由两个导体组成的系统，浸没在均匀的具有弱导电性的电介质液体中。在两个导体间加上一个恒定电压，系统将会产生电场和磁场。本题将研究这个系统。

1. **(0.4 分)** 首先，考虑真空中一根无限长直导线，其单位长度的电荷量为λ，计算该导线产生的电场强度 **E**。

2. **(0.4 分)** 上述导线产生的电势可以写成 $V(r) = f(r) + K$, 其中 K 是一常数，确定 $f(r)$的具体表达式。

3. **(0.7 分)** 一根单位长度电荷为λ的无限长直导线置于 $x = -b$，另一根单位长度电荷为$-\lambda$的无限长直导线置于$x = b$，计算这两根导线在整个空间产生的电势 $V(x,y,z)$。这两根导线与 x 轴相交且平行于 z 轴，取原点处的电势为 V=0。并画出等势面。

   下列几问，忽略边缘效应。

4. **(2.0 分)** 现在考虑真空中的两个完全相同的圆柱导体，其半径均为 $R = 3a$ 。两个导体柱的长度相同，且远大于其半径$(l \gg R)$。两个圆柱导体的轴都在 xz 平面上，且平行于 z 轴，其中一个圆柱的轴在$x = -5a$，另外一个在 $x = 5a$。在两个圆柱导体之间加上一个电势差 V_0（轴在$x = -5a$ 处的导体柱的电势高）。计算**整个空间**的电势。取原点的电势为 V=0。

5. **(0.5 分)** 计算上述两个导体柱组成的系统的电容 C。

6. **(1.0 分)** 将上述两个导体柱完全浸没在具有弱导电性的液体中，液体的电导率为σ，计算两导体间流过的电流强度。假设液体的电容率（介电常数）等于真空中的电容率（介电常数）$\epsilon = \epsilon_0$。

7. **(0.5 分)** 计算上述系统的电阻 R，计算系统的电阻与电容的乘积 RC。

8. **(1.5 分)** 计算第 6 问中所求电流产生的磁感应强度。假设磁导率等于真空中的磁导率 $\mu = \mu_0$ 。

   注意：$\int \frac{a dx}{a^2+x^2} = \arctan\frac{x}{a} + const$

GPS 卫星的相对论修正

全球定位系统（GPS）是利用卫星上发射的信号确定物体（如飞机）位置的技术。由于卫星在轨道上的高速运动，必须进行狭义相对论修正；由于卫星具有一定的高度，必须进行广义相对论修正。两个修正都很小,但是对于精确定位都是至关重要的。本题中我们将研究这两个修正。

首先我们研究一个加速粒子的狭义相对论效应。我们考虑两种参照系，第一种为**静止参照系**（称为 S 参照系或地球参照系），在此参照系中粒子开始时是静止的。另一个为**运动参照系**（称为 S’参照系），该参照系能够即刻随加速粒子运动。注意这不是加速参照系，在某一时刻，可将其看作瞬时速度与粒子速度相同的匀速运动参照系，在给定时刻附近极短的时间里，粒子的时钟与运动参照系的时钟**相同**。当然运动参照系只在极短的时间内能够很好地适用，过了这个很短的时间，我们就要定义一个新的运动参照系。开始时我们校准粒子的时钟和静止参照系的时钟，设定二者的时间 t = τ = 0（t 是静止参照系的时间，τ 是粒子时钟显示的时间）。

从**狭义相对论**得到的结果，根据等效原理，我们能获得广义相对论效应，而不需要复杂的张量计算。将狭义相对论和广义相对论效应结合起来，我们就可以对 GPS 进行修正，以得到精确的位置信息了。

解题时可能要用到下列数学公式：

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
- $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
- $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$

Part A. 单个加速粒子（2.8 分）

有一个静止质量为 m 的粒子，受到一个恒定、均匀、方向指向 x 正方向的力场 F（静止参照系下定义的）的作用。开始时刻（t = τ = 0）粒子静止于原点（x = 0）。

1. **（0.5 分）**计算粒子以速度 v 运动时的加速度 a（相对于静止参照系）。
2. **（0.5 分）**计算粒子在 t 时刻的的速度 $\beta(t) = \frac{v(t)}{c}$（静止参照系中），计算结果用 F、m、t 和 c 表示。
3. **（0.3 分）**计算粒子在 t 时刻的的位置 x(t)，计算结果用 F、m、t 和 c 表示。
4. **（0.7 分）**证明：粒子的固有加速度a'是一个常数,即 $a' \equiv g = F/m$ 。此

处的固有加速度为瞬时运动参照系中测量到的粒子加速度。

5. （0.4 分）粒子所经历的时间为 τ 时，计算粒子的速度$\beta(\tau)$，计算结果用 τ 、g 和 c 来表示。
6. （0.4 分）计算静止参照系中的时间 t，计算结果用 g，τ，和 c 来表示。

Part B. 传播时间（2.0 分）

在 Part A 中，我们没有考虑信息到达观察者所需的传播时间。我们现在将考虑这个问题。

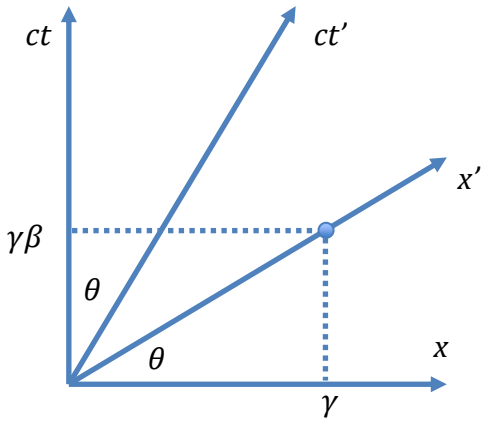
Part B 也是整个这道理论题中唯一考虑传播时间的一个部分。粒子的运动与 Part A 所描述的相同。

1. （1.2 分）在某一时刻，粒子经历的时间(粒子上的时钟)为τ，用粒子上的时钟来观测，静止系中位于$x = 0$处的时钟上的读数 t_0等于多少？经过很长的一段时间后，时钟的读数t_0是否会趋于某一个固定值？如会，该值是多少？
2. （0.8 分）现在考虑相反的情况。位于原点（$x = 0$）的观察者，观察粒子上的时钟，观察者自己的时钟的读数为 t，则他所测量到的粒子上的时钟τ_0是多少？经过一段很长的时间后，该值是否会趋于某固定值？如会，该值是多少？

Part C. 闵可夫斯基图（1.0 分）

在很多情况下，利用闵可夫斯基图可有效地演示相对论事件。做这样一个图，我们仅需要利用静止参照系和运动参照系 S ′ （相对于静止坐标系的运动速度为 $v = \beta c$ ）之间的洛伦兹变换。

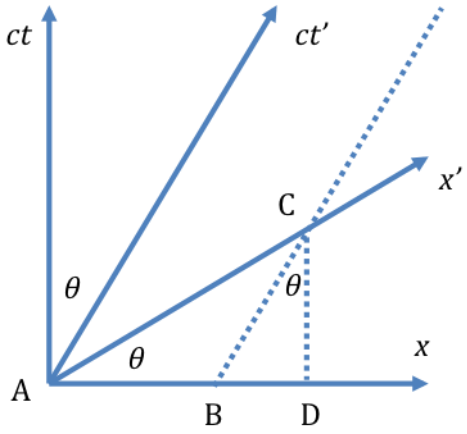
$$x = \gamma(x' + \beta ct'),$$
$$ct = \gamma(ct' + \beta x'),$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct),$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x).$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



我们选择 x 和 ct 作为正交（直角）系的两个坐标轴，运动参照系 S ′ 中的点 (x′ , ct′) = (1,0) 在静止参照系 S 中的坐标为 (x, ct) = (γ , γ β)，此点和原点的连线定义为 x′ 轴。运动参照系 S ′ 中的另一个点 (x′ , ct′) = (0,1) 在静止参照系 S 中的坐标为 (x, ct) = (γ β, γ)，此点和原

点的连线定义为 ct′ 轴。x 和 x′ 轴的夹角为 θ，tan θ = β。运动参照系 S′ 中的单位长度在静止参照系 S 中的长度为 $\gamma\sqrt{1+\beta^2}=\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$。

为了更好地理解闵可夫斯基图，我们先来看一个例子，考虑一个在运动坐标系 S’ 中的长度为 L 的棍子，看看它在静止坐标下下的长度是多少。请看下图：



棍子长度由图中的线段 AC 表示，长度 AC 等于 S 坐标系下的 $\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}L$。S 坐标系下的棍子长度由线段 AB 表示.

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{AD} - \mathrm{BD} \\ &= AC\cos\theta - AC\sin\theta\tan\theta \\ &= L\sqrt{1-\beta^2}\end{aligned}$$

1. （**0.5 分**）利用闵可夫斯基图，计算静止参照系中长度为 L 的棒在运动参照系中的长度。
2. （**0.5 分**）现考虑 Part A 中的情况。画出粒子的 ct 参数和位置 x 之间的关系图。在该图中画出当 gt/c = 1 时的 x′ 轴与 ct′ 轴，长度单位分别为 $x(c^2/g)$ 和 $ct(c^2/g)$。

Part D. 两个加速粒子（2.3 分）

在该部分，我们将考虑两个加速运动的粒子，两个粒子具有相同的加速度，其大小为 g，沿 x正方向。第一个粒子的初始位置为 $x=0$，第二个粒子初始位置的 $x=L$。注意：在本部分中<u>不需考虑传播时间</u>。

1. （**0.3 分**）一段时间后，在静止参照系中的观察者作出一个观测。第一个粒子上的时钟读数为 τ_A。请问（静止参照系中的）观察者测量到的第二粒子上的时钟的读数 τ_B是多少？
2. （**1.0 分**）现在考虑从第一个粒子的运动参照系来进行观测。与第一个粒子

一同运动的观察者，观测到在某时刻，他的时钟的读数为 τ_1。同一时刻，他观测到第二个粒子上的时钟的读数为 τ_2。试证明：

$$\sinh\frac{g}{c}(\tau_2-\tau_1)=C_1\sinh\frac{g\tau_1}{c}$$

式中 C_1是常数，求出C_1的表达式。

3. （1.0 分）第一个粒子将会见到第二个粒子离它远去。证明：第一个粒子所观察到的两个粒子之间距离的变化率为

$$\frac{dL'}{d\tau_1}=C_2\frac{\sinh\frac{g\tau_2}{c}}{\cosh\frac{g}{c}(\tau_2-\tau_1)}$$

式中C_2为常数，求出C_2的表达式。

Part E. 均匀加速参照系（2.7 分）

在该部分中，我们将赋予粒子某固有加速度，以使两粒子各自测量到的它们之间的距离是相同且不变的。初始状态下，两粒子均为静止，第一个粒子位于 $x=0$，第二个粒子位于 $x=L$。

1. **（0.8 分）**第一个粒子的固有加速度沿 x正方向，大小为 g_1。当粒子加速运动，静止参照系中存在一个固定点 $(x_p,0)$。从第一个粒子观测，在整个运动过程中，该点与第一个粒子之间的距离固定不变。求 x_p。
2. **（1.3 分）**第一个粒子的固有加速度为 g_1，求第二个粒子的固有加速度 g_2，以使第一个粒子测量到的两粒子间距离为常数（不变）。
3. **（0.6 分）**求第一个粒子测量到的两粒子的时钟变化的比值$\frac{d\tau_2}{d\tau_1}$。

Part F. 全球定位系统(GPS)的修正（2.2 分）

从 Part E 中得知，位于不同高度上的时钟的快慢并不相同，即使这些时钟之间没有相对运动。跟据广义相对论的等效原理,位于一个封闭小房间中的观察者，不能分辨出引力g及由加速度为g的加速系而产生的惯性力之间的区别。因此我们可以总结出，对于两个位于不同引力势下的时钟，其走的快慢速度并不相同。

现在我们将考虑一个周期为 12 小时环绕地球的全球定位系统(GPS)卫星。

1. **(0.6 分)** 假设地球表面的重力加速度为 9.78 $\mathrm{m.s^{-2}}$，地球的半径为6380km。请求出 GPS 卫星轨道的半径及卫星的速度的表达式，并计算出具体数值。
2. **(1.2 分)** 经过一天后，地面上及卫星上的时钟的读数会因为狭义相对论和广义相对论效应而不同。请计算经过一天后，这两种效应各自所产生出的时间的差别，并且计算总的时间差。地面上的时钟较快,还是卫星上的时钟较快?
3. **(0.4 分)** 请估计经过一天后因以上效应而导致的空间位置误差，给出具体数值。

自旋物理

宇宙中所有物质，除了质量和电荷外，还有一种称为自旋的基本性质。自旋是对粒子本身所带角动量的基本描述。尽管需要量子力学才能完全解释自旋，我们还是可以使用经典物理来研究自旋。在本题中，我们就将使用经典方法来探讨磁场对自旋的影响。

自旋的力矩的经典表达式为：

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}.$$

这里，角动量$\boldsymbol{L}$代表粒子的固有自旋，$\boldsymbol{\mu}$是粒子的磁矩，$\boldsymbol{B}$是磁感应强度。粒子的自旋与磁矩的关系为：

$$\boldsymbol{\mu} = -\gamma \boldsymbol{L}$$

式中γ是旋磁比。

本题中，术语“频率”表示角频率(rad/s)，是一个标量。所有黑体字母代表矢量；不是黑体的字母代表标量。

Part A. 拉莫进动（1.6 分）

1. **(0.8 分)** 证明在在磁感应强度为$\boldsymbol{B}$的磁场作用下，磁矩的大小μ总是一个常数。在磁场为稳恒（常数）的特殊情况下，证明$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{B}$的夹角为常数。（提示，可使用矢量点乘和叉乘的性质）
2. **(0.8 分)** 匀强磁场$\boldsymbol{B}$与粒子的磁矩$\boldsymbol{\mu}$的夹角为ϕ。由于磁场产生的力矩，磁矩$\boldsymbol{\mu}$绕着磁感应强度为$\boldsymbol{B}$的磁场转动，这称为拉莫进动。确定磁矩的拉莫进动的频率ω_0与$\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{k}$的关系。

Part B. 旋转坐标系（3.4 分）

在这一部分，我们选择一个旋转的坐标系 S′作为参照系。实验室参照系 S(x，y，z) 中的观察者看到旋转坐标系 S′（x′，y′，z′）以角速度 ωk 旋转，且 t = 0 时刻 x′，y′，z′与 x，y，z 重合。任一实验室参照系下的矢量 A = Ax i + Ay j + Az k 在旋转的坐标系 S′可写为$\boldsymbol{A} = A_x'\boldsymbol{i}' + A_y'\boldsymbol{j}' + A_z'\boldsymbol{k}'$。矢量对时间的导数即为

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dA_y'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dA_z'}{dt}\boldsymbol{k}'\right) + \left(A_x'\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} + A_y'\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} + A_z'\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}\right)$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{lab} = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{rot} + (\omega\mathbf{k} \times \boldsymbol{A}),$$

式中，$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{lab}$是实验室参照系中的观察者看到的矢量 A 对时间的导数，$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{rot}$是旋转参照系中的观察者看到的矢量 A 对时间的导数。本部分(Part B)的所有问题均在旋转参照系中考虑。

1. **(0.8 分)** 证明：磁矩随时间的变化满足方程

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt}\right)_{rot} = -\gamma\,\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}_{eff},$$

式中 $\boldsymbol{B}_{eff} = \boldsymbol{B} - \frac{\omega}{\gamma}\boldsymbol{k}'$ 为有效磁感应强度。

2. **(0.4 分)** 当$\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{k}$时，用 ω_0 和 ω 表示此时的进动频率。

3. **(1.2 分)** 现考虑磁场随时间变化的情况。除稳恒磁场外我们再加上一个旋转磁场$\boldsymbol{b}(t) = b(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j})$, 因此 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b}(t)$。证明此时磁矩的拉莫进动频率为：

$$\Omega = \gamma\sqrt{\left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)^2 + b^2}$$

4. **(1.0 分)** 如果不是加上上述的磁场$\boldsymbol{b}(t) = b(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j})$, 而是加上一个反向旋转的磁场$\boldsymbol{b}(t) = b(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \sin\omega t\,\boldsymbol{j})$,因此 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{k} + b(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \sin\omega t\,\boldsymbol{j})$。此时有效磁感应强度$\boldsymbol{B}_{eff}$为多少(用单位矢量$\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$表示答案)? 其时间平均值$\overline{\boldsymbol{B}_{eff}}$ 为多少(注意： $\overline{\cos 2\pi t/T} = \overline{\sin 2\pi t/T} = 0$)?

