在考虑牛顿引力对尺度因子 $a(t)$的影响。假设宇宙充满了均匀、各向同性的非相对论物质。



如上图所示，假设C点是宇宙的中心（这个假设在爱因斯坦的广义相对论中是不必要的，不过这超出了本题的考察范围）。我们把宇宙中的物质分布想象为以 C 为中心的一系列薄球壳。让我们考虑其中的一个半径为r的薄球壳，如上图所示（注意，此处共动距离r，不随时间变化）。

F	利用球壳的运动推导$\mathrm{d}a(t)/\mathrm{d}t$, $a(t)$和质量能量密度$\rho(t)$之间的关系。（这个关系中可以含有一个依赖于初始条件的常数。）	**5 分**

G	(a) 基于问题 **F** 中描述的模型，宇宙是 (a) 加速膨胀的，还是 (b) 减速膨胀的? 选择 (a)或者 (b).	**1 分**

事实上，在 1998 年，科学家发现，宇宙中充斥着一种新的能量形式。这种新的能量形式使得我们真实的宇宙膨胀加速度与问题 G 中的结论不同。

超导体中磁场的效应 (总分: 20)

电子是一种基本粒子。电子不仅带有电荷，而且因为自旋角动量而具有内禀的磁矩。由于库仑作用，真空中的电子彼此排斥。但是，在一些金属里，因为晶格的振动，电子可以变得彼此吸引。当金属的温度低于临界温度 T_c 时，具有相反动量方向和相反自旋方向的电子可以形成电子对，这种电子对叫做“库珀对”。金属中自由运动的电子具有能量 $\frac{p^2}{2m_e}$，其中 p 为电子动量，m_e 为电子质量。形成库珀对后每个电子的能量与自由电子的能量相比减少了 D。库珀对可以在金属中不受阻力地运动，有库珀对的金属处于超导状态。

但是，即使金属的温度低于 T_c，超导状态仍然可以被加在金属上的外磁场所破坏。外磁场可以通过两种效应破坏金属的超导状态。在本题中，你将计算这两种效应。

第一种效应是“顺磁效应”。超导状态下库珀对中的两个电子具有相反的自旋方向，但是在外加磁场中，所有电子自旋方向相同并且平行于外磁场方向，因而具有更低的能量，此时不能形成库珀对。

第二种效应是“抗磁效应”：增加磁场强度将改变库珀对的运行轨道，进而增加其能量。当外加磁场的强度大于一个临界值 B_c 时，库珀对增加的能量多于 2D。于是，电子不再倾向于形成库珀对。

最近，物理学家发现了一种叫做伊辛超导体的新型超导体。即使外磁场强至 60 特斯拉（大约是目前实验室可以实现的最强磁场），这种超导体仍然可以维持超导状态。你将通过本题的计算理解伊辛超导体能够克服顺磁效应和抗磁效应的原因。

A 磁场中的电子

考虑一个半径 r，电荷-e，质量 m 的圆环。电荷和质量在圆环上均匀分布（如图 1 所示）。

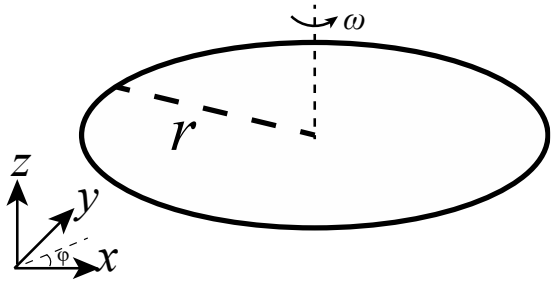
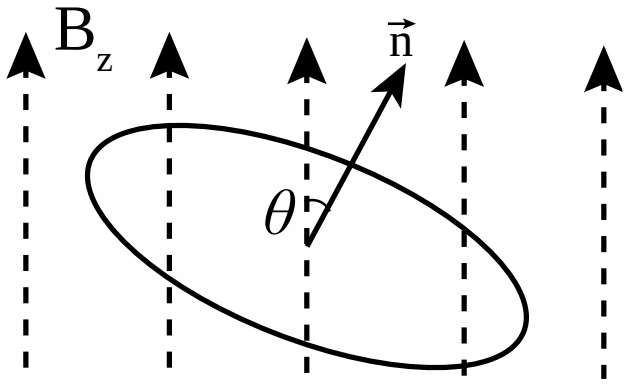


图 1

A1	当圆环以角速度 $\vec{\omega}$ 转动，求圆环的角动量 $\vec{L}$（包括大小和方向）。	**2 分**
A2	圆环磁矩的大小为 $\left\|\vec{M}\right\| = IA$，其中 I 是电流，A 是圆环的面积。求圆环的磁矩 $\vec{M}$ 和角动量 $\vec{L}$ 之间的关系。	**2 分**

设圆环的法向为 $\vec{n}$，且 $\vec{n}$ 与外磁场之间夹角为 θ，如图 2 所示。

A3	设外磁场是均匀的，方向是 z 方向。对(A1)部分中所讨论的圆环，将之放在外磁场 B_z 中，求圆环的势能 U。（设 θ = π/2 时，系统 势能为 0。）  图 2	**2 分**

A4	电子具有内禀角动量，叫做自旋角动量。特定方向电子自旋角动量的大小是$\frac{\hbar}{2}$，其中$\hbar = h/2\pi$，h是普朗克常数。 当电子自旋方向与外磁场方向平行和反平行时，记系统的势能分别为 U_{up} 和 U_{down}。求势能 U_{up} 和 U_{down}。 请用玻尔磁子 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788\times10^{-5}\,\text{eV}\cdot\text{T}^{-1}$和外磁场的强度 B 表达你的计算结果。	**1 分**
A5	根据量子力学计算得到，系统的势能$\tilde{U}_{up}$和$\tilde{U}_{down}$实际上分别是(A4)部分得到的 U_{up} 和 U_{down} 的 2 倍。设外加磁场为 1 特斯拉。当电子自旋方向与外磁场方向平行和反平行时，分别求$\tilde{U}_{up}$ 和$\tilde{U}_{down}$的值。 在后面的问题中，你应该使用$\tilde{U}_{up}$ 和$\tilde{U}_{down}$进行计算。	**1 分**

B. 外磁场中顺磁效应对库珀对的影响

在本部分的问题中，我们考虑外磁场中顺磁效应对库珀对的影响（如图 3 所示）。

理论研究表明，在超导体中，自旋方向相反的两个电子可以形成库珀对，使得系统能量更低。库珀对的能量可以写作 $\frac{p_1^2}{2m_e}+\frac{p_2^2}{2m_e}-2D$，其中前两项是库珀对的动能，最后一项是电子形成库珀对之后节约的能量。D是一个正的常数。

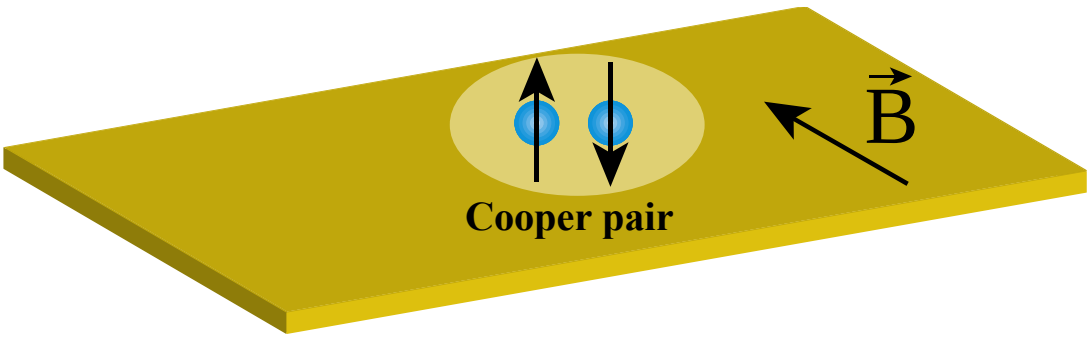


图 3（图中 Cooper pair 意思是库珀对）

B1	假设外磁场只对电子的自旋起作用，而对电子的轨道运动没有影响。在均匀磁场 $\vec{B}=(B_x,0,0)$ 的作用下，求库珀对的能量 E_S。注意库珀对中的电子自旋是相反的。	**1 分**
B2	在正常态（也就是非超导态），电子不形成库珀对。在均匀磁场 $\vec{B}=(B_x,0,0)$ 的作用下，求两个电子的总能量 E_N。请使用(A5)部分中定义的 $\tilde{U}_{up}$ 和 $\tilde{U}_{down}$ 进行计算，并忽略外磁场对电子轨道运动的影响。	**1 分**
B3	在零温度，系统倾向于处在最低能量的状态。求用Δ表示的临界磁场强度 B_P，使得在 $\left\|\vec{B}\right\|>B_P$ 时，超导现象消失。	**1 分**