Part C. 拉比(Rabi)振荡（3.0 分）

一个由 N 个粒子组成的系统处在大场强磁场的作用下。其自旋有两个量子态：“向上”和“向下”。故两种自旋状态的粒子数$N_\uparrow$和$N_\downarrow$应满足：

$$N = N_\uparrow + N_\downarrow$$

自旋为向上和向下的粒子数之差会产生宏观的磁化，磁化方向沿z轴：

$$M = (N_\uparrow - N_\downarrow)\mu = N\mu_z$$

在实际的实验中，一般会使用两个磁场，一个场强较大的偏置磁场B_0k以及一个场强为2b、方向垂直于偏置磁场的振荡磁场（$b \ll B_0$）。开始时，只加上场强较大的偏置磁场，以使所有粒子处在自旋为向上的量子态中（在$t = 0$时μ沿 z 轴）。然后，开启振荡磁场，其振荡频率ω与拉莫进动的频率ω_0相同，即$\omega = \omega_0$, 以使两者处于共振。换句话说，在$t = 0$后，总磁场为：

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0\boldsymbol{k} + 2b\cos\omega_0 t\,\boldsymbol{i}$$

1. (1.2 分)在旋转参照系S'中，证明等效磁场可以近似表示为

$$\boldsymbol{B}_{eff} \approx b\boldsymbol{i}'$$

该表达式通常称为旋转波近似。求在旋转参照系S'中的进动频率Ω。

2. （0.6 分）求$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{B}_{eff}$的夹角α。并证明磁化强度随时间的变化为：

$$M(t) = N\mu(\cos\Omega t)$$

3. （1.2 分）在上述磁场的作用下，以时间作为自变量求自旋为向上的粒子的分布$P_\uparrow = N_\uparrow/N$以及自旋为向下的粒子的分布$P_\downarrow = N_\downarrow/N$。作图画出$P_\uparrow$(t)和$P_\downarrow(t)$相对于时间$t$的图像。这种粒子自旋态分布随时间变化的现象称为拉比(Rabi)振荡。

Part D. 测量的不兼容性（2.0 分）

自旋是一个矢量，但是由于其量子力学的海森堡不确定关系，我们不能够同时测量各个分量(即：我们只能同时确定μ_z和$|\mu|$，却不能同时得到μ_x, μ_y, μ_z和$|\mu|$)。在这部分中，我们利用海森堡不确定关系($\Delta p_q \Delta q \geq \hbar$))展示如何得到它们之间测量的不兼容性。

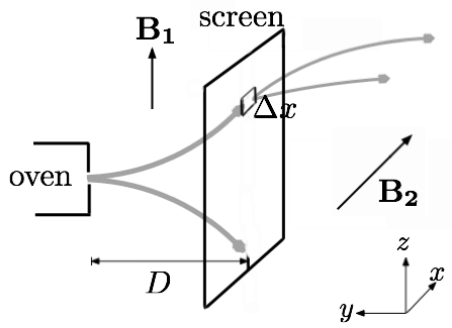
1. **(1.0 分)** 我们考虑一个银原子源，该源有一个很小开口。银原子由开口处向$-y$轴方向射出(请参考以下图示)。射出的原子经过一个随空间变化的磁场$\boldsymbol{B}_1$。磁场$\boldsymbol{B}_1$沿z方向有场强较大的偏置分量，以使带有不同磁矩($\mu_z = \pm\gamma\hbar$)的原子当经过$\boldsymbol{B}_1$时被分离。在距离开口D的位置有一屏幕SC_1，该屏幕只容许带有自旋为向上的原子通过(禁止自旋为向下的原子通过)。所以经过屏幕后所有原子均处在自旋为向上的量子态中。之后，原子进入一个非均匀磁场$\boldsymbol{B}_2$，原子在磁场B_2内受力为

$$F_x = \mu_x C.$$

磁场$\boldsymbol{B}_2$在x方向有强的分量，使原子带有磁矩$\mu_x = \pm\gamma\hbar$。观察原子在x方向的分离可用来测定μ_x，请证明必须符合下述条件：

$$\frac{1}{\hbar}|\mu_x|\Delta x C t \gg 1,$$

其中t是离开屏幕SC_1后的时间，Δx是SC_1开口的宽度。



（图中，oven 此处指银原子源，screen 为屏）

2. **(1.0 分)** 在经过屏幕SC_1过滤后的原子均在自旋为向上的量子态中，其中$\mu_z = \gamma\hbar = |\mu_x|$。这意味着原子在$\boldsymbol{B}_2$的$x$分量($B_{2x} = B_0 + Cx$)作用下的进动频率将涵盖一定范围$\Delta\omega$。请证明进动角的分布$\Delta\omega t$非常大,以致我们不能够同时测量$\mu_x$和$\mu_z$。换句话说，对$\mu_x$的测量破坏了$\mu_z$的信息。

风能及其测量

I. 实验装置

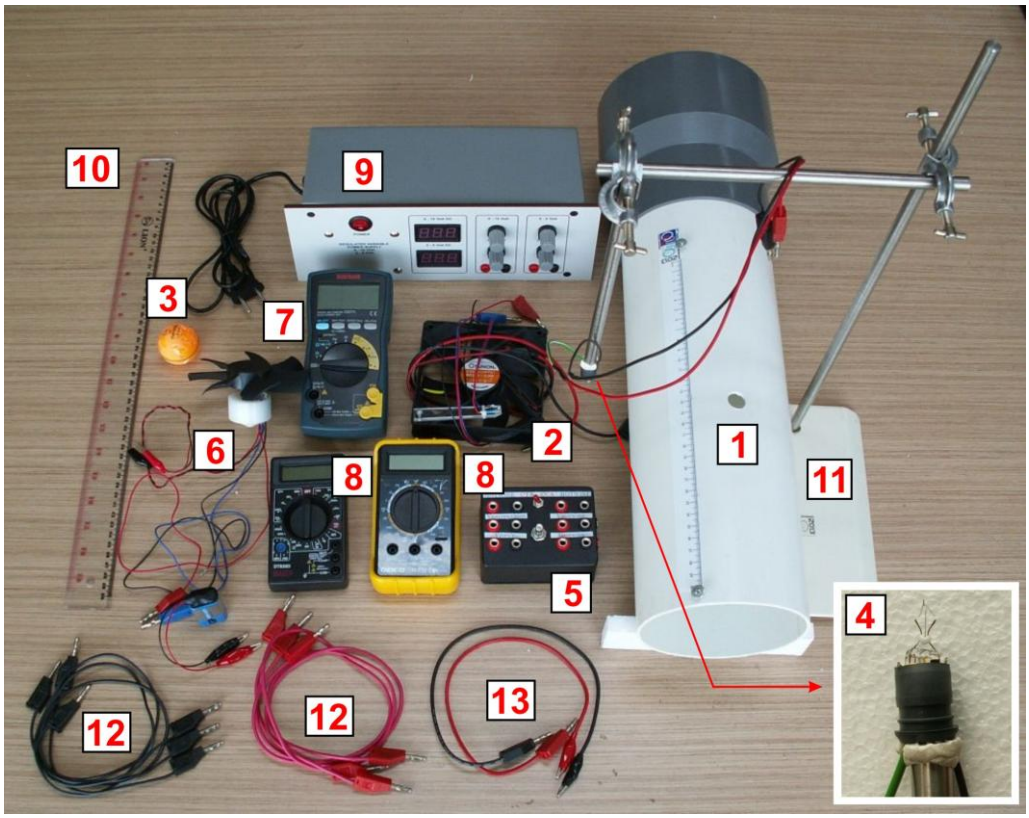


图 1. 全套装置

1. 带有镍铬合金线的风洞
2. 计算机风扇：带有频率传感器
3. 乒乓球
4. 热丝：**请注意**勿触
5. 用于控制热丝供电的电路盒(coarse 意为粗调，fine 为细调)
6. 涡轮扇：带有频率传感器
7. #1 数字万用表：用于频率测量
8. #2 和#3 数字万用表
9. 电源：最大输出电压为 15V 和 9V，电压可调
10. 刻度尺（50cm）
11. 固定支架
12. 两端都是香蕉插头的电线（3 对）
13. 一端为香蕉插头，一端为鳄鱼夹的电线（1 对）

常量和数值:

重力加速度:	g = 9.81 m/s^2
空气密度:	ρ_A = 1.2 kg/m^3
乒乓球直径:	d_B = (39.5 ± 0.1) mm

不需要进行误差分析

II. 介绍

风能是一个快速发展的可再生绿色能源，并日益成为解决人口快速增长的重要能源。利用图 1 所示的风力发电机可将风能转化为电能。

我们将探讨风能、风动涡轮扇及其相关测量等方面的物理学问题。我们将考察测量风速的两种方法，即乒乓球风速计和热丝风速计。最后我们还将探讨风动涡轮的物理学问题及其功率转化效率。我们将使用一端带有排风扇的风洞来提供一个平缓（非紊乱）的风流（平流）。

实验分为 5 部分

A. 理论背景
B. 风洞
C. 乒乓球风速计
D. 热丝风速计
   （1） 恒温法
   （2） 恒电流法
E. 风力发电机



图 2 风力发电厂的一排风力发电机

III. 实验和问题

[A] 理论背景[1.0 分]

我们将考察风能和风力发电机的功率转化效率的基础理论问题

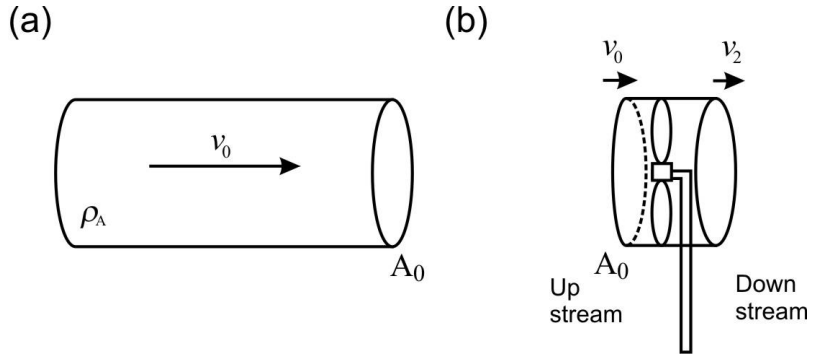


图 3.（a）管状风流（横截面积为 A_0）（b）拦截风流的风动涡轮扇，图中 upstream 和 downstream 分别为进气口和出气口的意思

[A.1] 考察一段密度为ρ_A 的空气流过横截面积为 A_0 的管道，如图 3（a）所示。证明风流所具有的功率为：

$$P_W = \frac{1}{2}\rho_A A v_0^{\,n} \tag{1}$$

n 的数值是多少？我们也会在 B.3 部分通过实验来测定 n 的数值。

[0.4 分]

[A.2] 现考虑一个风动涡轮，旋转面积为 A_0，拦截管状风洞中相同面积的风流，如图 3(b)所示。涡轮处风速为 $v_1 = (v_0 + v_2)/2$。风动涡轮扇能够获取的最大功率为：

$$P_R = \tfrac{1}{4}\rho_A A_0 (v_0 + v_2)(v_0^{\,2} - v_2^{\,2}) \tag{2}$$

出气口处风速减弱，衰减因子设为λ，且 $\lambda = v_2 / v_0$。为使风动涡轮获取最大功率，λ不能太小（否则风流将停止），也不能太大（否则风动涡轮只能截获很小的风能）。找出 风动涡轮能获取最大功率的 λ 的最佳值。

[0.4 分]

[A.3] 我们定义轮机效率（或功率系数）Cp，其为风动涡轮扇叶获取的功率 P_R 与风流所具有的功率 P_W 的比值：

$$C_P = \frac{P_R}{P_W}. \tag{3}$$

根据你在 A.2 中的答案，找出 C_P 的最大值。这个最大值称为 Betz 效率，它给出了风动涡轮功率转化效率的理论极限值。

[0.2 分]

[B] 风洞 [3.2 分]

我们将用一个带有计算机风扇的风洞，计算机风扇作为风发生器将风洞中的风吸出（排风型风洞），以获得平缓的气流。

风能工程中，测量风动涡轮的转速非常重要。我们将使用一个简单的光传感电路（如下所示）来测量涡轮扇页的转动频率。光电传感器含有一对红外光发射器和接收器，涡轮扇页上贴有反光片，扇页转动时可探测到该反光片发出的反射光。

操作说明和注意点:

(a) 如图 4 所示连接光电传感器电路
(b) **注意：** ***请小心将光传感器的鳄鱼夹夹到电池上，这些元件易破损***
(c) **注意：** ***如果你不需要读出涡轮扇转动的频率，请不要连接电池以避免电池用尽。***
(d) **注意：** 如果你需要读出电源电压，可以使用数字万用表（DMM）以获得更佳的有效数据。
(e) **注意：** 如果你使用万用表的电流计档，请注意测量范围档位不要超量程。如果数字万用表保险丝烧了，你只有一个备用保险丝。

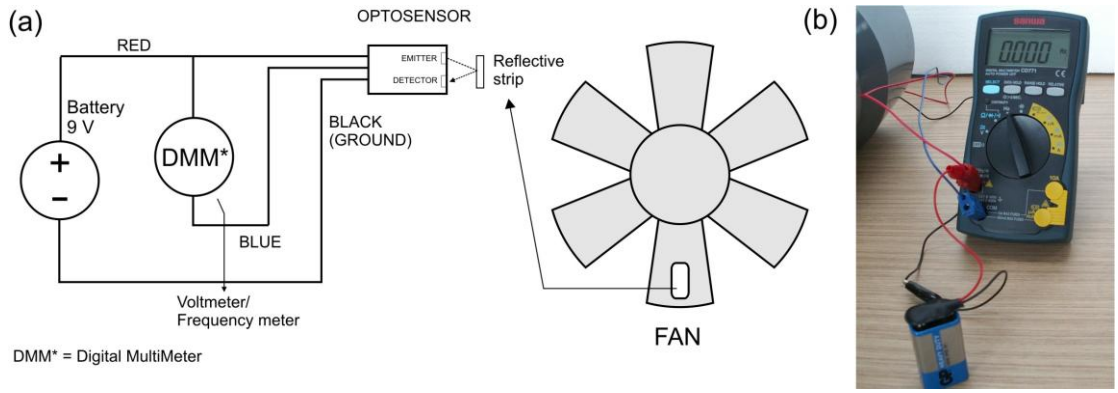


图 4. 光电传感器输出接#1 数字万用表，工作在电压表或频率计模式上。图中，RED 表示红线。

[B.1] *切断涡轮扇的电源，*切换#1 数字万用表（DMM#1）至电压计模式（在 DMM 上标有 **V**）并*手动慢慢旋转*风扇，你将看到电压在变化。粗略画出光传感器的信号关于扇叶转动（或时间）的函数曲线，指出信号的周期。

[0.8 分]

风洞内的风速主要取决于风发生器（计算机风扇）电机的转动频率(f_M)。风速（于风洞中心位置测量）和风发生器电机的频率之间的关系如图 5 所示，并符合线性关系：

$$v = 0.0873\,\text{meter} \times f_M \qquad (4)$$

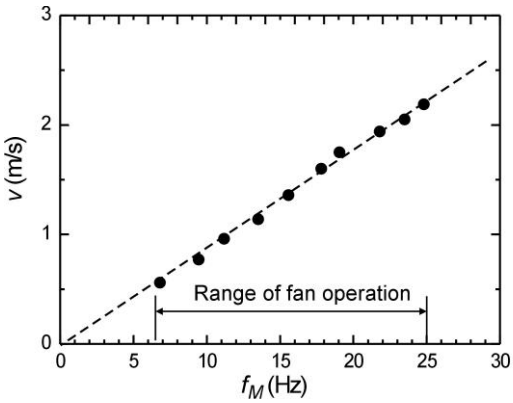


图 5. 风速（风洞中心位置）vs. 风发生器电机转动频率。

[B.2] 额定电压下（3 V < V_M < 12 V）风发生器风扇具有相当固定的机械效率（产生的风流功率 P_W 和为风扇供电功率 P_M 之比）。这个机械效率定义为 $\eta_M = P_W / P_M$。做实验确定机械效率η_M 以及方程（1）中风流功率的功率因子 n。画出实验中的器件连接图。

[2.4 分]

[C]乒乓球风速计 [3.5 分]

测量风速是风能工程学中首要的测量行为。我们通过一个乒乓球摆（如图 6）来设计一个测量风速的简单方法。

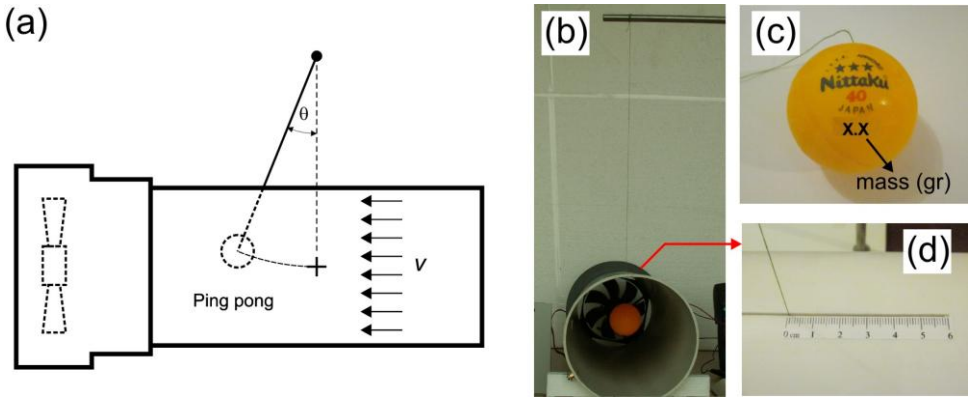


图 6. 乒乓球风速计实验

其工作原理非常简单，风将会给予乒乓球一个拉力，使乒乓球摆偏斜一个角度θ。这个拉力表达为

$$F_D = \tfrac{1}{2} C_D \rho_A A_B v^m, \qquad (5)$$

式中 C_D 是物体的拉力系数, ρ_A 是流体（空气）的密度 , A_B 是乒乓球的横截面, v 是乒乓球相对流体（空气）的速度， m 是功率因子。 乒乓球的质量 m_B （单位为克）标记在球上，如图 6(c)所示。其他要用到的**数据**请参看第二页。

操作说明和注意点:

(a) 如图 6（d）所示，利用刻度尺将摆线塞进狭缝中。将乒乓球放置在风洞管道的中心。刻度尺用于计算偏斜角 θ

(b) **注意：**线和乒乓球的连接处易破碎，请小心不要过力。

(c) **注意：**请确保线可以自由移动，不要让摆线碰到狭缝壁。你可以用铅笔轻推或者稍用力推动摆线以确保摆线可以自由运动。有风时线摆偏离，而没有风的时候摆可以回到原来位置。

(d) **注意：**如果你不需要读取电机频率，请断开 9V 电池以免损失电量。

[C.1] 建立一个风速 v 和偏移角θ函数关系的模型。画出受力图。函数关系式中要用到空气质量密度 (ρ_A) 和乒乓球质量(m_B)以及其他一些参量。

[0.7 分]

[C.2] 完成实验，测定 C_D 和 m.

[2.8 分]

[D] 热丝风速计 [6.7 分]

我们前面研究的兵乓球风速计实际上并不实用，实际应用中希望能够有电子读数。因此，我们将研究另一种测量风速的方法：热丝风速计（HWA）。HWA 利用的细丝当有电流通过时会变热。当风吹过时，产生的强制对流从细丝带走热量，从而细丝的温度（以及电阻）会降低，如图 7 所示（除非通过提高电功率进行补偿）。这种现象可以被用来测量风速。在本实验中，我们将研究热丝随着风速变化的特性。

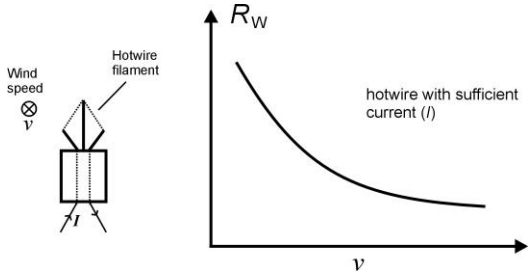


图 7. 有风吹进平面的热丝风速计。图中 Wind speed 指出风速的方向，Hotwire filament 意思是热丝，曲线给出了额定电流下热丝功率和其风速的关系。

我们使用的是金属（钨）细丝，它是通过将普通灯泡打碎后将细灯丝取出来的。当温度发生小幅变化时，细丝的电阻满足线性关系：

$$R_w = R_0[1+\alpha(T_w - T_0)], \qquad (6)$$

式中， R_w 是温度为 T_w 时细丝的电阻, R_0 是温度为 T_0 时的电阻，α 是电阻的温度系数。对于钨，此值为 $\alpha = 4.5\times10^{-3}/°C$ 。

现在，我们考虑热丝与周围环境的热量传递，它可以是通过自然对流（没有风/流体运动的外部源的情况）、强迫对流（具有外部扰乱源的情况）、传导（主要与细丝夹持物和底座）和辐射。

考虑细丝通过外部源（例如电流）加热的情况，并且细丝通过上述所有过程向周围环境传递热量。当系统达到平衡，功率平衡可以表示为：

$$P_{\text{input}} = Q_{\text{forced convection}} + Q_{\text{natural convection}} + Q_{\text{conduction}} + Q_{\text{radiation}},$$
$$Vw.\,Iw = h'Aw\,(Tw - T_0) + Q_{\text{nc}} + Q_{\text{conduction}} + Aw\,\sigma\,\varepsilon\,(Tw^4 - T_0^4) \qquad (7)$$

公式（7）中的英文意思为：input：输入，forced convection：强迫对流，natural convection：自然对流，conduction：传导，radiation：辐射。

式中，A_w 是细丝的表面面积，T_0 是房间/环境温度（假定为细丝的原始温度），σ 是斯特藩-玻耳兹曼常数，ε 是发射率，h' 是强制对流热量转换系数。

对于热丝细丝的强迫对流，其过程可以用金氏定律描述：$h' = a' + b\,v^c$，这里 a' 和 b 是常数，c 是风速的功率因子。细丝的长度远大于其宽度，因此通过传导方式引起的热量传递可以忽略。对于微小的温度变化($T_w \sim T_0$)，$T_w^4 - T_0^4 \sim T_0^3(T_w - T_0)$，因此辐射热传递可以写为 $4\,Aw\,\sigma\,\varepsilon\,T_0^3(Tw - T_0) \rightarrow k\,(Tw - T_0)$，并且 Q_{nc} 可以被认为恒定不变。考虑所有这些后，我们可以将方程（6）改写为：

$$V_W \cdot I_W = (a + bv^c)A_w(T_w - T_0), \qquad (8)$$

这里，$a = a' + Q_{\text{nc}}/(T_w - T_0) + 4Aw\,\sigma\,\varepsilon\,T_0^3$

现在我们用两种方法进行实验来确定 b/a 和 c 的数值：恒温热丝和有恒定电流通过的热丝（恒电流热丝）。

如图 8(a)所示将热丝固定在钢杆上，然后通过小孔将其放入风洞内（你可以转动风洞，会发现壁上的小孔）。当你把热丝插入风洞时要确保方向正确：热丝的最大截面要垂直于风流方向，如图 8(b)所示。

注意：请不要触碰热丝！

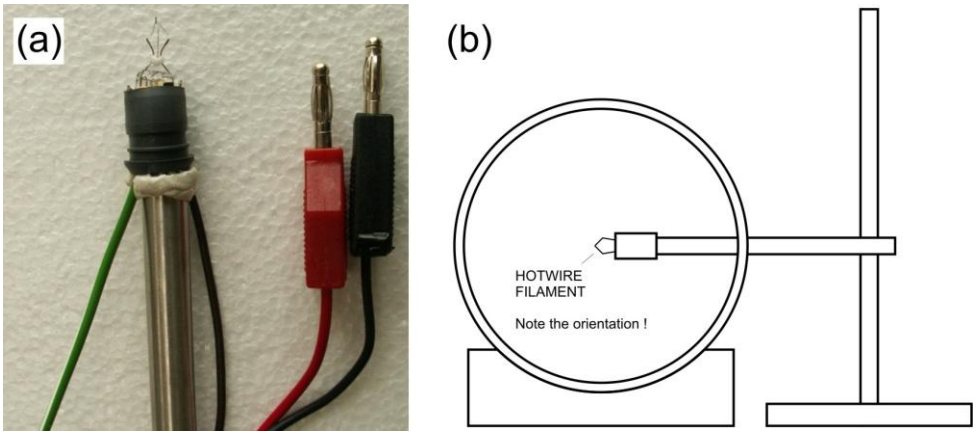


图 8 (a)热丝(b)热丝在风洞中，注意热丝的取向

做两个实验所需要的电路由一个电路盒提供，如图 9 所示。两个实验，分别使用电路盒一侧的电路。盒子的顶部有一个小的开关，可以在两边切换，标记为 CTA(恒温风速仪)和 CCA(恒流风速仪)。

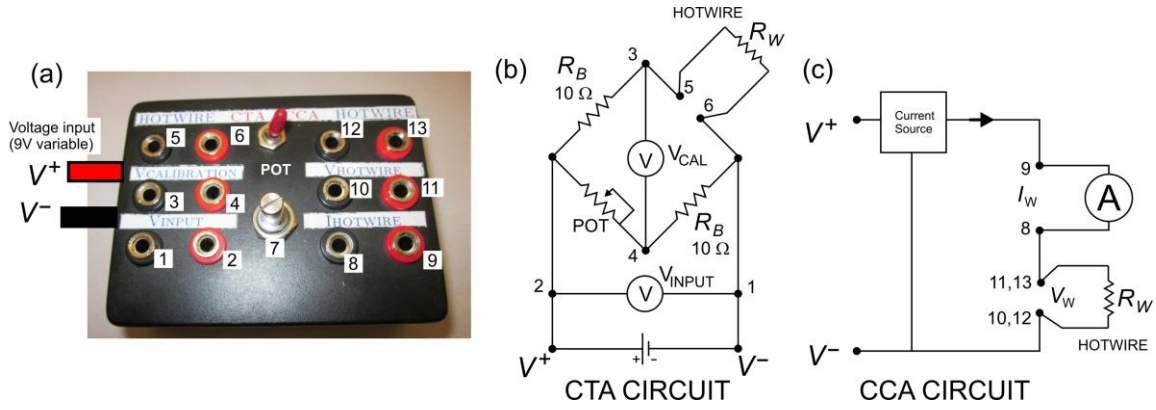


图 9 (a)热丝电路盒(b) 恒温风速仪 (CTA)电路 (c) 恒流风速仪 (CCA)电路

图中 voltage input 9V variable 意为：电压输入，9V 可调。CALIBRATION:校准 INPUT：输入，Hot wire：热丝，CTA CIRCUIT：恒温风速仪 (CTA)电路，CCA CIRCUIT ：恒流风速仪 (CCA）电路。

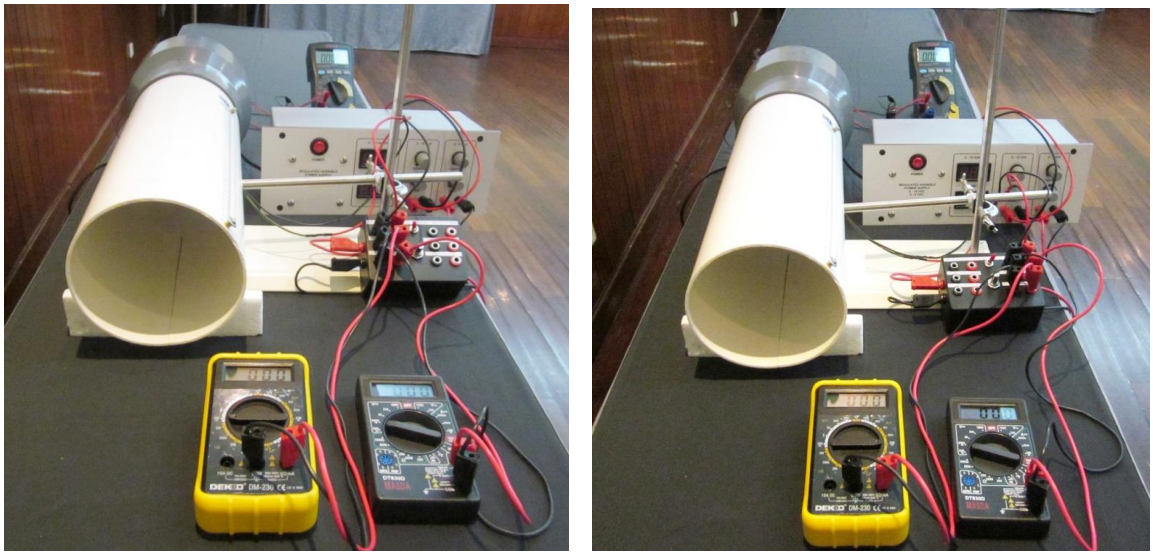


图 10. (a) 恒温风速仪 (CTA) 实验装置。(b) 恒流风速仪 (CCA) 实验装置。

[D.1] 恒温方法 [3. 2 分]

恒温方法中，不同风速时，热丝的温度（电阻）保持不变。为此，我们使用惠斯通电桥，在热丝的对边使用一个可变电位器（POT）以平衡电桥，如图 9(b)所示。

首先，通过调节可变电位器 POT（利用电路盒上的旋钮）使 $V_{CALIBRATION}$ 为零以使电桥平衡。当风速增大时，R_W 减小，电桥失去平衡。为了恢复 R_W 使电桥重新平衡，需要增大 V_W (通过增加 V_{INPUT})以提高功率耗散。

下面的公式用于恒温实验：

$$\frac{V_W{}^2}{R_W} = (a + bv^c)A_w(T_w - T_0), \tag{9}$$

这里 V_W 和 R_W 是热丝上的电势和电阻。我们不测量热丝的电势，而是测量惠斯通电桥上的电势降落(V_{INPUT})。则上面的公式（9）可改写为：

$$V_{INPUT}{}^2 = A + Bv^c. \tag{10}$$

[D.1.1] 求出 A 和 B 的表达式

[0.4 分]

公式（10）可以被改写为如下的线性形式，从而可以在线性回归中使用：

$$\ln y = \ln\frac{b}{a} + c\ln v. \tag{11}$$

[D.1.2] Y 的表达式是什么?