C. 外磁场中抗磁效应对的影响

在本部分问题中，我们将忽略外磁场对电子自旋的影响。我们只考虑库珀对的轨道运动受外磁场影响的情况。

在零温度，在磁场 $\vec{B}=(0,0,B_z)$ 作用下，超导态和正常态之间的能量差可以写成

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(-\alpha\psi-\frac{\hbar^2}{4m_e}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{e^2B_z^2x^2}{m_e}\psi\right)\mathrm{d}x.$$

这里 $\psi(x)$ 是位置 x 的函数，它与 y 无关。$\psi^2(x)$ 是在 x 处找到库珀对的概率密度。$\alpha>0$ 是一个常数，它和形成库珀对时系统节约的能量有关。F 中的第二和第三项与磁场中库珀对的动能有关。

在零温度，系统倾向于处在能量 F 最小的状态。这种情况下，$\psi(x)$ 可以表示成 $\psi(x)=\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\lambda x^2}$，其中 $\lambda>0$。

C1	求 λ，用 e，B_z 和 $\hbar$ 表示。 你可能会用到以下积分公式（这里 a 是一个常数） $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，　$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	**3 分**

C2	在临界磁场强度 B_z 时，超导态和正常态的能量相同。计算临界磁场强度 B_z 与α的关系。	**2 分**

D 伊辛超导体

在具有自旋-轨道耦合的材料中（自旋-自旋耦合可以忽略），具有动量$\vec{p}$的电子受到内磁场 $\vec{B}_{1\perp}=(0,0,-B_z)$ 的作用。具有动量 $-\vec{p}$ 的电子受到相反的内磁场 $\vec{B}_{2\perp}=(0,0,B_z)$的作用。两个内磁场只影响电子的自旋，如图 4 所示。具有这种内磁场的超导体叫做伊辛超导体。

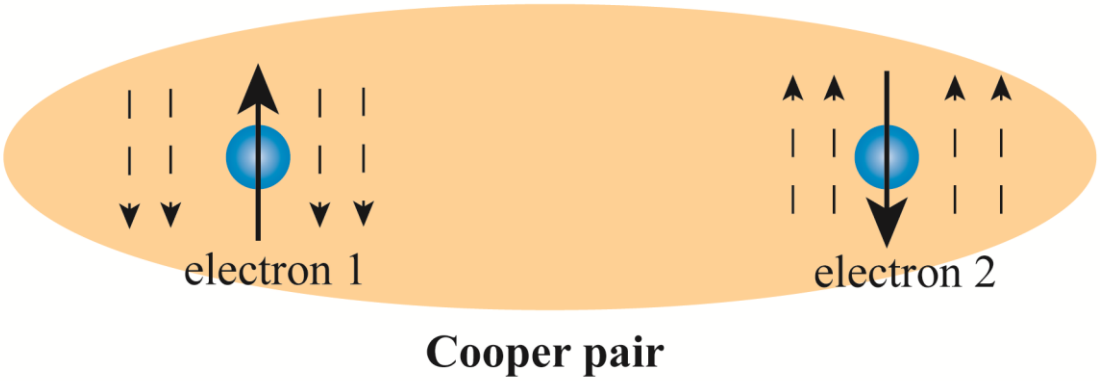


图 4：两个电子形成一个库珀对，电子 1 具有动量 $\vec{p}$，受内磁场 $\vec{B}_{1\perp}=(0,0,-B_z)$作用，同时电子 2 具有动量- $\vec{p}$，受内磁场 $\vec{B}_{2\perp}=(0,0,B_z)$作用，内磁场用虚线箭头标出。　　图中 electron 意思是电子，Cooper pair 意思是库珀对。

D1	求伊辛超导体中库珀对的能量 E_I。	**1 分**
D2	对于具有自旋-轨道耦合的物质，在常态下，放置于磁场$\vec{B}_{||}=(B_x,0,0)$ 中，求两个电子的总能量$E_{||}$（注意：这时内磁场仍然存在且垂直于$\vec{B}_{||}$，忽略磁场$\vec{B}_{||}$对库珀对轨道运动的影响）。	**2 分**
D3	求临界磁场强度 B_I，使得对于 $\left\|\vec{B}_{||}\right\|>B_{\mathrm{I}}, E_{||}<E_{\mathrm{I}}$。	**1 分**

(总分: 12)

一维结构的反射光衍射图样

引言

ZnSe 纳米表面结构不仅具有在一维(1D)纳米尺度上的非均匀调制，而且在 1D 纳米结构方向上，具有周期原子晶格（*Nanotechnology*, 20 (21), 215607(2009)）。根据最近对这种材料的反射高能电子衍射所得到的现象，我们设计了本实验。图 1 是镀了一层金的 ZnSe 表面结构的截面图，右下角的小插图是未镀金时的表面图。

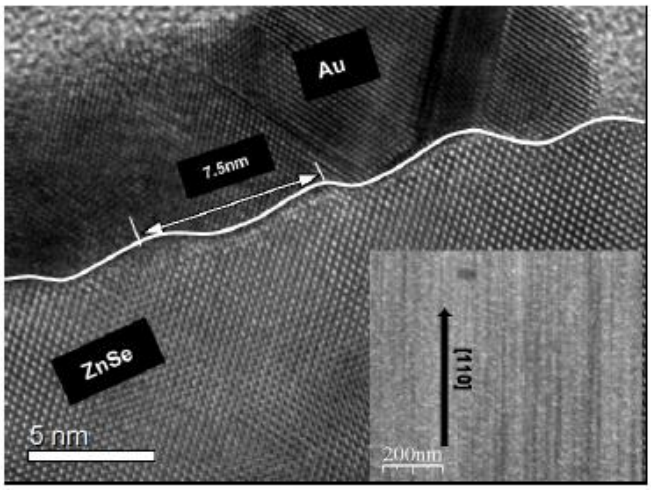


图 1：镀了一层金的 ZnSe 表面结构的截面图，右下角的小插图是未镀金时的表面图。

实验目的：

本实验，你将通过微米尺度的 1D 结构样品,用光学方法类比研究这一现象。

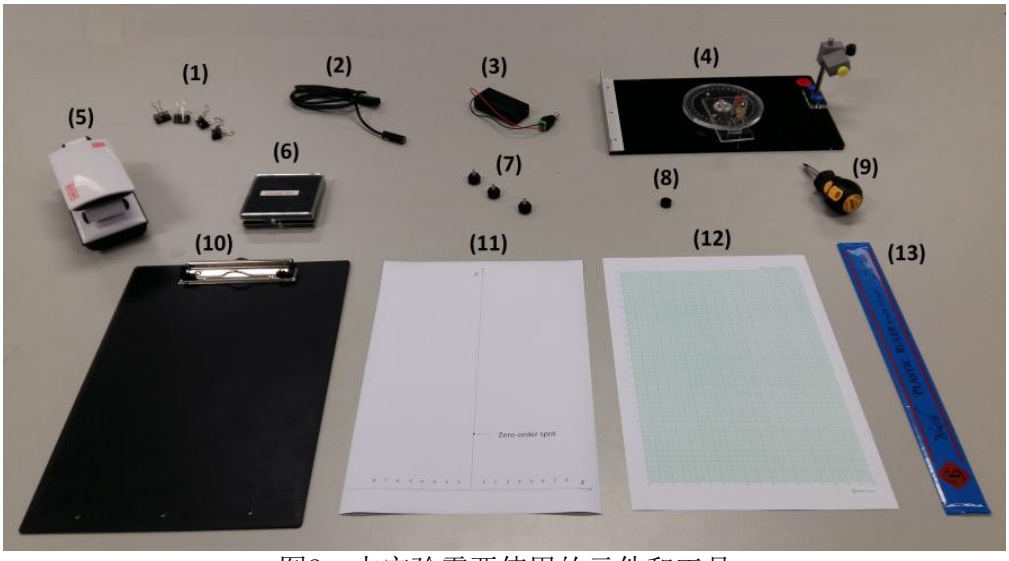


图2：本实验需要使用的元件和工具

元件和工具表

[1]	4个夹子
[2]	激光二极管
[3]	带有开关的电池盒
[4]	带有旋转盘、角度盘、和激光二极管夹具的光学平台
[5]	LED灯
[6]	样品盒，内装1-5号样品
[7]	安装观察屏的三个螺钉
[8]	小孔
[9]	一字螺丝刀
[10]	观察屏
[11]	校准纸
[12]	坐标纸
[13]	30cm直尺