[0.3 分]

[D.1.3] 进行实验，得到 b/a 和 c 的值。

[2.5 分]

操作指南和注意事项：

(a) 将电路盒上开关拨到恒温模式（CTA）。

(b) 根据图 9（b）和图 10（a）连接导线和插头。对热丝电路盒使用 9V 电源。

(c) **注意：小心不要触摸和损坏热丝细丝。如果损坏了热丝，则整个实验过程中只能再提供一根替换热丝。**

(d) 仔细检查所有连接是否正确，并确保在打开电源之前电源上的所有旋钮都被旋到最低（左）。

(e) 打开电源并缓慢提高电路盒上的电压到 1V 左右。之后，必须调节惠斯通电桥上的可变电阻器以使 V_{CALIB} 为 0。在开始鼓风之前，调节可变电阻器以使 V_{CALIB} 为 0。我们称该条件下的电桥为平衡的。

(f) **注意：在没有风的时候，电压不能超过 2V，否则将损坏热丝。如果热丝发红发光，热丝就被损坏了。记住：整个实验过程只能提供一根备用热丝。**

(g) 提高风速，调节 V_{INPUT} 以使电桥重新平衡，热丝电阻回到初始值

(h) 重复步骤(g)直到获得足够多的数据。在答题纸上记录数据并画图，确定 b/a 和 c。

(i) **注意：关闭热丝的电源之前不要减小马达的功率。**如果减小马达的功率的话，热丝可能会过热并损坏。记住：**整个实验过程只能提供一根备用热丝。**

[D.2] 恒流方法[3.5 分]

恒流实验中，电路盒用作恒流源，使流过热丝的电流恒定。可以通过调节盒子上的电位器调节电流。
下面的公式用于恒流实验：

$$V_W \cdot I_W = (a + bv^c)\frac{A_w}{\alpha R_0}(R_w - R_0), \qquad (12)$$

此公式是通过替换 $T_w - T_0 = \frac{R_w - R_0}{\alpha R_0}$ 从公式（8）得出来的。
此实验中，首先需要在没有风(v=0)的情况下测量 R_0，公式 (12)可被改写为：

$$\frac{V_W}{I_W} = \frac{R_0}{k}V_W \cdot I_W + R_0 . \qquad (13)$$

[D.2.1] 寻找 k 的表达式

[0.2 分]

[D.2.2] 进行实验以确定 R_0 的数值.

[1.2 分]

操作指南和注意事项:

(a) 将电路盒上的开关拨到恒流模式（CCA）。
(b) 根据图 9(a)和图 10 (b)连接导线和插头。仔细检查所有连接是否正确，并确保在打开电源之前电源上的所有旋钮都被旋到最低（左
(c) **注意：不要使电流超过 180mA**，否则将损坏热丝。如果热丝发红发光，热丝就被损坏了。记住：**整个实验过程只能提供一根备用热丝。**
(d) 打开电源并缓慢提高热丝上的电压或者电流。
(e) 注意:你可以通过调整电路盒上的电位器来限制热丝上的电流（即使你增大电源的电压时，通过热丝的电压和电流也不变）。我们建议你将电源的电压设为 7.5V，从而为电路盒提供稳定的工作电压。
(f) 确保测量电流的数字万用表（DMM）工作正确，读数不为 0。DMM 上的电流测量电路有保险丝保护。如果保险丝断了，DMM 仍然好像在工作，但是电流测量将始终为 0。
(g) 记录热丝上的电流和电压。

(h) 重复步骤(g)直到获得足够多的数据。在答题表上记录数据并画图，确定 k 和 R_0。

现在我们可以像恒温情况那样来确定 b/a 和 c 。改写公式 （12）为下面形式：

$$\ln y = \ln\frac{b}{a} + c\ln v\,. \tag{14}$$

[D.2.3] 此情况中 y 的表达式是什么？

[0.2 分]

[D.2.4] 进行实验以确定 b/a 和 c 的值 。

[1.9 分]

操作指南和注意事项

(a) 确保在打开电源之前电源上的所有旋钮都被旋到最低（左）。打开电源，缓慢增加热丝上的电压/电流。
(b) 调节电位器，以达到你所需要的工作电流。
注意：不要使电流超过 180mA，否则将损坏热丝。如果热丝发红发热，热丝就被损坏了。记住：**整个实验过程只能提供一根备用热丝**
(c) 提高风产生器（计算机风扇）的电压以产生风。
(d) 记录在此风速下热丝上的电流和电压。
(e) 重新调整风速，重复步骤(d)直到获得足够多的数据。
(f) 在答题表上记录数据并画图，确定 b/a 和 c。

[E] 风力发电机[5.6 分]

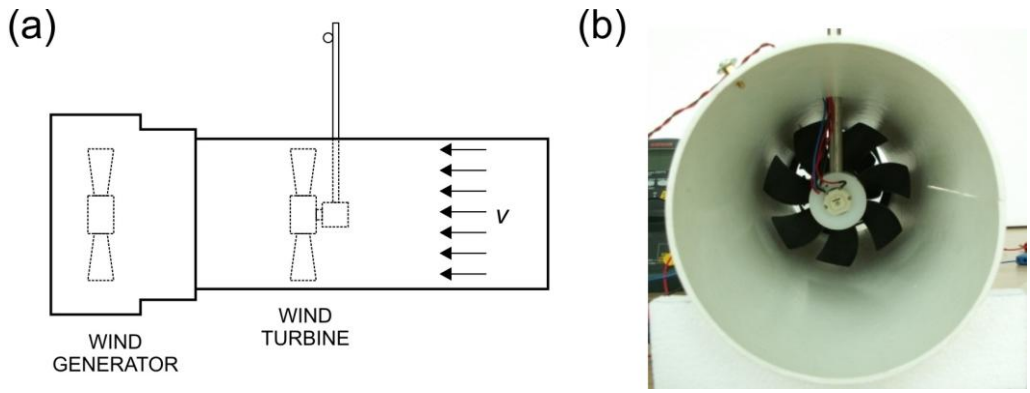


图 11 风力发电机实验装置

图中，WIND GENERATOR：风发生器（指计算机风扇），WIND TURBINE：风力发电机（指涡轮扇）

我们将研究风力发电机的物理过程及其功率转化效率。这部分实验中，我们用一个直流电机来用作风力发电机，以将机械能转化为电能。

影响风力发电机效率的一个因素是外部负载。本实验中，我们用一个镍铬电阻线来模拟低值电阻（<2 欧姆）的负载，以研究如何选择负载来产生最大效率。可以通过改变镍铬线的长度来改变负载的大小。用鳄鱼夹来连接电线。

影响风力发电效率的一个关键参数是叶尖速度比（TSR）,TSR 的定义式为：

$$TSR = \frac{\Omega R}{v}, \tag{15}$$

式中 Ω 是发电机中叶片的角速度， R 是风扇叶片的半径，v 是叶片尖上的风速。假定穿过风洞截面的风速是均匀的。

风力发电机内部的等效电路相当于一个电动势和一个内电阻。电机旋转时旋转线圈提供电动势（emf），等效内电阻为 R_M（电机内部线圈的电阻总和），R_M *很小但是不能忽略*(< 2 Ω) 。这样，实际的电机可以看成是一个理想的电机（理想的电机中的线圈没有电阻）加上一个阻值为 R_M 的电阻，如下图所示。

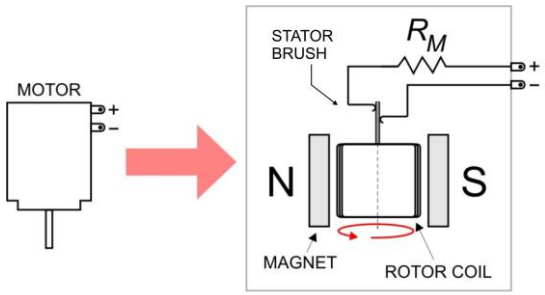


图 12 风力发电机的等效电路

图中，MOTOR 意为电机， STATOR BRUSH 意为定子电刷 MAGNET 意为磁铁，RORORCOIL 意为转子线圈

[E.1] 确定电机的内电阻 R_M 的值，注意直流电机的定子电刷和运动的转子相互接触时（见图 12）可能产生随着电机中叶片转动而变化的额外电阻。

[0.4 分]

[E.2] 确定镍铬电阻线的单位长度的电阻 λ_R (单位为： Ω/m)。注意相较于数字万用表（DMM）的接线电阻，镍铬线的电阻要小（<7 欧姆）。

[1.2 分]

如果你需要恒流源，可以将热丝电路盒设置在恒流风速计[Constant Current Anemometer (CCA)]模式。**如果你需要将#2 和#3 万用表用做安培表，请注意不要超过量程以免损坏保险丝。**

操作指南：

(a) 将风力发电机置于风洞内。首先，将电机上的香蕉头和鳄鱼夹通过风洞上方的小孔（放置风洞时小孔向上）穿出来，然后将支架上的钢杆（上面带有热电偶）插进小孔，并将电机固定在上面。如图 11 所示。

(b) 这个实验中，你需要测量两个频率：风产生器（计算机风扇）频率（进而可以通过计算得到风速）和风力发电机频率。为此，如图 13(a)那样连接好。你可以用黑色的鳄鱼夹来切换，读取风产生器的频率或者发电机的频率。

(c) 用鳄鱼夹连上电机和作为负载的镍铬线。你可以象图 13(b)那样，将镍铬线的两端连上电压表，***单独***测量其电压。

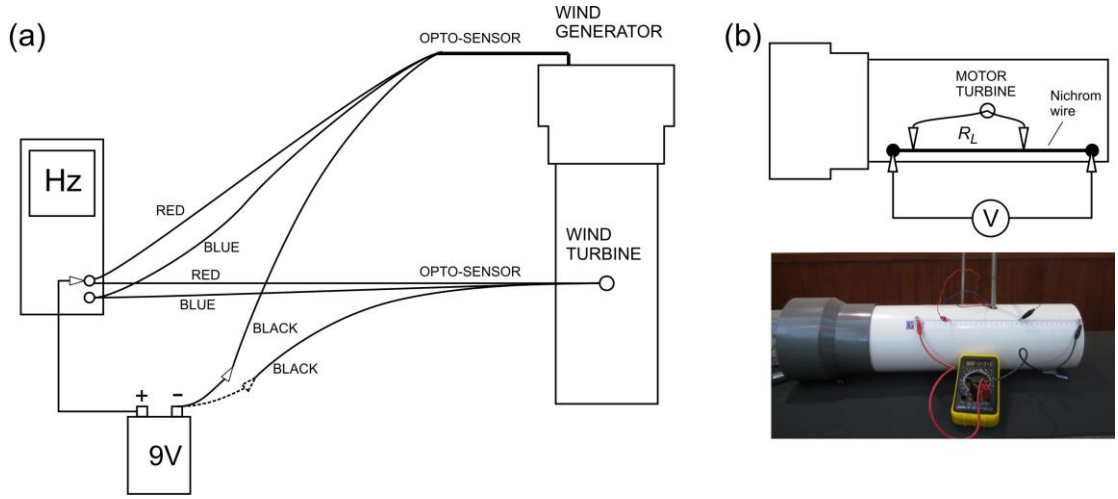


图 13 (a)测量两个频率的连接图。用黑线来选择读出风扇和湍流风的频率。(b)镍铬负载线的连接。注意电压表连在镍铬线的两端

图中 OPTO-SENSOR：光传感器，WIND GENERATOR:风发生器（计算机风扇），WIND TURBINE：风力发电机， MOTOR TURBINE：风力发电机，Nichrom wire：镍铬线，BLACK：黑色线， RED：红色线， BLUE：蓝色线

[E. 3] 通过实验来确定最大功率转化时的最佳负载 R_L。画出传给负载 R_L 的功率与 R_L 或长度 l 的关系图。理论上希望的 R_L 的值是多少？

[2.4 分]

风力发电机的效率η_{WT}定义为传给负载 R_L 的功率除以风流功率 P_W

[E.4] 使用你在 E. 3 中找到的最佳负载 R_L，作图给出η_{WT} 对 TSR 的依赖关系。

[1.6 分]

Theoretical 1: Solution
Conductors in Conducting Liquid

1. Using Gauss law

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{1}$$

Choose a cylinder (with a line charge as the axis) as the Gaussian surface, we obtain

$$E.2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}.$$

Simplify to obtain

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \tag{2}$$

2. The potential is given by

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\text{ref}}^{r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \\ &= -\int_{\text{ref}}^{r} E.dr \\ V &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C, \end{aligned} \tag{3}$$

so $f(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$.

3. The potential from both line charges is a superposition of both potential

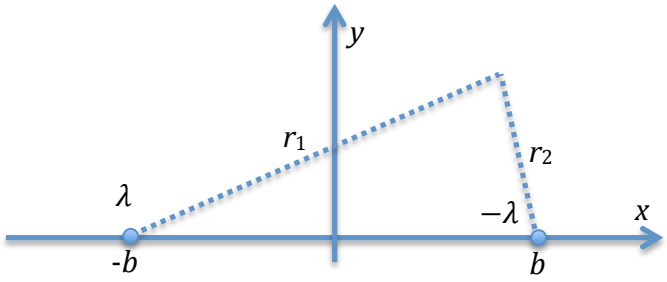


Figure 1: System with two line charges

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 \tag{4}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}}{\sqrt{(b+x)^2 + y^2}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2}. \tag{5}$$

4. From eq.(5), we see that for any arbitrary potential V, the equipotential surfaces of these two equal but opposite lines charge, are cylindrical surfaces. From this observation, we can choose the specific position for each line charge in both cylinder so that the surface of each cylinder is an equipotential surface.

   Consider the following figure

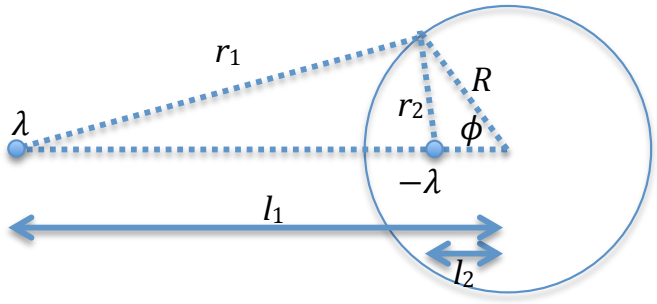


Figure 2: Two line charges with its equipotential surfaces

We would like to find a cylindrical equipotential surface enclose one line charge, let say the $-\lambda$ (if we could find the surface, by symmetry, we surely can find the identical one that enclose the line λ). The potential is given by

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r_2 \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln(l_1^2 + R^2 - 2l_1R\cos\phi) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln(l_2^2 + R^2 - 2l_2R\cos\phi). \end{aligned} \tag{6}$$

Since the surface of the cylinder has to be the equipotential surface, so the potential should not depend on ϕ, i.e. $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2l_1R\sin\phi}{l_1^2 + R^2 - 2l_1R\cos\phi} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2l_2R\sin\phi}{l_2^2 + R^2 - 2l_2R\cos\phi} &= 0 \qquad (7) \\ \frac{l_1}{l_1^2 + R^2 - 2l_1R\cos\phi} &= \frac{l_2}{l_2^2 + R^2 - 2l_2R\cos\phi} \\ l_1^2l_2 + R^2l_2 - 2l_1l_2R\cos\phi &= l_1l_2^2 + R^2l_1 - 2l_1l_2R\cos\phi \\ l_1l_2(l_1 - l_2) &= R^2(l_1 - l_2) \\ l_1l_2 &= R^2. \qquad (8) \end{aligned}$$

From the data in the problem, we have

$$l_1 + l_2 = 10a, \tag{9}$$

$$l_1l_2 = 9a^2. \tag{10}$$

Solve this quadratic equation to get

$$l_1 = 5a \pm 4a. \tag{11}$$

However, since $l_1 > l_2$, we have

$$l_1 = 9a, \tag{12}$$
$$l_2 = a. \tag{13}$$

Using this results on eq.(5), we have

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(4a-x)^2 + y^2}{(4a+x)^2 + y^2}. \tag{14}$$

This is the potential in all region except inside both cylinders. For cylinders at $x = -5a$, the potential is constant and equal to

$$V(x = -2a, y = 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(4a+2a)^2 + 0^2}{(4a-2a)^2 + 0^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 3. \tag{15}$$

For cylinders at $x = 5a$, the potential is constant and equal to

$$V(x = 2a, y = 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(4a-2a)^2 + 0^2}{(4a+2a)^2 + 0^2} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 3. \tag{16}$$

The potential difference between both cylinders are

$$\Delta V = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln 3 \equiv V_0. \tag{17}$$

Substituting this results in the potential equation, the potential outside the two cylinders are:

$$V = \frac{V_0}{4 \ln 3} \ln \frac{(4a-x)^2 + y^2}{(4a+x)^2 + y^2}. \tag{18}$$

And the potential inside the cylinders are:

The potential inside the cylinder centered at $x = 5a$ is $V = -V_0/2$.

The potential inside the cylinder centered at at $x = -5a$ is $V = V_0/2$.

5. From eq.(17), we have

$$V_0 = \frac{q}{l\pi\epsilon_0} \ln 3, \tag{19}$$

so we get

$$C = \frac{q}{V_0} = \frac{l\pi\epsilon_0}{\ln 3} \tag{20}$$

or capacitance per unit length is :

$$c = \frac{q}{V_0} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln 3} \tag{21}$$

6. The electric field produces by both cylinders are

$$E_x = \frac{V_0}{2\ln 3}\left(\frac{4a+x}{(4a+x)^2+y^2} + \frac{4a-x}{(4a-x)^2+y^2}\right). \tag{22}$$

$$E_y = \frac{V_0}{2\ln 3}\left(\frac{y}{(4a+x)^2+y^2} - \frac{y}{(4a-x)^2+y^2}\right). \tag{23}$$

The volume current density is given by

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{24}$$

To calculate the total current, we may choose to calculate the current that flow through the $x = 0$ plane. On this plane, there is no current in the y direction. The total current is given by

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{J}\cdot\mathbf{dA} \qquad (25)\\ &= \int \sigma E_x l dy \\ &= \sigma l \frac{8aV_0}{2\ln 3}\int_\infty^\infty \frac{dy}{(4a)^2+y^2} \\ I &= \frac{V_0 \pi \sigma l}{\ln 3} \qquad (26) \end{aligned}$$

7. The resistance is given by

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\ln 3}{\pi\sigma l} \tag{27}$$

$$RC = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \tag{28}$$

8. Since the system has a high symmetry, we may use Ampere's law. The magnetic field should not have any z dependence, since the current has no z dependence.

Figure 3 shows the current density $\mathbf{J}$ flow from one cylinder to the other cylinder. Choose an Ampere loop on a constant x plane in a symmetrical way, so that the first path is pointing in the positive z direction with constant y coordinate, the second path is pointing to the negative y direction with constant z coordinate. The third path is pointing to the negative z direction, but with constant $-y$ coordinate. The fourth path is pointing in the positive y direction with constant $-z$ coordinate.

Having this path, we need to calculate the current that flow through the loop

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{J}\cdot\mathbf{dA} \\ &= \int J_x l dy \\ &= \frac{V_0\sigma l}{2\ln 3}\int_{-y}^{y}\left(\frac{4a+x}{(4a+x)^2+y^2} + \frac{4a-x}{(4a-x)^2+y^2}\right)dy \end{aligned}$$

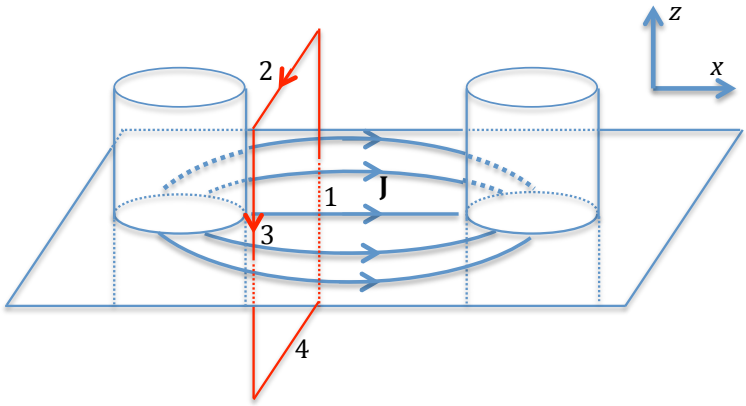


Figure 3: The Ampere loop

$$I = \frac{V_0 \sigma l}{\ln 3}\left(\arctan\frac{y}{4a+x} + \arctan\frac{y}{4a-x}\right) \tag{29}$$

Using the Ampere's law

$$\oint \mathbf{B}\cdot\mathbf{dl} = \mu_0 I \tag{30}$$

$$2Bl = \frac{V_0 \sigma l}{\ln 3}\left(\arctan\frac{y}{4a+x} + \arctan\frac{y}{4a-x}\right)$$

$$B = \frac{V_0 \sigma}{2\ln 3}\left(\arctan\frac{y}{4a+x} + \arctan\frac{y}{4a-x}\right) \tag{31}$$

Theoretical 2: Solution
Relativistic Correction on GPS Satelitte

Part A. Single accelerated particle

1. The equation of motion is given by

$$F = \frac{d}{dt}(\gamma m v) \tag{1}$$
$$= \frac{mc\dot{\beta}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$F = \gamma^3 m a, \tag{2}$$

where $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ and $\beta = \frac{v}{c}$. So the acceleration is given by

$$a = \frac{F}{\gamma^3 m}. \tag{3}$$

2. Consider the following systems, a frame S' is moving with respect to another frame S, with velocity u in the x direction. If a particle is moving in the S' frame with velocity v also in x direction, then the particle velocity in the S frame is given by

$$v = \frac{u+v'}{1+\frac{uv'}{c^2}}. \tag{4}$$

If the particles velocity changes with respect to the S' frame, then the velocity in the S frame is also change according to

$$dv = \frac{dv'}{1+\frac{uv'}{c^2}} - \frac{u+v'}{\left(1+\frac{uv'}{c^2}\right)^2}\frac{udv'}{c^2}$$
$$dv = \frac{1}{\gamma^2}\frac{dv'}{\left(1+\frac{uv'}{c^2}\right)^2}. \tag{5}$$

The time in the S' frame is t', so the time in the S frame is given by

$$t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right), \tag{6}$$

so the time change in the S' frame will give a time change in the S frame as follow

$$dt = \gamma dt'\left(1+\frac{uv'}{c^2}\right). \tag{7}$$

The acceleration in the S frame is given by

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{a'}{\gamma^3}\frac{1}{\left(1+\frac{uv'}{c^2}\right)^3}. \tag{8}$$

If the S' frame is the proper frame, then by definition the velocity $v = 0$. Substitute this to the last equation, we get

$$a = \frac{a'}{\gamma^3}. \tag{9}$$

Combining Eq.(3) and Eq.(9), we get

$$a' = \frac{F}{m} \equiv g. \tag{10}$$

3. Eq.(9) can be rewrite as

$$\begin{aligned} c\frac{d\beta}{dt} &= \frac{g}{\gamma^3} \\ \int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{g}{c}\int_0^t dt \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{gt}{c} \qquad (11) \\ \beta &= \frac{\frac{gt}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}. \qquad (12) \end{aligned}$$

4. Using Eq.(12), we get

$$\begin{aligned} \int_0^x dx &= \int_0^t \frac{gtdt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \\ x &= \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}-1\right). \qquad (13) \end{aligned}$$

5. Eq.(3) can also be rewrite as follow

$$\begin{aligned} c\frac{d\beta}{\gamma d\tau} &= \frac{g}{\gamma^3} \qquad (14) \\ \int_0^\beta \frac{d\beta}{1-\beta^2} &= \frac{g}{c}\int_0^t d\tau \\ \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) &= \frac{g\tau}{c} \qquad (15) \\ \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} &= e^{\frac{g\tau}{c}} \\ \beta\left(e^{\frac{g\tau}{c}}+e^{-\frac{g\tau}{c}}\right) &= e^{\frac{g\tau}{c}}-e^{-\frac{g\tau}{c}} \\ \beta &= \tanh\frac{g\tau}{c}. \qquad (16) \end{aligned}$$

6. The time dilation relation is

$$dt = \gamma d\tau. \tag{17}$$

From eq.(16), we have

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh\frac{g\tau}{c}. \tag{18}$$

Combining this equations, we get

$$\int_0^t dt = \int_0^\tau d\tau \cosh\frac{g\tau}{c}$$
$$t = \frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau}{c}. \tag{19}$$

Part B. Minkowski Diagram

1. The following figure shows the situation

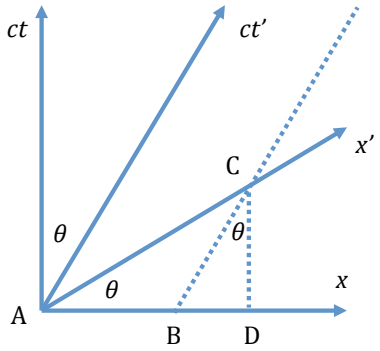


Figure 1: Minkowski Diagram

where $\tan\theta = \beta$, $\sin\theta = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$, and $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$.
The line AC represents the stick with proper length equal L in the S' frame.
The length AC is equal to $\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}L$ in the S frame.
The stick length in the S frame is represented by the line AB

$$\begin{aligned}\text{AB} &= \text{AD} - \text{BD} \\ &= \text{AC}\cos\theta - \text{AC}\sin\theta\tan\theta \\ &= \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}L\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} - \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}L\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\beta \\ \text{AB} &= \sqrt{1-\beta^2}L. \end{aligned} \tag{20}$$

This result is the same with the result from Lorentz transformation calculation.

2. The figure below show the setting of the problem.

   The line AB represents the stick with proper length equal L in the S frame.
   The length AB is equal to $\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}}L$ in the S' frame.
   The stick length in the S' frame is represented by the line AC

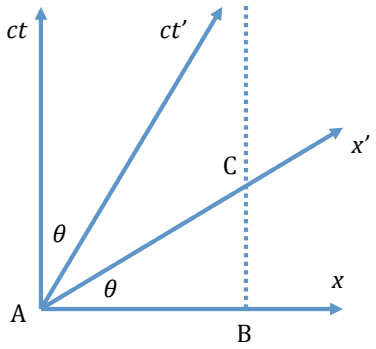


Figure 2: Minkowski Diagram

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AB}}{\cos\theta} = \sqrt{1-\beta^2}L. \tag{21}$$

3. The position of the particle is given by eq.(13).

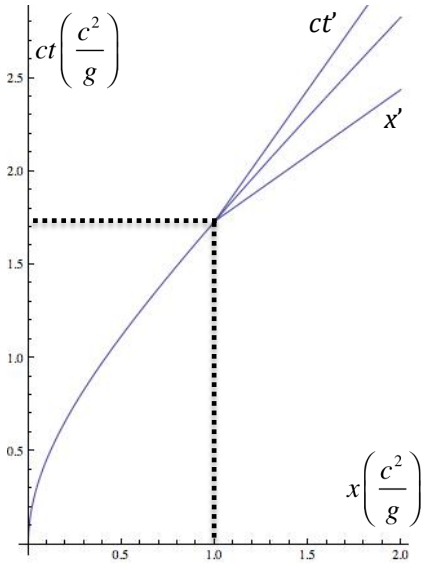


Figure 3: Minkowski Diagram

Part C. Flight Time

1. When the clock in the origin time is equal to t_0, it emits a signal that contain the information of its time. This signal will arrive at the particle at time t, while the particle position is at $x(t)$. We have

$$c(t-t_0) = x(t) \tag{22}$$

$$t - t_0 = \frac{c}{g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1\right)$$

$$t = \frac{t_0}{2}\frac{2-\frac{gt_0}{c}}{1-\frac{gt_0}{c}}. \tag{23}$$

When the information arrive at the particle, the particle's clock has a reading according to eq.(19). So we get

$$\frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau}{c} = \frac{t_0}{2}\frac{2-\frac{gt_0}{c}}{1-\frac{gt_0}{c}}$$

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{gt_0}{c}\right)^2 - \frac{gt_0}{c}\left(1+\sinh\frac{g\tau}{c}\right) + \sinh\frac{g\tau}{c}$$

$$\frac{gt_0}{c} = 1 + \sinh\frac{g\tau}{c} \pm \cosh\frac{g\tau}{c}. \tag{24}$$

Using initial condition $t = 0$ when $\tau = 0$, we choose the negative sign

$$\frac{gt_0}{c} = 1 + \sinh\frac{g\tau}{c} - \cosh\frac{g\tau}{c}$$

$$t_0 = \frac{c}{g}\left(1 - e^{-\frac{g\tau}{c}}\right). \tag{25}$$

As $\tau \to \infty$, $t_0 = \frac{c}{g}$. So the clock reading will freeze at this value.