主要实验元件和工具的照片



图 3 观察屏

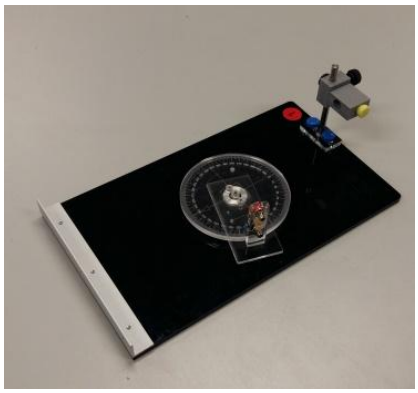


图4 光学平台。上有旋转盘、角度盘、和激光二极管夹具



图 5 小孔



图6 激光二极管，其输出功率为0.5 mW，波长为 650 nm（II类激光）



图7 样品盒，内有5个样品，编号为1到5

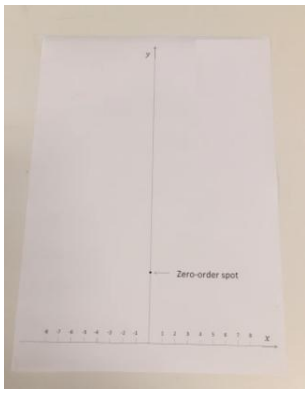


图 8 校准纸

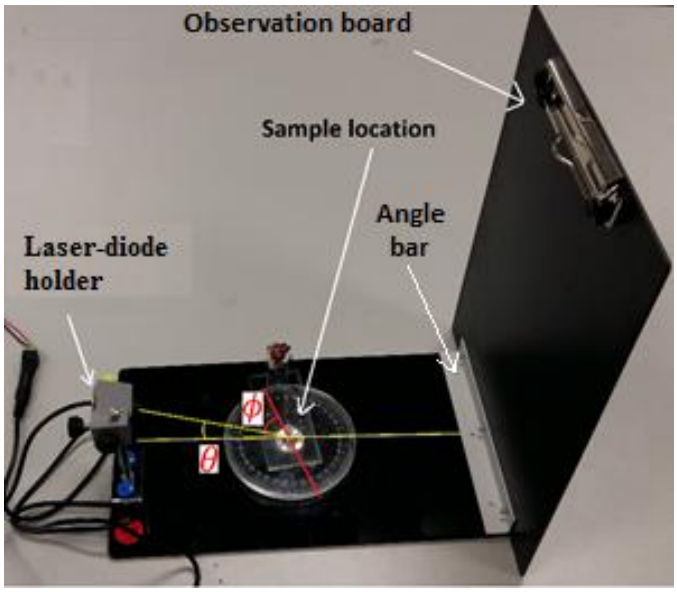


图9　本实验所使用的装置。本图示意了如何将观察屏、测试样品、以及光学平台（带有旋转盘与激光二极管）组装在一起。角度ϕ是样品的旋转角。角度θ是激光光束相对于样品表面的入射角。图中observation board意为观察屏，Laser-diode holder意为激光二极管夹具，Sample location意为样品放置区，Angel bar意为直角铁。

关于样品盒使用的额外注意事项

- 本实验中所使用的五个样品，都是正方形的，尺寸为 1.5 cm × 1.5 cm，它们的编号为 1 到 5。编号写在样品座的一个侧边上。
- 所有的样品座的尺寸都是 2.0 cm × 2.0 cm，在某一个边的中部有一个三角形标记为参考点。
- 将样品放置在旋转盘中心之前，应当先注意使旋转盘上的箭头尖端标记指向角度盘的0°刻线，每放置一个新样品，要利用旋转盘的方形标记对样品进行摆正。此位置样品旋转角度$\phi = 0^\circ$（仅针对 2-5 号样品），即三角形参考点与角度盘的0°线对齐。

样品	样品描述
1	一块平面镜
2	一个钢片，上有平行于两边的直线刻槽，刻槽间距不均匀
3	一块光栅，光栅上相邻刻槽之间的距离也就是光栅常数为 a
4	与 2 类似的钢片，上有非均匀刻槽，其与角度盘上0° 和180° 刻度连线的夹角为ϕ^*
5	一个钢片，上面不仅具有非均匀直刻槽，还有间距为 b 的均匀预制刻槽，这些等间距均匀预制刻槽垂直于那些非均匀刻槽。

安全提醒和注意事项

1. **注意：请勿直视激光**
2. 不使用激光时，请关上其电源，以免耗尽电池电量。
3. 永远不要倒置样品。千万不要触碰样品表面。
4. 在拿取和更换样品时，用手拿着样品座的边缘。

初始调节/步骤

1. 如图 9 所示，搭建实验装置。如图 10，观察屏可以用三个螺钉固定在旋转盘上。

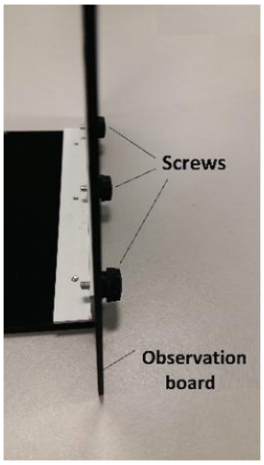


图 10：用三个螺钉将观察屏固定在旋转盘上

图中 Screws 意为螺钉，observation board 意为观察屏

2. 将激光二极管安装在激光二极管夹具上。【注意，在将激光二极管固定在夹具上时，不要过分拧紧黄色螺钉，否则，激光二极管可能会被拧坏】
3. 如图 11 所示，将电池盒连接上激光二极管。

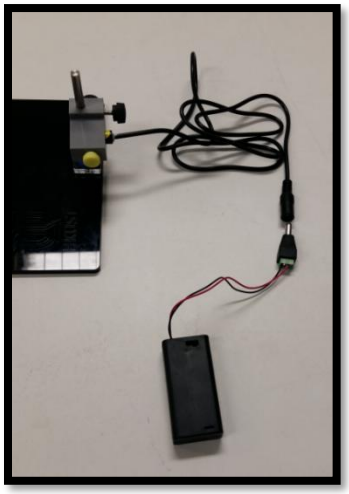


图 11　将激光二极管和电池盒相连接

4. 将一张纸固定在观察屏上，观察激光二极管出射的激光，用一字螺丝刀调整激光二极管的孔径，以保证获得光斑直径大约为 1mm 的激光。
5. 保证将激光二极管固定在夹具上时，激光二极管的头部伸出夹具 5 到 10mm。
6. 如图 12 所示，将所提供的小孔装在激光二极管上，以进一步压缩激光的光斑。

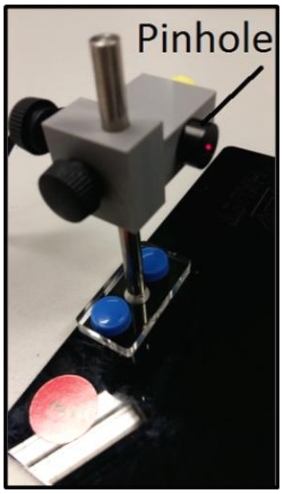


图 12：装上小孔的激光二极管，Pinhole 意为小孔

7. 实验中，要求激光束在水平面上的投射光线必须位于角度盘的0° 和180°刻度连线上，激光光斑必须打在样品中心。可以通过用图 13 所示的几个调节钮，来调节激光二极管夹具的位置和倾斜角，来实现上述光路要求。

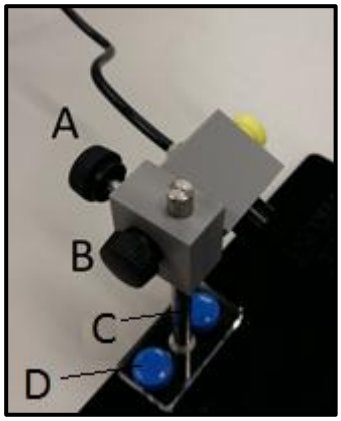


图 13：激光二极管夹具的位置和倾斜角，可以用图示的调节钮来调节。A 用来调节激光光束的高度，B 用来调节激光束的倾斜度，C 和 D 用来调节激光的水平方向。

实验

A部分：装置调节

按照图 9 那样装好实验装置，注意观察屏与旋转盘中心的距离 D 固定为 15cm。按照“关于样品盒使用的额外注意事项”（第三页）所描述的，在旋转盘的中心放置样品 1 。在观察屏上安好校准纸，使 x 轴 与观察屏上的直角铁上边缘对齐（可以通过将校准纸的 x 轴以下的部分折到后面）。这样定义 x 轴是因为实验装置是这样设计的：要确保安放在旋转盘上所有样品与直角铁上边缘对齐。另外 x 轴原点必须与角度盘的 180° 刻线标记对准。本实验中，激光的入射角 θ 固定在某一值。调整激光二极管的高度与倾斜角度，使激光照射到样品 1 的中心，并且反射光线的光点中心与校准纸上的“零级光斑”标记重合。

任务		分值
A1	测量“零级光斑”距离 x 轴原点的高度 h。 求出激光入射角 θ，用 D 和 h 表示。在答题卡对应的表格内记录 h 的值(单位 cm)和计算 θ 的值，保留三位有效数字。	**0.6**

B部分：样品2的衍射图样

取下样品 1 换上样品 2，将样品座的参考点与 0° 标记刻线对准，因为此时样品 2 上非均匀间距的刻槽方向与激光在水平面上的投射光方向平行。样品的旋转角度 ϕ 可以通过调整旋转盘来调节，从旋转盘上的角度盘读出。

将一张坐标纸固定在观察屏上。使坐标纸底端坐标轴即 x 轴 与观测板上的角铁上边缘对齐（可以通过将坐标纸的底端坐标轴以下的部分折到后面）。另外 x 轴原点必须与角度盘的 180° 刻线对准。

任务		分值
B1	在坐标纸上记录旋转角度 $\phi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 和 90° 时的衍射图样， 每个衍射图样旁标记清楚对应的旋转角度 ϕ 的值。在该坐标纸上方标注“# 2 ”。	**0.8**

C部分：样品3的衍射图样

这部分以及下一个部分的实验任务将帮助你理解实验任务（B1）中衍射图样所对应的物理含义。从旋转盘上移去样品 2，放置样品 3，使样品 3 的参考点与旋转盘 0° 标记对准。样品 3 的初始位置（也就是 $\phi = 0^\circ$）是光栅刻痕平行于激光束的水平投射线。

将固定一张坐标纸固定在观察屏上。确保坐标纸底部的坐标轴与观察屏上直角铁上边缘重合，正如 B 部分描述的那样。另外 x 轴原点必须与角度盘的 180° 刻线标记对准。

任务		分数
C1	在坐标纸上记录旋转角度ϕ = 0°, 30°, 60° 和 90°时样品 3 的衍射光点的中心，每个衍射图样旁标记清楚对应的旋转角度ϕ的值。在该坐标纸上方标注“# 3”。	0.8

在完成任务（B1）和（C1），你将发现到样品 2 的衍射图样是连续的线，而样品 3 的衍射图样是分立的断点。原因是样品 2 的刻槽是不均匀的，就好比光栅常数是一定范围连续变化的量。因此它的衍射图样与常规光栅（例如样品 3）的衍射图样的大体形状相同。区别在于，衍射光斑扩展了，呈现出所观察到连续的衍射图样。

部分 D：样品 3 衍射图样所揭示的理论

像样品 3 的常规光栅的反射衍射图样可以用几何光学知识理解。在这个实验中，我们定义x-y-z坐标系，坐标原点在样品中心，如图 14 所示。

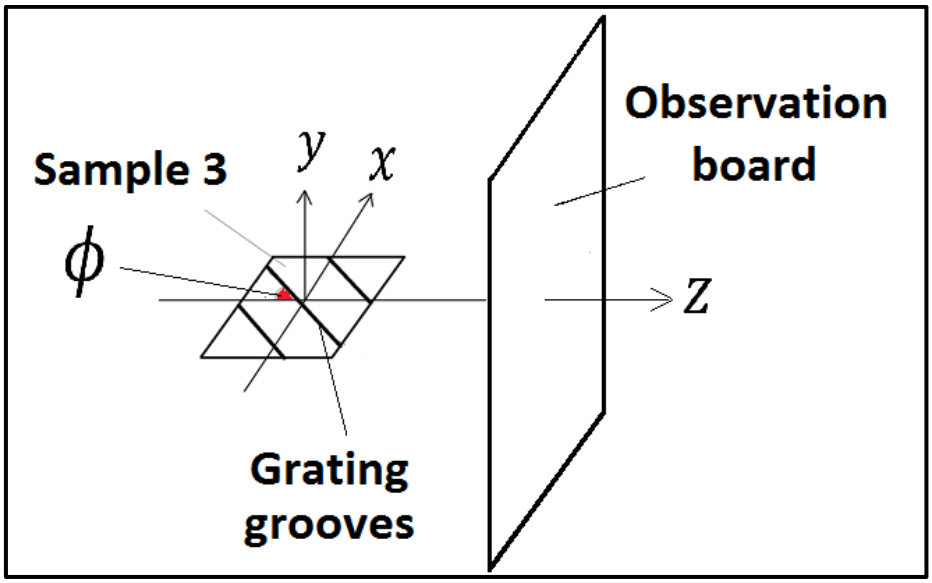


图 14：这部分实验任务中所采用的x-y-z坐标系，ϕ是样品的旋转角，观察屏与 z 轴垂直。图中 Sample 3 意为样品 3，Observation board 意为观察屏，Grating grooves 意为光栅刻槽

应用几何光学，可以推出样品 3 的反射衍射图样满足下列方程

$$y^2 = \frac{(D\cos\phi + x\sin\phi)^2}{\cos^2\theta\,\cos^2\phi} - x^2 - D^2 \qquad (1)$$

$$x = \frac{Dm\lambda\cos\phi}{a\cos\theta - m\lambda\sin\phi}, \qquad (2)$$

这里 λ 为入射激光的波长，m是衍射级次。可以利用方程（1）和（2）来预测衍射光点的x 和 y轴坐标关于角度ϕ的关系式。这个理论解释与任务 C1 中观察记录的光斑图样相吻合。

基于方程(1) 和 (2)，$\phi = 90^0$时的衍射斑点应该在$x = 0$ 处沿y轴延伸。衍射光点的 y 值满足下列方程

$$y = D\sqrt{\frac{a^2}{(a\cos\theta - m\lambda)^2} - 1} \qquad (3)$$

任务		分数
D1	重新整理公式（3），得到关于光栅常数a的一个二次方程 $$Aa^2 + Ba + C = 0. \qquad (4)$$ 推导系数A, B 和 C的表达式。将答案填写在答题卡中相应的表格里。	**0.9**
D2	通过求解出这个二次方程，和利用已经测量的样品 3 在 $\phi = 90^0$ 时的衍射光点的 y 值(见任务 (C1)，以及已知的D, θ 和 λ的数值，计算对于从 1 级（$m = 1$）到 6 级($m = 6$)的每一个衍射级次，样品 3 的光栅常数 a 的各个值，以米为单位，保留 3 位有效数字*（提示：这里的 6 个光斑级次均在 0 级光斑的上面）*。将答案填写在答题卡中相应的位置。	**1.8**
D3	计算光栅常数 a 的平均值，以米为单位，保留 3 位有效数字，并计算平均值的标准差。将答案填写在答题卡中相应的位置。	**0.8**