2. When the particles clock has a reading τ_0, its position is given by eq.(13), and the time t_0 is given by eq.(19). Combining this two equation, we get

$$x = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\sinh^2\frac{g\tau_0}{c}} - 1\right). \tag{26}$$

The particle's clock reading is then sent to the observer at the origin. The total time needed for the information to arrive is given by

$$t = \frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau_0}{c} + \frac{x}{c} \tag{27}$$

$$= \frac{c}{g}\left(\sinh\frac{g\tau_0}{c} + \cosh\frac{g\tau_0}{c} - 1\right)$$

$$t = \frac{c}{g}\left(e^{\frac{g\tau_0}{c}} - 1\right) \tag{28}$$

$$\tau_0 = \frac{c}{g}\ln\left(\frac{gt}{c} + 1\right). \tag{29}$$

The time will not freeze.

Part D. Two Accelerated Particles

1. $\tau_2 = \tau_1$.

2. From the diagram, we have

$$\tan\theta = \beta = \frac{ct_2 - ct_1}{x_2 - x_1}. \tag{30}$$

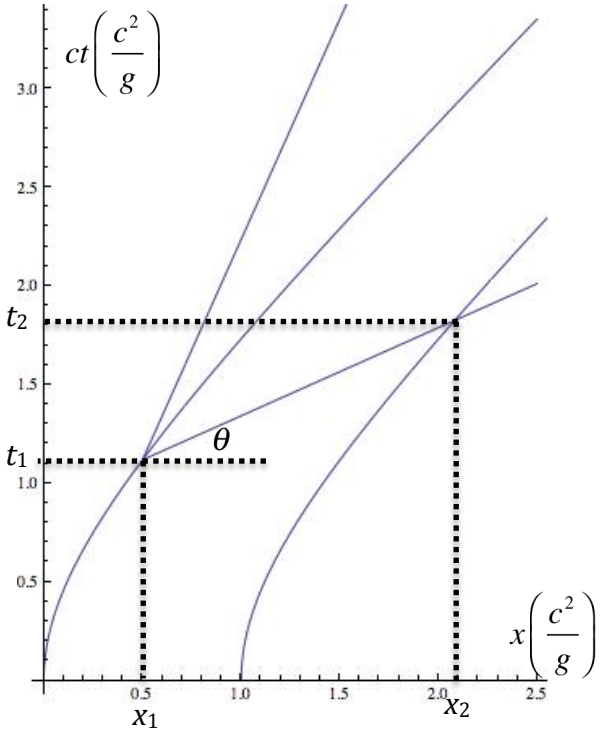


Figure 4: Minkowski Diagram for two particles

Using eq.(13), and eq.(19) along with the initial condition, we get

$$x_1 = \frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau_1}{c} - 1\right), \tag{31}$$

$$x_2 = \frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau_2}{c} - 1\right) + L. \tag{32}$$

Using eq.(16), eq.(19), eq.(31) and eq.(32), we obtain

$$\begin{aligned}
\tanh\frac{g\tau_1}{c} &= \frac{c\left(\frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau_2}{c}-\frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau_1}{c}\right)}{L+\frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau_2}{c}-1\right)-\frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{g\tau_1}{c}-1\right)} \\
&= \frac{\sinh\frac{g\tau_2}{c}-\sinh\frac{g\tau_1}{c}}{\frac{gL}{c^2}+\cosh\frac{g\tau_2}{c}-\cosh\frac{g\tau_1}{c}} \\
\frac{gL}{c^2}\sinh\frac{g\tau_1}{c} &= \sinh\frac{g\tau_2}{c}\cosh\frac{g\tau_1}{c}-\cosh\frac{g\tau_2}{c}\sinh\frac{g\tau_1}{c} \\
\frac{gL}{c^2}\sinh\frac{g\tau_1}{c} &= \sinh\frac{g}{c}\left(\tau_2-\tau_1\right). \qquad (33)
\end{aligned}$$

So $C_1 = \frac{gL}{c^2}$.

3. From the length contraction, we have

$$L' = \frac{x_2-x_1}{\gamma_1} \qquad (34)$$

$$\frac{dL'}{d\tau_1} = \left(\frac{dx_2}{d\tau_2}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}-\frac{dx_1}{d\tau_1}\right)\frac{1}{\gamma_1}-\frac{x_2-x_1}{\gamma_1^2}\frac{d\gamma_1}{d\tau_1}. \qquad (35)$$

Take derivative of eq.(31), eq.(32) and eq.(33), we get

$$\frac{dx_1}{d\tau_1} = c\sinh\frac{g\tau_1}{c}, \qquad (36)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau_2} = c\sinh\frac{g\tau_2}{c}, \qquad (37)$$

$$\frac{gL}{c^2}\cosh\frac{g\tau_1}{c} = \cosh\frac{g}{c}\left(\tau_2-\tau_1\right)\left(\frac{d\tau_2}{d\tau_1}-1\right). \qquad (38)$$

The last equation can be rearrange to get

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{\frac{gL}{c^2}\cosh\frac{g\tau_1}{c}}{\cosh\frac{g}{c}\left(\tau_2-\tau_1\right)}+1. \qquad (39)$$

From eq.(30), we have

$$x_2-x_1 = \frac{c(t_2-t_1)}{\beta_1} = \frac{c}{\tanh\frac{g\tau_1}{c}}\left(\frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau_2}{c}-\frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau_1}{c}\right). \qquad (40)$$

Combining all these equations, we get

$$\begin{aligned}
\frac{dL_1}{d\tau_1} &= \left(c\sinh\frac{g\tau_2}{c}\frac{\frac{gL}{c^2}\cosh\frac{g\tau_1}{c}}{\cosh\frac{g}{c}\left(\tau_2-\tau_1\right)}+c\sinh\frac{g\tau_2}{c}-c\sinh\frac{g\tau_1}{c}\right)\frac{1}{\cosh\frac{g\tau_1}{c}} \\
&\quad -\frac{c^2}{g}\left(\sinh\frac{g\tau_2}{c}-\sinh\frac{g\tau_1}{c}\right)\frac{1}{\tanh\frac{g\tau_1}{c}}\frac{1}{\cosh^2\frac{g\tau_1}{c}}\frac{g}{c}\sinh\frac{g\tau_1}{c} \\
\frac{dL_1}{d\tau_1} &= \frac{gL}{c}\frac{\sinh\frac{g\tau_2}{c}}{\cosh\frac{g}{c}\left(\tau_2-\tau_1\right)}. \qquad (41)
\end{aligned}$$

So $C_2 = \frac{gL}{c}$.

Part E. Uniformly Accelerated Frame

1. Distance from a certain point x_p according to the particle's frame is

$$L' = \frac{x - x_p}{\gamma} \tag{42}$$

$$L' = \frac{\frac{c^2}{g_1}\left(\cosh\frac{g_1\tau}{c} - 1\right) - x_p}{\cosh\frac{g_1\tau}{c}}$$

$$L' = \frac{c^2}{g_1} - \frac{\frac{c^2}{g_1} + x_p}{\cosh\frac{g_1\tau}{c}}. \tag{43}$$

For L' equal constant, we need $x_p = -\frac{c^2}{g_1}$.

2. **First method:** If the distance in the S' frame is constant $= L$, then in the S frame the length is

$$L_s = L\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}. \tag{44}$$

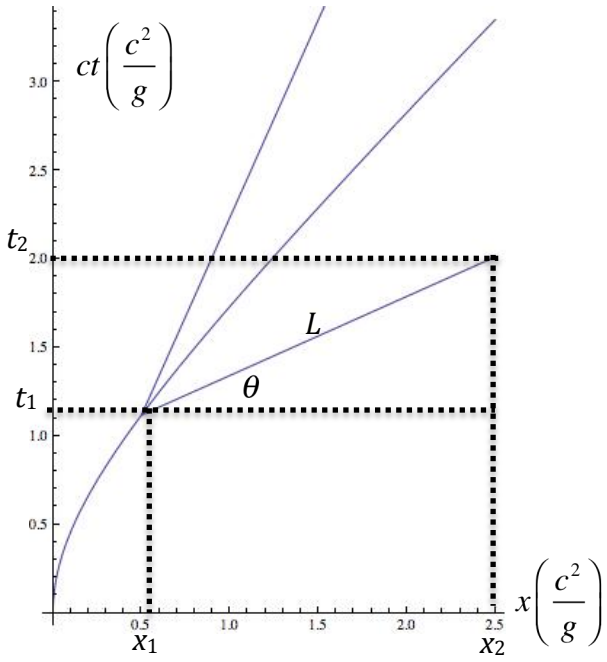


Figure 5: Minkowski Diagram for two particles

So the position of the second particle is

$$x_2 = x_1 + L_s \cos\theta \tag{45}$$
$$= \frac{c^2}{g_1}\left(\sqrt{1+\left(\frac{g_1 t_1}{c}\right)^2} - 1\right) + L\sqrt{1+\left(\frac{g_1 t_1}{c}\right)}$$
$$x_2 = \left(\frac{c^2}{g_1} + L\right)\sqrt{1+\left(\frac{g_1 t_1}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g_1}. \tag{46}$$

The time of the second particle is

$$ct_2 = ct_1 + L_s \sin\theta \tag{47}$$
$$= ct_1 + L\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$$
$$ct_2 = t_1\left(c + \frac{g_1 L}{c}\right). \tag{48}$$

Substitute eq.(48) to eq.(46) to get

$$x_2 = \left(\frac{c^2}{g_1} + L\right)\sqrt{1+\left(\frac{g_1}{c}\frac{t_2}{1+\frac{g_1 L}{c^2}}\right)^2} - \frac{c^2}{g_1}$$
$$x_2 = \left(\frac{c^2}{g_1} + L\right)\sqrt{1+\left(\frac{g_1}{1+\frac{g_1 L}{c^2}}\frac{t_2}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g_1}. \tag{49}$$

From the last equation, we can identify

$$g_2 \equiv \frac{g_1}{1+\frac{g_1 L}{c^2}}. \tag{50}$$

As for confirmation, we can subsitute this relation to the second particle position to get

$$x_2 = \frac{c^2}{g_2}\sqrt{1+\left(\frac{g_2 t_2}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g_1}. \tag{51}$$

Second method: In this method, we will choose g_2 such that the special point like the one descirbe in the question 1 is exactly the same as the similar point for the proper acceleration g_1.
For first particle, we have $x_{p1} g_1 = c^2$
For second particle, we have $(L + x_{p1}) g_2 = c^2$

Combining this two equations, we get

$$g_2 = \frac{c^2}{L + \frac{c^2}{g_1}}$$
$$g_2 = \frac{g_1}{1 + \frac{g_1 L}{c^2}}. \tag{52}$$

3. The relation between the time in the two particles is given by eq.(48)

$$t_2 = t_1 \left(1 + \frac{g_1 L}{c^2}\right)$$
$$\frac{c^2}{g_2} \sinh \frac{g_2 \tau_2}{c} = \frac{c^2}{g_1} \sinh \frac{g_1 \tau_1}{c} \left(1 + \frac{g_1 L}{c^2}\right)$$
$$\sinh \frac{g_2 \tau_2}{c} = \sinh \frac{g_1 \tau_1}{c}$$
$$g_2 \tau_2 = g_1 \tau_1 \tag{53}$$
$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{g_1}{g_2} = 1 + \frac{g_1 L}{c^2}. \tag{54}$$

Part F. Correction for GPS

1. From Newtons Law

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \tag{55}$$
$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{56}$$
$$r = 2.66 \times 10^7 \text{m}.$$

The velocity is given by

$$v = \omega r = \left(\frac{2\pi g R^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{57}$$
$$= 3.87 \times 10^3 \text{m/s}.$$

2. The general relativity effect is

$$\frac{d\tau_g}{dt} = 1 + \frac{\Delta U}{mc^2} \tag{58}$$
$$\frac{d\tau_g}{dt} = 1 + \frac{gR^2}{c^2} \frac{R - r}{Rr}. \tag{59}$$

After one day, the difference is

$$\Delta\tau_g = \frac{gR^2}{c^2}\frac{R-r}{Rr}\Delta T \tag{60}$$
$$= 4.55 \times 10^{-5}\text{s}.$$

The special relativity effect is

$$\frac{d\tau_s}{dt} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{61}$$
$$= \sqrt{1-\left(\left(\frac{2\pi gR^2}{T}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{c^2}}$$
$$\approx 1-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\pi gR^2}{T}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{c^2}. \tag{62}$$

After one day, the difference is

$$\Delta\tau_s = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\pi gR^2}{T}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{c^2}\Delta T \tag{63}$$
$$= -7.18 \times 10^{-6}\text{s}.$$

The satelite's clock is faster with total $\Delta\tau = \Delta\tau_g + \Delta\tau_s = 3.83 \times 10^{-5}$s.

3. $\Delta L = c\Delta\tau = 1.15 \times 10^4\text{m} = 11.5\text{km}$.

Theoretical 3: Solution
Physics of Spin

Part A. Larmor Precession

1. From the two equations given in the text, we obtain the relation

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \tag{1}$$

Taking the dot product of eq (1). with $\boldsymbol{\mu}$, we can prove that

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} &= -\gamma \boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}), \\ \frac{d\left|\boldsymbol{\mu}\right|^2}{dt} &= 0, \\ \mu = \left|\boldsymbol{\mu}\right| &= \text{const.} \end{aligned} \tag{2}$$

Taking the dot product of eq. (1) with $\mathbf{B}$, we also prove that

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} &= -\gamma \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B} \cdot \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} &= 0, \\ \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} &= \text{const.} \end{aligned} \tag{3}$$

An acute reader will notice that our master equation in (1) is identical to the equation of motion for a charged particle in a magnetic field

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{4}$$

Hence, the same argument for a charged particle in magnetic field can be applied in this case.

2. For a magnetic moment making an angle of ϕ with $\mathbf{B}$,

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} &= -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \\ \left|\boldsymbol{\mu}\right| \sin\phi \frac{d\theta}{dt} &= \gamma \left|\boldsymbol{\mu}\right| B_0 \sin\phi, \\ \omega_0 = \frac{d\theta}{dt} &= \gamma B_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Part B. Rotating frame

1. Using the relation given in the text, it is easily shown that

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt}\right)_{\text{rot}} &= \left(\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt}\right)_{\text{lab}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} \\ &= -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} - \omega \mathbf{k}' \times \boldsymbol{\mu} \\ &= -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \left(\mathbf{B} - \frac{\omega}{\gamma}\mathbf{k}'\right) \\ &= -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}. \end{aligned} \tag{6}$$

2. The new precession frequency as viewed on the rotating frame S' is

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} &= (\omega_0 - \omega)\,\mathbf{k}', \\ \Delta &= \gamma B_0 - \omega. \end{aligned} \tag{7}$$

3. Since the magnetic field as viewed in the rotating frame is $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}' + b\mathbf{i}'$,

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B} - \omega/\gamma\mathbf{k}' = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)\mathbf{k}' + b\mathbf{i}',$$

and

$$\begin{aligned} \Omega &= \gamma\left|\mathbf{B}_{\text{eff}}\right|, \\ &= \gamma\sqrt{\left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)^2 + b^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

4. In this case, the effective magnetic field becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{eff}} &= \mathbf{B} - \omega/\gamma\mathbf{k}' \\ &= \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)\mathbf{k}' + b(\cos 2\omega t\mathbf{i}' - \sin 2\omega t\mathbf{j}') \end{aligned} \tag{9}$$

which has a time average of $\overline{\mathbf{B}_{\text{eff}}} = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)\mathbf{k}'$.