部分 E：测定样品 4 的未知角度ϕ^*

使用样品 4 替换样品 3，使样品座上的参考点对准0°刻度标记。这样放样品 4 到旋转盘的过程，确保了样品座有参考点的边垂直于激光。

将一张坐标纸固定在观察屏上，确保坐标纸底部的轴线和固定在观察屏的直角铁上边缘对齐（将坐标纸底部轴线以下的部分折到后面去）。另外，x 轴原点必须对准角度盘180°刻线。

任务		分数
E1	沿着样品 4 投射到坐标纸上的连续衍射曲线，从 x 轴x = - 1.0 cm 到 3.5 cm 之间，以 0.5cm 为步长，取 10 个点测量出 y 坐标的值，以 cm 为单位。将答案写到答题卡的相应位置。	**0.6**
E2	基于任务 D 中给出的方程(1)，构建如下线性方程 $$M(y, x, D, \theta) = I(D) + S(\phi^*)x\,. \qquad (5)$$ 求出$M(y, x, D, \theta), I(D)$ 和 $S(\phi^*)$的函数形式。使用任务 E1 中记录的数据，画出 M 随 x 变化的关系线。通过这个图确定未知角度ϕ^*（以 Degree 为单位）。在答题卡相应表格里写出所有的函数表达式和ϕ^*值。	**1.6**

部分 F：样品 5 的衍射图样

使用样品 5 替换样品 4，样品座上的参考点对准0°刻线标记。样品 5 的几何构造如图 15 所示。

以非均匀分布的刻槽平行于激光束的水平投影方向作为样品 5 的起始位置。

将一张坐标纸固定到观察屏上，确保坐标纸底部的轴线和固定在观察屏的直角铁上边缘对齐（将坐标纸底部轴线下的空白部折到后面去）。另外，x 轴原点必须对准角度盘180°刻线。

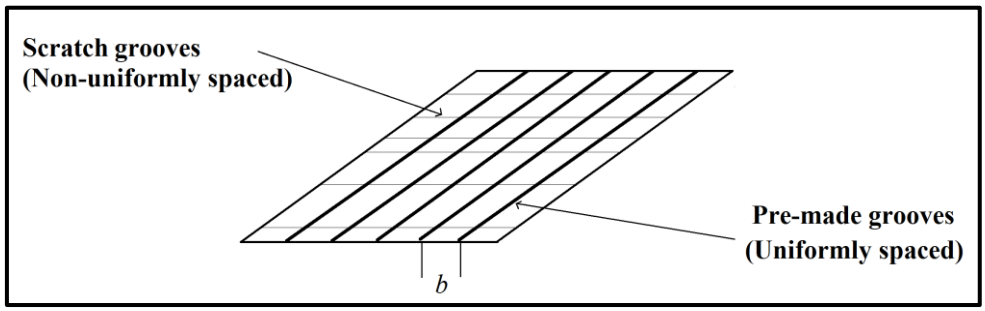


图 15：样品 5 的结构，预制的刻槽均匀分布。预制的刻槽间隔为 b。图中 Scratch grooves（Non-uniformly spaced）意为刻槽（非均匀分布），Pre-made grooves（Uniformly spaced）意为预制刻槽（均匀分布）

任务		分值
F1	在坐标纸上记录下你观测的ϕ = 0°, 30°, 60° and 90°时各自的衍射图样。在每张图的头部写上'#5'和相应的ϕ值。你应该能观测 10 个级数以上的衍射，但你只需要在坐标纸上记录下其中 3 条相对明亮的级次的衍射条纹。	**0.8**

样品 5 的结构可以看作是样品 2 和样品 3 的组合，均匀分布的预制刻槽和非均匀分布的刻槽相互垂直。这个实验正是前面引言中介绍的纳米光栅的光学类比实验。

任务		分数
F2	基于上述理解，利用任务 F1 中记录的$\phi = 0°$时的衍射图样数据，估算样品 5 的均匀分布预制刻槽的间隔 b，以米为单位。在答题卡上写出 b 的值。 [注意：你仅需要使用第一级衍射的数据记录来估算 b 的值，同时你需要计算到三位有效数字]	**1.6**

部分 G：测定 ZnSe 的晶面间距

正如引言中提到的，上面的现象最先在纳米结构 ZnSe 表面的反射高能电子衍射(RHEED)图样中被发现。这个表面在纳米尺度拥有一维非均匀空间分布调制。同时周期原子晶格面垂直于这些纳米槽。图 16 展示了当电子束垂直入射于非均匀间隔的纳米槽时 ZnSe 表面纳米结构的反射高能电子衍射(RHEED)图样。（提示：对于周期原子晶格平面，这个条件对应于$\phi = 0^{\circ}$）

注意：图中的条纹间距可以使用 RHEED 衍射图样下方的比例尺测量，这与投射到荧光屏（类似于上述实验的观察屏）上真实的衍射图样高度一致。

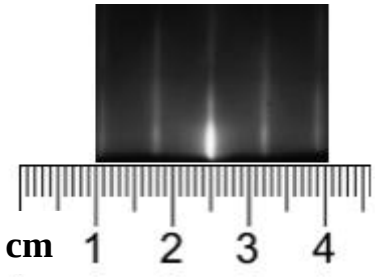


图 16：电子束垂直入射于非均匀间隔的纳米槽时，ZnSe 表面纳米结构的反射高能电子衍射(RHEED)图样。

讨论图 16 中的衍射图样，电子枪加速电压V = 13,000 伏。入射到样品表面中心的高能电子相应的波长λ可以通过如下公式计算

$$\lambda = \frac{12.247\times10^{-10}}{\sqrt{V(1+10^{-6}V)}}\,[\mathrm{m}], \tag{5}$$

这里考虑到了相对论效应。

电子束到 ZnSe 样品表面的入射角$\theta \approx 0^{\circ}$，荧光屏与 ZnSe 纳米结构表面入射点之间的距离D = 26 cm.

任务		分值
G1	对于 ZnSe 样品，基于图 16 和以上给出的实验条件，求出垂直于非均匀分布的纳米凹槽的周期性原子晶格平面间的晶面间距a^{*}，以米为单位，保留三位有效数字。将结果填写在答题卡相应的表格里。	**1.7**

金属的反射引起的相位差 (总分: 8.0)

引言

众所周知，自然界中材料的折射率(n)比真空折射率要大($n>n_o=1$)。但是，对于某些人造纳米结构材料，会有一些不同的现象，比如负折射现象，这种现象可以通过负折射率来予以解释。通常，在材料对光有吸收时，材料的折射率比如金属的折射率，是一个复数。

研究复折射率的一种简单方法是：当入射光从材料表面反射时，测量其相移（相位差）ϕ。在光学中，由于材料表面反射而引起的相位差，在很多应用中尤其是全息测量中是非常重要的。

对于普通玻璃，在正入射时，反射光的相移ϕ是 180^o (或π弧度)。但是，对于金属而言，ϕ可能会有不同的值，这取决于材料的吸收。光学中的相位测量是具有挑战性的，需要很高的精度。人们已经研究了很多复杂的技术和方法来测量光学相位，但是，这些技术和方法过于复杂，对高中生来说是难以完成的。这里，我们介绍一种简单的廉价的方法来测量相位，在高中学校就能完成。

实验目的

利用法布里-珀罗（Fabry-Perot）激光干涉仪，研究光从钛（Ti）材料表面反射时的相移。

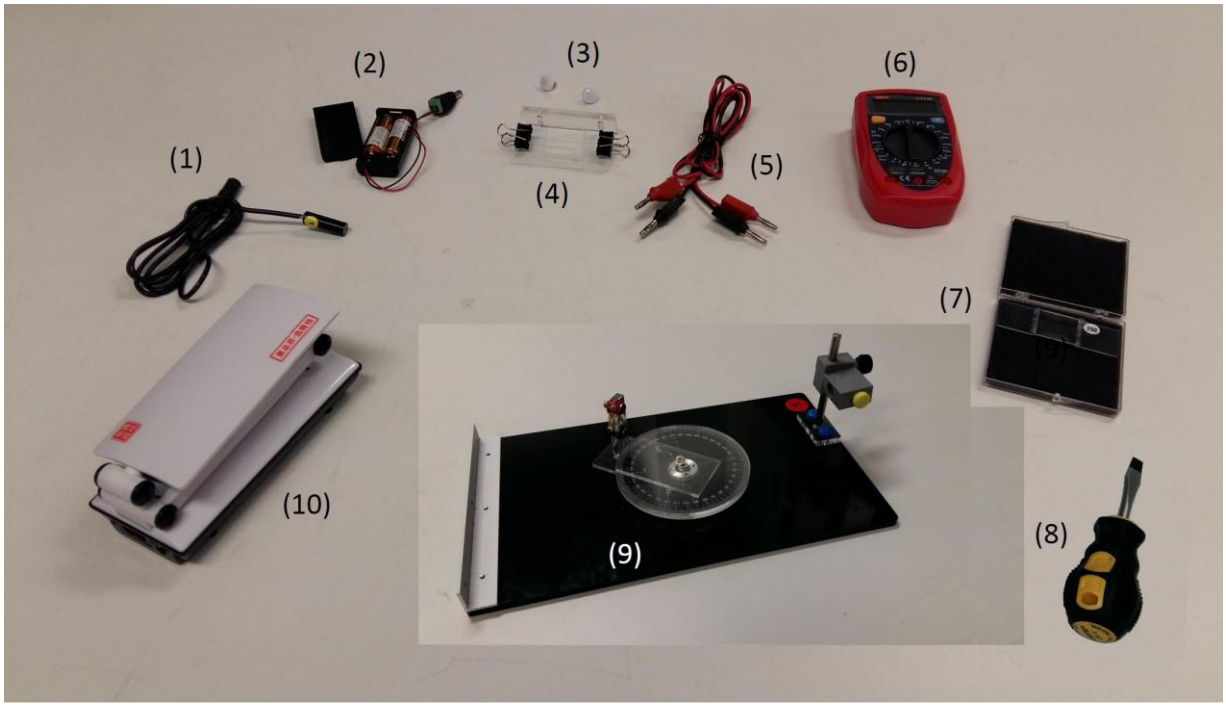


图 1 实验 E2 所需要的元件

元件列表

[1]	激光二极管
[2]	电池盒。用于给激光二极管供电
[3]	样品架上的白色塑料帽螺钉
[4]	有两个夹子的样品架
[5]	有香蕉头的导线
[6]	数字万用表
[7]	样品盒，装一个镀钛的法布里-珀罗标准具，标准具贴有编号。
[8]	一字螺丝刀
[9]	光学平台，上有旋转盘、探测器夹具、固定的角度盘、以及激光二极管夹具
[10]	LED灯

实验元件描述



图2：激光二极管，输出功率0.5mW波长650 nm (II类激光)



图3：电池盒，内有两节5号电池，2×1.5V，输出插头接上激光二极管供电

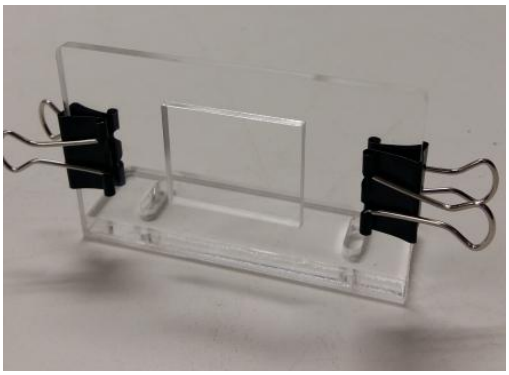


图4：有两个夹子的样品架



图5：数字万用表，带有香蕉头的导线



图6：样品盒，内装一个镀钛的法布里-珀罗（FP）标准具，带有编号，比如本图中的编号是250号



图7：一字螺丝刀，用于调节激光二极管的光斑大小



图 9: LED灯，用于照明

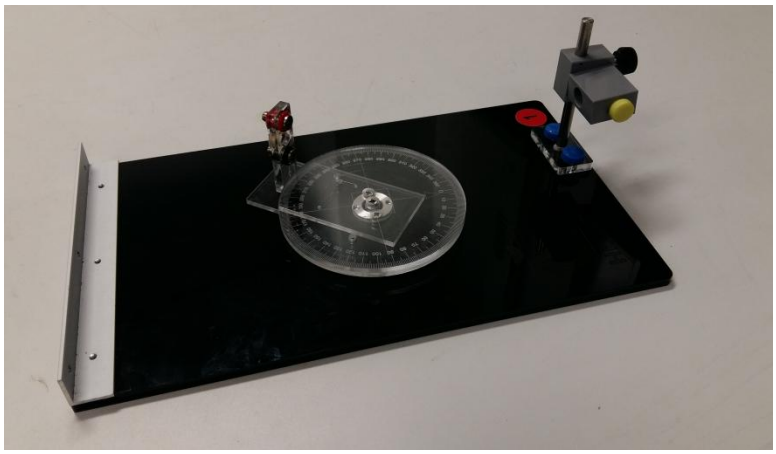


图8：光学平台，上有旋转盘、探测器夹具、固定的角度盘、以及激光二极管夹具

实验原理

考虑如图10所示的有空气隙的理想法布里-珀罗（FP）标准具。标准具的构成是这样的：上面是一个厚玻璃片（其折射率为n_g），下面是一个样品片（其折射率为n_s），中间隔着一层很薄的空气隙(厚度$L \sim 5$微米)。

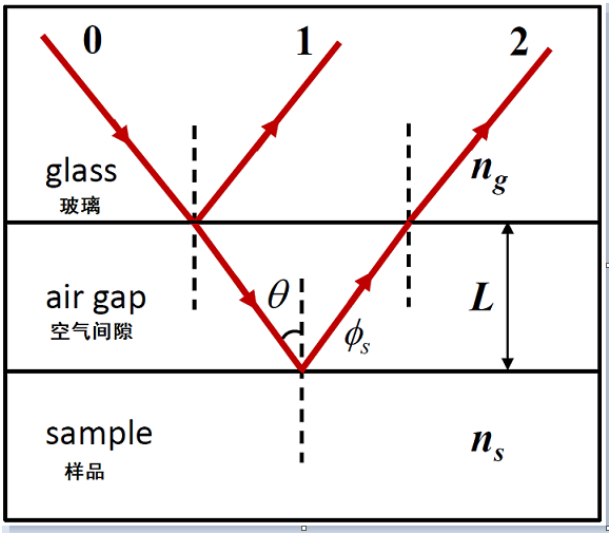


图10：激光从一个理想的空气法布里-珀罗（FP）标准具反射，图中标准具的上部是玻璃片，下部为样品片。

我们用双光束干涉原理来分析空气隙标准具。一束光（光束0）入射在标准具的上玻璃片上，我们忽略上玻璃片上方的空气与上玻璃片之间的反射，则其中部分光在上玻璃片下表面—空气隙的界面上反射（光束1），另外一部分光则透射（折射）。透射光（折射）在空气隙—样品片上表面的界面上会反射，进而折射通过上玻璃片，该束光标记为光束2，如图10所示。对于光束2，在空气隙—样品片上表面的界面上，会因为半波损失而得到额外的相移（相位差）ϕ_s，而在其他界面则没有额外的相移。对于以角度θ入射的光，其反射光强$I(\theta)$是光束1和光束2 的光强叠加，如下式：

$$I(\theta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2kL\cos\theta + \phi_s), \qquad (1)$$