Part C. Rabi oscillation

1. The oscillating field can be considered as a superposition of two oppositely rotating field:

$$2b\cos\omega_0 t\mathbf{i} = b\left(\cos\omega_0 t\mathbf{i} + \sin\omega_0 t\mathbf{j}\right) + b\left(\cos\omega_0 t\mathbf{i} - \sin\omega_0 t\mathbf{j}\right),$$

which gives an effective field of (with $\omega = \omega_0 = \gamma B_0$):

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)\mathbf{k}' + b\mathbf{i}' + b(\cos 2\omega_0 t\mathbf{i}' - \sin 2\omega_0 t\mathbf{j}').$$

Since $\omega_0 \gg \gamma b$, the rotation of the term $b(\cos 2\omega_0 t\mathbf{i}' - \sin 2\omega_0 t\mathbf{j}')$ is so fast compared to the frequency γb. This means that we can take the approximation

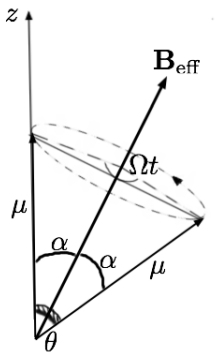
$$\mathbf{B}_{\text{eff}} \approx \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)\mathbf{k}' + b\mathbf{i}' = b\mathbf{i}', \tag{10}$$

where the magnetic moment precesses with frequency $\Omega = \gamma b$.

As $\Omega = \gamma b \ll \omega_0$, the magnetic moment does not "feel" the rotating component $b\left(\cos 2\omega_0 t\mathbf{i}' - \sin 2\omega_0 t\mathbf{j}'\right)$ which averaged to zero.

2. Since the angle α that $\boldsymbol{\mu}$ makes with $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ stays constant and $\boldsymbol{\mu}$ is initially oriented along the z axis, α is also the angle between $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ and the z axis which is

$$\tan\alpha = \frac{b}{B_0 - \frac{\omega}{\gamma}}. \tag{11}$$



From the geometry of the system, we can show that ($\cos\theta = \mu_z/\mu$):

$$\begin{aligned}
2\mu\sin\frac{\theta}{2} &= 2\mu\sin\alpha\sin\frac{\Omega t}{2},\\
\sin^2\frac{\theta}{2} &= \sin^2\alpha\sin^2\frac{\Omega t}{2},\\
\frac{1-\cos\theta}{2} &= \sin^2\alpha\frac{1-\cos\Omega t}{2},\\
\cos\theta &= 1-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos\Omega t,\\
\cos\theta &= \cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos\Omega t.
\end{aligned}$$

So, the projected magnetic moment along the z axis is $\mu_z(t) = \mu\cos\theta$ and the magnetization is

$$M = N\mu_z = N\mu\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\Omega t\right). \tag{12}$$

Note that the magnetization does not depend on the reference frame S or S' (μ_z has the same value viewed in both frames).

Taking $\omega = \omega_0 = \gamma B_0$, the angle α is 90^0 and $M = N\mu\cos\Omega t$.

3. From the relations

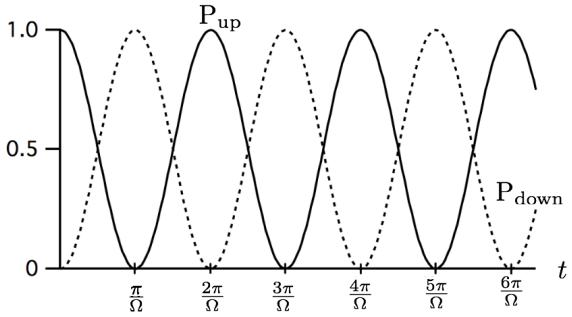
$$\begin{aligned}
P_\uparrow - P_\downarrow &= \frac{\mu_z}{\mu} = \cos\theta,\\
P_\uparrow + P_\downarrow &= 1,
\end{aligned}$$

we obtain the results ($\omega = \omega_0$)

$$\begin{aligned} P_\downarrow &= \frac{1-\cos\theta}{2} \\ &= \frac{1-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos\Omega t}{2} \\ &= \sin^2\alpha\frac{1-\cos\Omega t}{2} \\ &= \frac{b^2}{\left(B_0-\frac{\omega}{\gamma}\right)^2+b^2}\sin^2\frac{\Omega t}{2} \\ &= \sin^2\frac{\Omega t}{2}, \end{aligned} \tag{13}$$

and

$$P_\uparrow = \frac{b^2}{\left(B_0-\frac{\omega}{\gamma}\right)^2+b^2}\cos^2\frac{\Omega t}{2} = \cos^2\frac{\Omega t}{2}. \tag{14}$$



Part D. Measurement incompatibility

1. In the x direction, the uncertainty in position due to the screen opening is Δx. According to the uncertainty principle, the atom momentum uncertainty Δp_x is given by

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x},$$

which translates into an uncertainty in the x velocity of the atom,

$$v_x \approx \frac{\hbar}{m\Delta x}.$$

Consequently, during the time of flight t of the atoms through the device, the uncertainty in the width of the beam will grow by an amount δx given by

$$\delta x = \Delta v_x t \approx \frac{\hbar}{m\Delta x}t.$$

So, the width of the beams is growing linearly in time. Meanwhile, the two beams are separating at a rate determined by the force F_x and the separation between the beams after a time t becomes

$$d_x = 2 \times \frac{1}{2}\frac{F_x}{m}t^2 = \frac{1}{m}\left|\mu_x\right|\frac{dB}{dx}t^2.$$

In order to be able to distinguish which beam a particle belongs to, the separation of the two beams must be greater than the widths of the beams; otherwise the two beams will overlap and it will be impossible to know what the x component of the atom spin is. Thus, the condition must be satisfied is

$$\begin{aligned} d_x &\gg \delta x, \\ \frac{1}{m}\left|\mu_x\right|\frac{dB}{dx}t^2 &\gg \frac{\hbar}{m\Delta x}t, \\ \frac{1}{\hbar}\left|\mu_x\right|\Delta x C t &\gg 1. \end{aligned} \tag{15}$$

2. As the atoms pass through the screen, the variation of magnetic field strength across the beam width experienced by the atoms is

$$\Delta B = \Delta x\frac{dB}{dx} = C\Delta x.$$

This means the atoms will precess at rates covering a range of values $\Delta\omega$ given by

$$\Delta\omega = \gamma\Delta B = \frac{\mu_z}{\hbar}\Delta B = \frac{\left|\mu_x\right|}{\hbar}C\Delta x,$$

and, if previous condition in measuring μ_x is satisfied,

$$\Delta\omega t \gg 1. \tag{16}$$

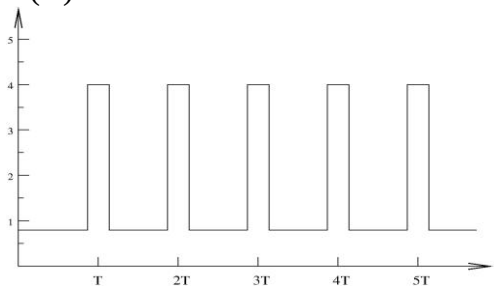
In other words, the spread in the angle $\Delta\omega t$ through which the magnetic moments precess is so large that the z component of the spin is completely randomized or the measurement uncertainty is very large.

WIND POWER AND ITS METROLOGIES (20 points)

A. Theoretical Background (1.0 points)

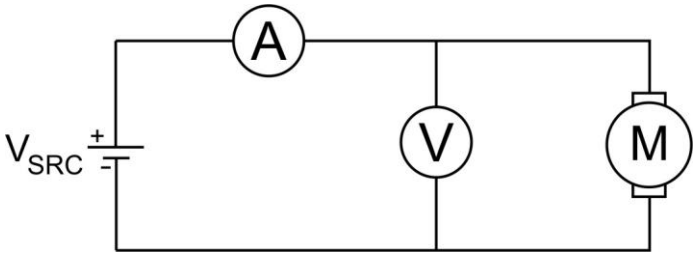
A.1 (0.4 pts)	$P_w = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{dm}{dt}$ $P_w = \frac{1}{2} \rho A_0 v_0^3$ $n = 3$
A.2 (0.4 pts)	$P_R = \frac{1}{2} \rho A \frac{v_0^{\ 3}}{2} (1+\lambda)\left(1-\lambda^2\right) = \frac{\rho A v_0^3}{4} (1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3)$ $\frac{dP_R}{d\lambda} = 0 \rightarrow 1-2\lambda-3\lambda^2 = 0$ $\lambda = \frac{1}{3}$
A.3 (0.2 pts)	Betz efficiency: $C_P = \left.\frac{P_R}{P_W}\right\|_{\lambda} = \frac{16}{27} \sim 59.26\%$

B. The Wind Tunnel (3.2 points)

B.1 (0.8 pts)	We move the motor generator blade manually, and the voltage at the opto-sensor signal will increase every time the sensor hits the reflective sticker in the blade. This signal provides frequency signal to the meter. V(V) 
B.2 (2.4 pts)	$\eta_M = \frac{P_W}{P_M} = \frac{\rho_A A_0 v_0^n}{2P_M} \rightarrow P_M = \frac{\rho_A A_0 v_0^n}{2\eta_M}$ Wind tunnel diameter: $D_T = 13.5$ cm. $A_0 = \pi R_T^{\ 2} = 0.0143 \mathrm{m}^2$. $\ln P_M = \ln \frac{\rho_A A_0}{2\eta_M} + n \ln v \rightarrow y = a + bx$ From the plot and linear regression below we obtain the power factor: $n = 3.0$, *in good agreement with the theory* thus showing that the wind

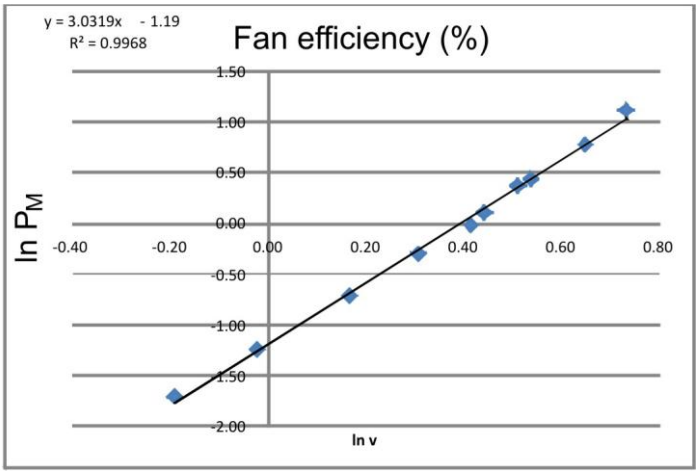
	power $P_W \sim v^3$. $\eta_M = \frac{\rho_A A_0}{2e^a} = 2.8\%$ Results for full score / grading scheme (sampling from several setups): $\eta_M = (3 \pm 2)\%$, to anticipate wide variability in motor quality.

Connection diagram:



Note that for best results the voltmeter has to be placed right across the motor to avoid extra voltage drop across the ampmeter.

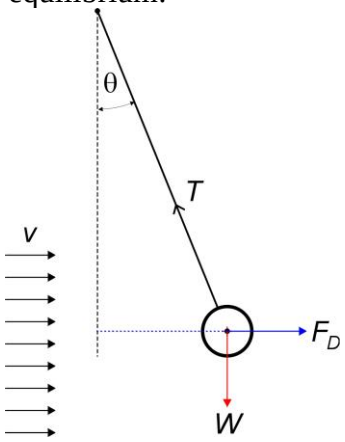
f (Hz)	V (m/s)	V (V)	I (A)	P_M (W)	ln v	ln P_M
27.2	2.38	15.920	0.350	5.57	0.87	1.72
26.0	2.27	14.910	0.330	4.92	0.82	1.59
25.0	2.18	13.410	0.300	4.02	0.78	1.39
23.8	2.08	11.830	0.260	3.08	0.73	1.12
21.9	1.91	9.880	0.220	2.17	0.65	0.78
19.6	1.71	8.100	0.190	1.54	0.54	0.43
17.3	1.51	6.540	0.150	0.98	0.41	-0.02
19.1	1.66	7.370	0.196	1.44	0.51	0.37
17.8	1.55	6.490	0.172	1.12	0.44	0.11
15.6	1.36	5.240	0.142	0.74	0.31	-0.30
13.5	1.18	4.210	0.116	0.49	0.16	-0.72
11.2	0.98	3.240	0.089	0.29	-0.02	-1.25
9.5	0.82	2.630	0.068	0.18	-0.19	-1.72
6.8	0.59	2.390	0.044	0.10	-0.52	-2.26



C. Ping Pong Ball Anemometer (3.5 points)

C.1 (0.7 pts)

Force diagram at static equilibrium:



$$\tan\theta = \frac{F_D}{W_B} = \frac{C_D \rho_A A_B v^m}{2 m_B g}$$

$$v = \sqrt[m]{\frac{2 m_B g}{C_D \rho_A A}\tan\theta}$$

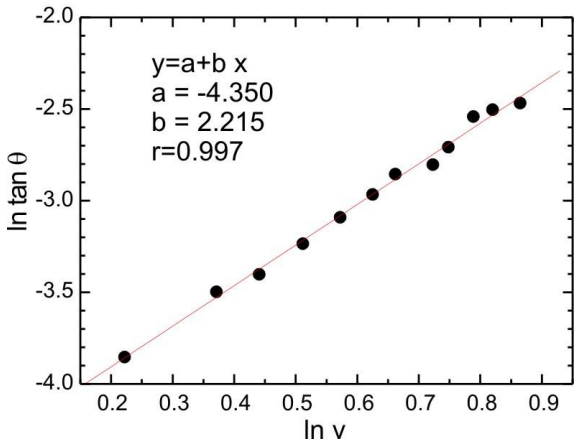
C.2 (2.8 pts)

$$\ln\tan\theta = \ln\frac{C_D \rho_A A_B}{2 m_B g} + m \ln v \rightarrow y = a + bx$$

The deflection can be calculated from: $\tan\theta = \Delta x / h$, where Δx is the displacement and h is the height from the ruler. The cross section of the ball is: $A_B = \pi d_B^{\,2}/4$ where $d_B = 0.0395\,\text{m}$. In the tunnel the wind velocity is given as (Eq. 4) in the tunnel $v = c_1 f_M$ where $c_1 = 0.0873\,\text{m}$.

In this example we have:
$m = b = 2.2$

	$C_D = \frac{2m_B g}{\rho_A A_B} e^a = 0.40$ Results for full score / grading scheme (sampling from several setups): $m = 2.0 \pm 0.3$ $C_D = 0.42 \pm 0.05$



f (Hz)	tan θ	V (m/s)	ln v	ln tan θ
27.2	0.0848	2.3746	0.8648	-2.47
26.0	0.0818	2.2698	0.8197	-2.50
25.2	0.0788	2.2	0.7884	-2.54
24.2	0.0667	2.1127	0.7479	-2.71
23.6	0.0606	2.0603	0.7228	-2.80
22.2	0.0576	1.9381	0.6617	-2.85
21.4	0.0515	1.8682	0.625	-2.97
20.3	0.0455	1.7722	0.5722	-3.09
19.1	0.0394	1.6674	0.5113	-3.23
17.8	0.0333	1.5539	0.4408	-3.40
16.6	0.0303	1.4492	0.371	-3.50
14.3	0.0212	1.2484	0.2219	-3.85

NOTE:

These values are in very good agreement with the theoretical and established value of $n = 2$, i.e. the drag force is proportional to the square of the velocity.