式中，I_1和I_2分别是光束1和光束2的光强，$k = \frac{2\pi}{\lambda}$为波数，λ是入射光的波长。对于固定的波长λ和空气隙厚度L，由方程（1）可以得到强度随着入射角θ呈现出峰和谷。在本实验中，我们固定入射光的偏振方向，光束在任何表面反射和折射时，忽略偏振效应。FP标准具采用镀钛玻璃片（简称钛片）作为下部的样品片。

预备程序 / 调整

1. 如果你先做完了 E1 实验，那么在做 E2 实验时，记住，先将观察屏和小孔光阑移走。

2. **警告：不要直视激光二极管射出的激光。**

3. 如图 11 所示, 把激光二极管安装到激光夹具的圆孔中，使用黄色塑料帽螺钉锁紧激光二极管。确保激光头水平，并且所贴黄色标签朝上（见图 2 , 激光二极管上贴有一个黄色标签，这样的目的使激光偏振为垂直方向）［注意：不要把激光器夹具上的黄色塑料帽螺钉拧的太紧，以免损坏激光二极管］

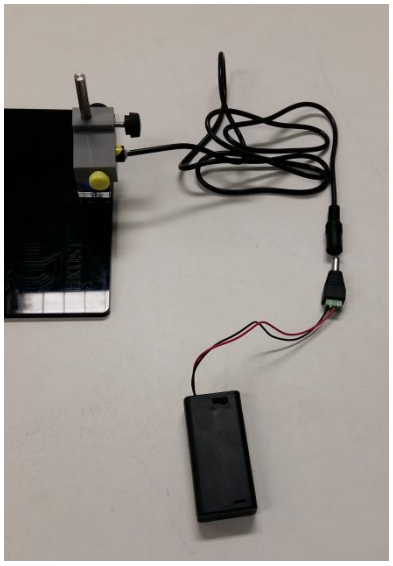


图 11：安装在夹具上的激光二极管

4. 如图 11, 将电池盒连到激光二极管上, 并打开激光二极管电源。

5. 实验中要求激光二极管在 20cm 处形成一个直径约 1mm 的光斑。可以将一张纸放在距离激光二极管 20cm 外观测光斑大小。使用一字螺丝刀调整激光二极管镜头，获得直径约 1mm 的光斑。

6. 如图 12，使用导线**小心的**将预先安装在光探测器夹具上的光探头的输出端子与万用表连接。光探测器是由光电二极管与电阻并联而组成的，这样光电二极管被光照射时产生的电流可在电阻上转变为电压，被万用表测量。

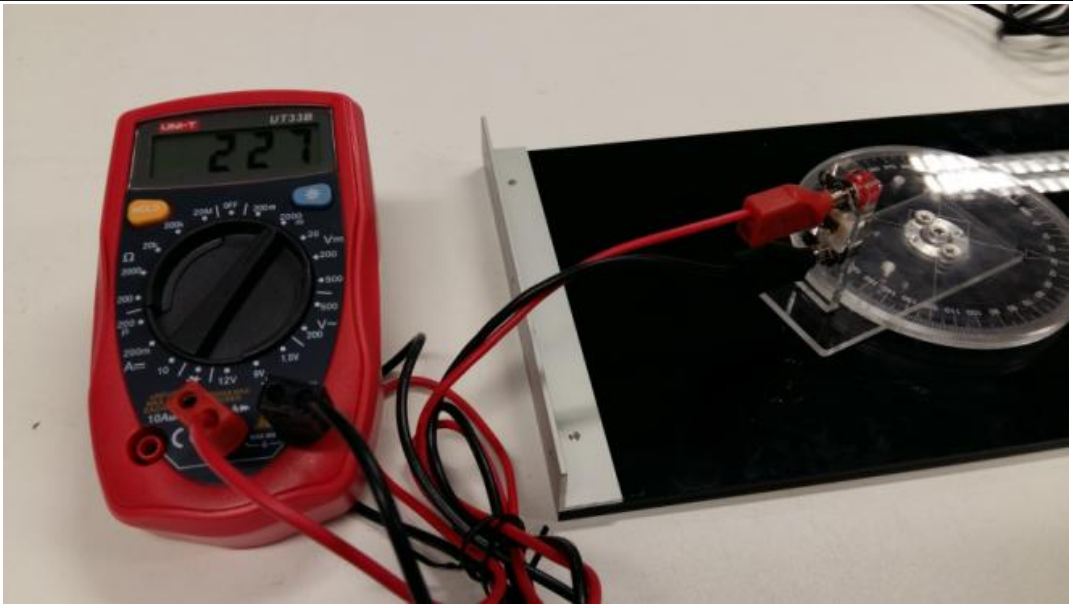


图 12：光电探头连接到万用表

7. 调整激光二极管位置，使激光束沿角度盘 0º 标记方向水平射出，且通过旋转盘中心的上方,并直接入射到安装于角度盘 180º 标记位置的光探测器中（如图 13）。调整时你可以打开万用表,监测激光强度（以电压显示）以获得最佳状态。［注意：完成此步骤后关闭激光二极管电源］

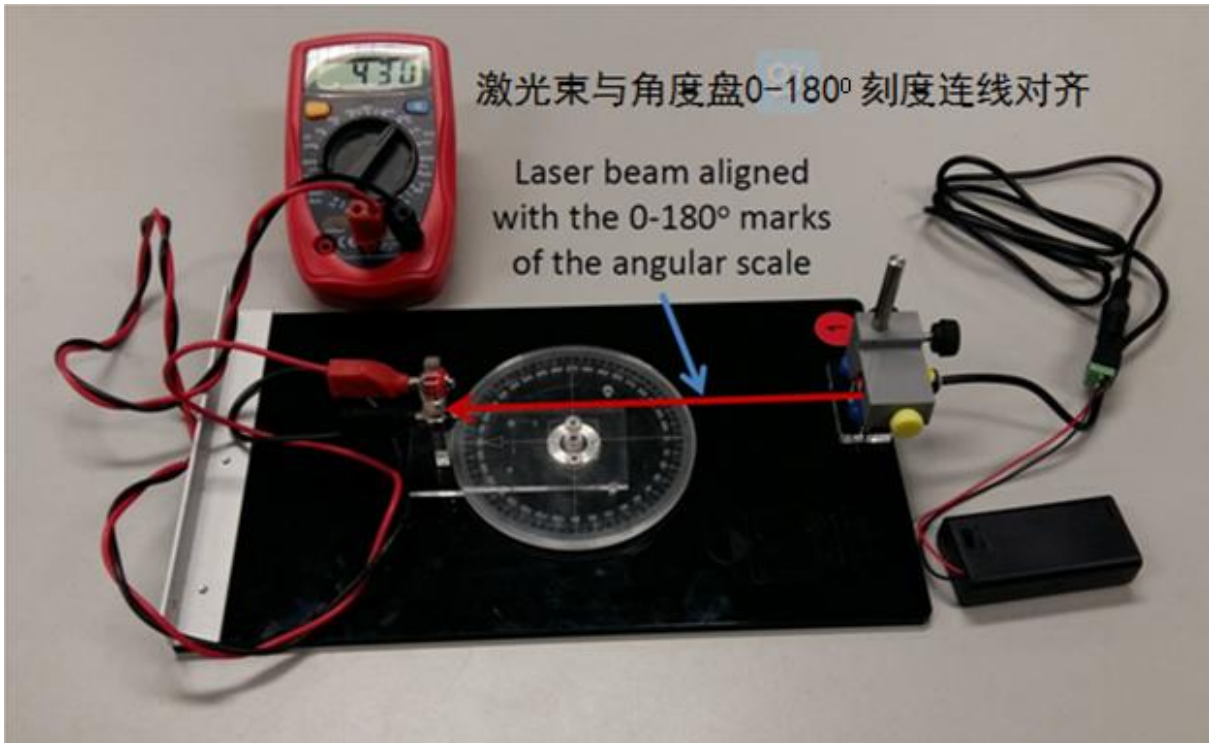


图 13：激光束准直

8. 使用白色塑料帽螺钉，把样品架安装到光学平台的旋转盘上，如图 14 所示。

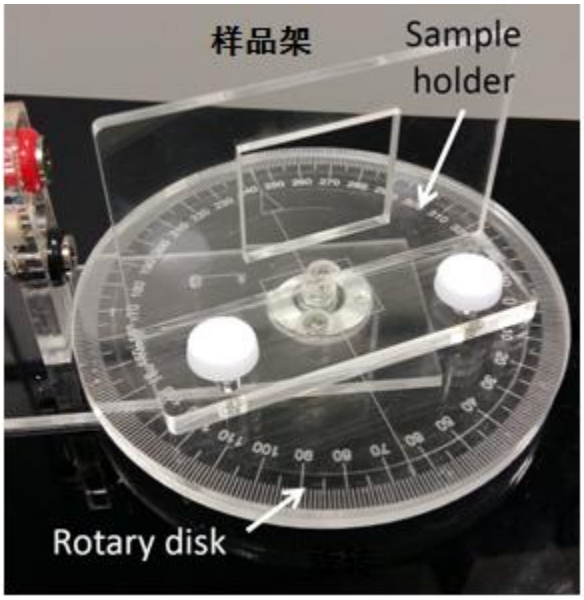


图 14：把样品架安装到光学平台的旋转盘上

9. 如图 15 所示，使用两个夹子将带有样品编号标签（图中示例为#250）的镀钛(Ti)标准具样品竖直安装在样品架上。使标准具的镀钛玻璃片贴在样品架边框上。

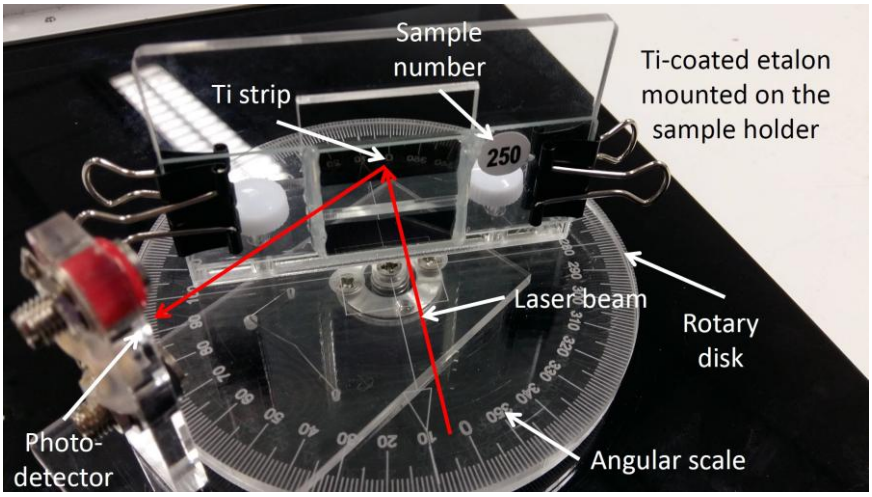


图 15:样品安装到样品架上

Sample number：样品编号　Ti strip：钛条　laser beam: 激光束　Photo-detector：光探测器 Ti-coated etalon mounted on the sample holder 安装在样品架上的镀钛标准具
Rotary disk：转盘　Angular scale：角度盘

10. 如图 15 所示，打开激光二极管电源，调整标准具竖直位置，使激光束入射在标准具上方钛条的中间区域或下方钛条的中间区域，并使反射光反射到光探测器内。然后调整光探测器的位置，使信号达到最大（根据万用表测量到的电压确定）。进一步地，必须通过调整两个白色塑料螺钉使钛条与旋转盘同轴旋转。

11. 旋转安装了镀钛标准具的样品架，使得激光束以与样品表面法向成θ角入射，入射角由角度盘读出。将光探测器的方向转动至约 2θ的角度位置，并微调光探测器的角度使得万用表显示的信号最大。在完成以上所有步骤后，整个装置调整完毕，可用于下面实验。

注意：所有数值和答案需保留 3 位有效数字

实验

任务	描述	分数
1	测量镀钛的标准具的反射光强度，θ 从约 4º 开始，逐次增加入射角的角度，测量电压随入射角的变化。每次的角度间隔要够小并且合适，以记录尽可能多的的激光强度峰值。将数据填写在表 E2_1 中。	**1.0**
2	角度增大过程中，激光束相对于样品架和光学角度盘可能变得不准直，为了减小由此带来的误差，需要对上面实验关于 0º 刻度线对称地反向再测一遍，即对称测量。先旋转样品，使之回到 0º 刻线，再反向逐次增加入射角，并相应的移动光电探头进行激光强度测量。将数据填写在表 E2_2。	**1.0**
3	用表 E2_1 中的数据，在坐标纸上画出反射光强度随着入射角θ 变化的关系曲线图，标记图名为“图 E2_1”。用表 E2_2 中的数据，在另外一张坐标纸上画出反射光强度随着入射角θ 变化的关系曲线图，标记图名为“图 E2_2”。用平滑曲线拟合连接数据点，表明图 E2_1 和图 E2_2 中反射光强度的变化。	**0.9**
4	识别出图 E2_1 和图 E2_2 中反射光强度的所有峰。以对应的入射角最大的峰为起始峰序号，用连续数字标记所有峰。	**0.2**
5	由公式（1）推导出反射光强峰位的条件，用 L，θ，Φ_S，λ 表示。将你推导出的这个条件标为公式（2）。	**0.2**
6	选择一个关于θ 的合适的函数 $X(\theta)$，作为一个新的独立变量，使图 E2_1 和图 E2_2 中各个峰的间隔随 $X(\theta)$均匀分布。计算出对应于θ 的变量 $X(\theta)$的值，在表 E2_1 和表 E2_2 中添加一个新的列，填入所计算出的 $X(\theta)$的数值。	**0.3**
7	建立表 E2_3，填入数据表 E2_1 和表 E2_2 中的峰序号和相应的入射角度。两个表中的数据可以用 LHS（左手侧的英文缩写）和 RHS（右手侧的英文缩写）区别表示，例如角度为θ_{LHS}和θ_{RHS}。然后对每一个反射光强度峰所对应的两个入射角θ_{LHS}和θ_{RHS}，计算出其平均值及相应的 $X(\lvert\theta\rvert)$的平均值，将这两个平均值记为$\lvert\theta\rvert_{\mathrm{avg}}$ 和 $X(\lvert\theta\rvert_{\mathrm{avg}})$，在表 E2_3 中创建对应的新列，填入计算的数值。[注意：表 E2_1 和表 E2_2 中的峰的序号可能是不同的，不要弄错图 E2_1 和图 E2_2 中对应的峰]	**0.6**
8	在一张单独的坐标纸上做一新图，显示出峰序号随着 $X(\lvert\theta\rvert_{\mathrm{avg}})$变化的关系。标记图名为“图 E2_3”。	**0.6**

9	用直线连接图 E2_3 中所有数据点，确定该直线的斜率和与 y 轴的交点。[注意：可以用作图法，无需计算误差。]	**0.4**
10	重新整理实验任务 5 中公式（2），推导出干涉级次 m 和在实验任务 6 中获得的函数 $X(\|\theta\|_{avg})$的关系，标记该关系式为公式（3a）。根据公式（3a）用 L, λ, and $\|\theta\|_{avg}$ 求出出 m 的表达式，标记为公式（3b）。然后，用 L, λ, and $\|\theta\|_{avg}$ 表示出对 2π 归一化的反射相位 $\overline{\phi}_{s,n} = \phi_s/2\pi$，标记为公式（3c）。写出 $\phi_{s,n}$ 的取值范围。根据实验任务 7 结果中的峰，确定对应 m 的值，并在表 E2_3 创建新的列，并填入计算的 m 值。	**1.2**
11	在图 E2_3 中，也就是峰序号与 $X(\|\theta\|_{avg})$的关系图中，再画出一条 m 随 $X(\|\theta\|_{avg})$变化的关系线。用直线连接图中所有数据点。然后确定标准具的空气隙间隔 L 和钛条反射相位 ϕ_s。[注意：可以采用做图法，无需计算误差。]	**1.4**