The drag coefficient C_D is in close to the ideal known value: $C_D = 0.47$ for smooth ball with particle Reynold number Re ~ 10^3 – 10^5 as shown below. In this experiment the maximum Reynold number is:

$$\mathrm{Re}_B = \frac{\rho_A v D_B}{\mu_A} = \frac{1.2 \times 2.5 \times 0.038}{18.3 \times 10^{-6}} = 6240 \quad (1)$$

Discrepancy in our C_D values could be due to finite boundary of our wind tunnel.

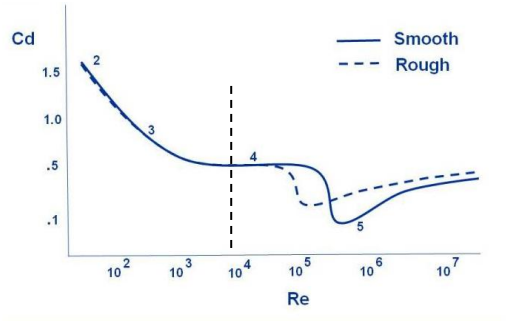


Figure 1. Drag coefficient as a function of the particle Reynold number

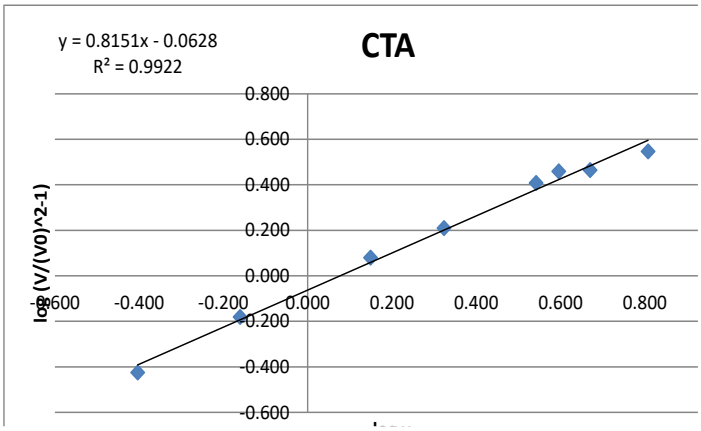
D. Hotwire Anemometer (HWA) (6.7 points)

[D.1] Constant Temperature (3.2 points)

D.1.1 (0.4 pts)	In the Wheatstone bridge we have: $V_W = V_{INP} \frac{R_W}{R_W + R_B} = c_1 V_{INP}$ $\frac{V_W{}^2}{R_W} = (a + b v^c) A_w (T_w - T_0) \rightarrow V_{INP}{}^2 = \frac{R_W}{c_1{}^2} A_W (T_W - T_0)(a + b v^c)$ $V_{INP}{}^2 = \frac{(R_W + R_B)^2}{R_W} A_W (T_W - T_0)(a + b v^c) = c_2 (a + b v^c)$ Where $c_2 = \frac{(R_W + R_B)^2}{R_W} A_W (T_W - T_0)$ is a constant. $A = c_2 a$ $B = c_2 b$
D.1.2 (0.3 pts)	$y = \left(\frac{V_{INP}}{V_0} \right)^2 - 1$ with $V_0 = \sqrt{A}$ is the input potential when there is no wind.
D.1.3 (2.5 pts)	$c = 0.7 \pm 0.2$

	$\frac{b}{a} = 1.5 \pm 0.6$

f_M (Hz)	V_{INPUT} (V)	v (m/s)	ln v	ln$((V/V_0)^2$-1)
25.70	1.785	2.244	0.808	0.546
22.40	1.740	1.956	0.671	0.464
20.80	1.737	1.816	0.597	0.459
19.70	1.710	1.720	0.542	0.407
15.83	1.615	1.382	0.324	0.209
13.30	1.560	1.161	0.149	0.079
9.76	1.464	0.852	-0.160	-0.181
7.65	1.390	0.668	-0.404	-0.426



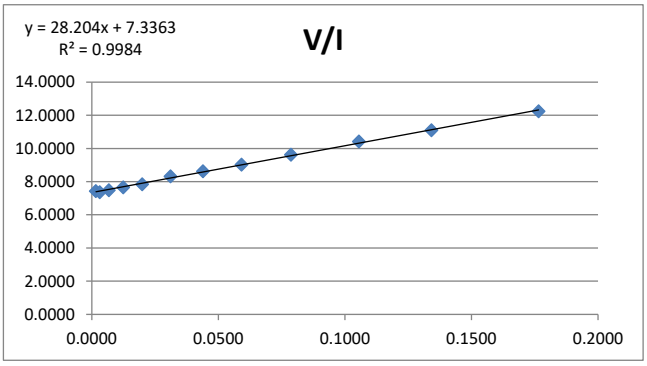
[D.2] Constant Current (3.5 points)

First we need to determine k and R_0.

D.2.1 (0.2 pts)	$k = \frac{aA_w}{\alpha}$
D.2.2 (1.2 pts)	$R_0 = (7.0 \pm 1.5)\,\Omega$

V_W (V)	I_W (mA)	P_W (W)	R_W (Ω)
0.109	14.7	0.0016	7.4150
0.153	20.8	0.0032	7.3558
0.225	30.1	0.0068	7.4751
0.308	40.3	0.0124	7.6427

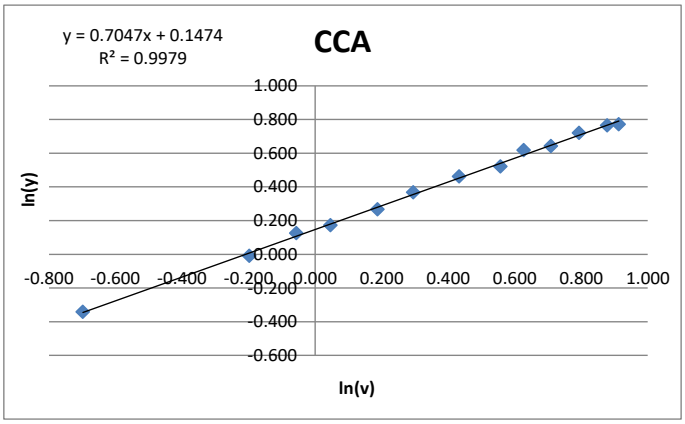
0.395	50.4	0.0199	7.8373
0.509	61.2	0.0312	8.3170
0.615	71.4	0.0439	8.6134
0.730	81.0	0.0591	9.0123
0.870	90.5	0.0787	9.6133
1.048	100.7	0.1055	10.4071
1.220	110.0	0.1342	11.0909
1.470	120.1	0.1765	12.2398



D.2.3 (0.2 pts)	$y = \dfrac{V_W I_W R_0}{k\left(\dfrac{V_W}{I_W} - R_0\right)} - 1$
D.2.4 (1.9 pts)	$\dfrac{b}{a} = 1.5 \pm 0.4$ $c = 0.77 \pm 0.07$

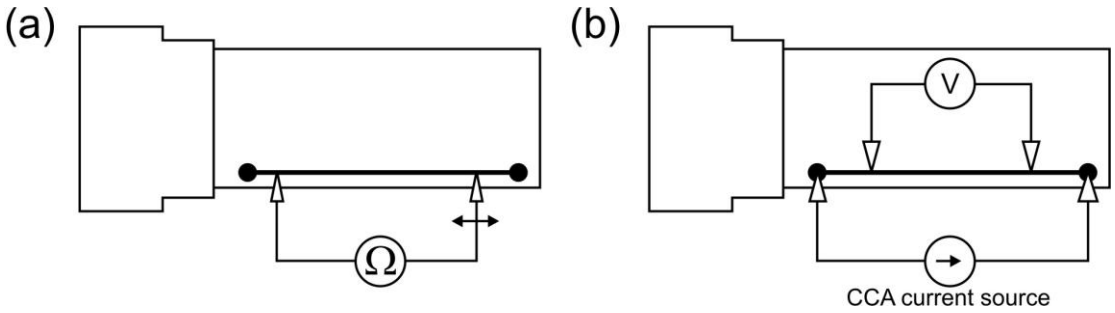
V_W (V)	f (Hz)	v (m/s)	y	ln(v)	ln(y)
1.41		0.498	0.711	-0.698	-0.342
1.33		0.821	0.991	-0.198	-0.009
1.30		0.945	1.134	-0.056	0.125
1.29		1.048	1.187	0.047	0.172
1.27		1.206	1.306	0.188	0.267
1.25		1.344	1.443	0.295	0.367
1.23		1.542	1.586	0.433	0.461
1.22		1.746	1.684	0.557	0.521
1.20		1.873	1.855	0.627	0.618
1.20		2.032	1.899	0.709	0.642
1.19		2.211	2.056	0.794	0.721

1.18	2.406	2.148	0.878	0.765
1.18	2.492	2.162	0.913	0.771



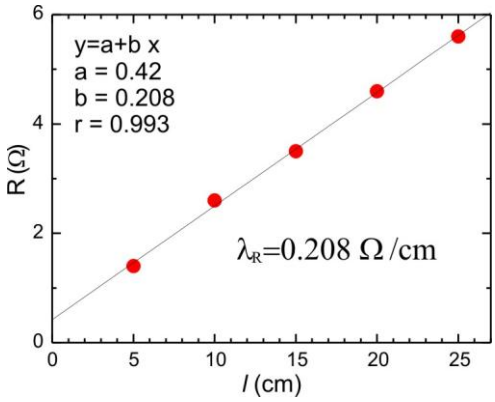
E. Wind Turbine (5.6 points)

E.1 (0.4 pts)	We use DMM in ohmmeter mode, we first measure the lead resistance of the ohmmeter cables by shorting them to get the lead resistance. $R_{DMM,0} \sim 0.2\ \Omega$ Then we measure the resistance of the motor directly with DMM several times, looking for its minimum values and subtract it with the lead resistance $R_{DMM,0}$. We get : $R_M = (0.8 \pm 0.2)\Omega$
E.2 (1.2 pts)	To eliminate the contact or lead resistance we can perform: (1) Two point resistance measurement at several lengths. (2) Four point resistance measurement with current source (using CCA box) ampmeter and voltmeter as shown below. This yields: $\lambda_R = (0.21 \pm 0.02)\Omega / \text{cm}$



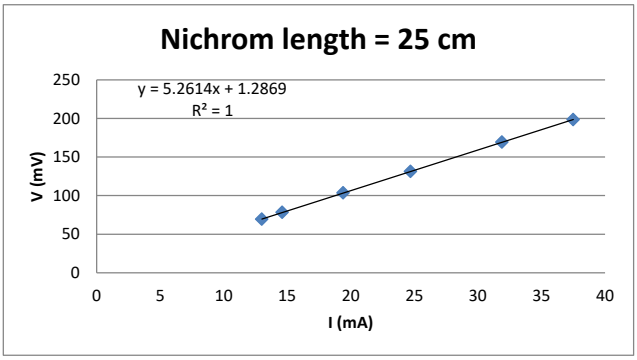
(a) Two-wire method (b) Four-wire method

Method #1: Using two-wire measurement



Method #2: Using four-wire method at l = 250 mm.

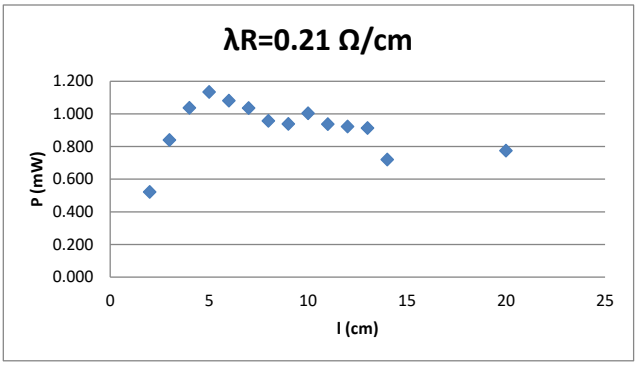
V (mV)	I (mA)
198.5	37.5
169.2	31.9
131.2	24.7
103.5	19.4
78.3	14.6
69.4	13



E.3 (2.4 pts)	We vary the nichrom wire length and calculate the power output, we obtain peak at: $R_L = 1.0\Omega$

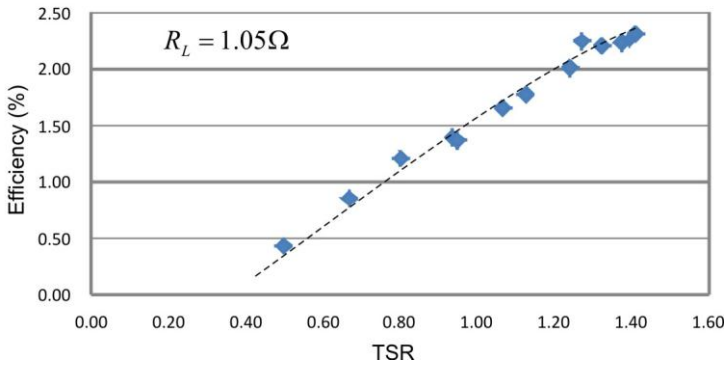
	Results for full score / grading scheme (sampling from several setups): $R_{L,\exp} = (1.0 \pm 0.4)\Omega$ $R_{L,theor} = R_M$

V (mV)	l (cm)	R (ohm)	P (mW)
14.8	2	0.42	0.522
23.0	3	0.63	0.840
29.5	4	0.84	1.036
34.5	5	1.05	1.134
36.9	6	1.26	1.081
39.0	7	1.47	1.035
40.1	8	1.68	0.957
42.1	9	1.89	0.938
45.9	10	2.10	1.003
46.5	11	2.31	0.936
48.2	12	2.52	0.922
49.9	13	2.73	0.912
46.0	14	2.94	0.720
57.0	20	4.20	0.774



E.4 (1.6 pts)	We use the optimum load by setting R_L = 1.05 Ω or setting the length of nichrom wire at l = 5 cm. The wind turbine efficiency : $\eta_{WT} = \frac{P_T}{P_W} = \frac{V_T^{\,2} / R_L}{\frac{1}{2}\rho_A A_{WT} v^3}$ where $A_{WT} = \pi R^2$ is the wind turbine cross section area with R = 55 mm, and $v = c_1 f_M$ (Eq. 4) with c_1 = 0.0873 m and f_M is the frequency of motor generator. $TSR = \frac{2\pi f_T R}{c_1 f_M}$

f_M (Hz)	f_T (Hz)	V_T (mV)	TSR	P_T (mW)	P_W (mW)	η_{WT} (%)
27.8	9.8	44.0	1.40	1.84	81.48	2.26
27.9	9.7	44.0	1.38	1.84	82.36	2.24
27.2	9.7	43.0	1.41	1.76	76.32	2.31
26.3	8.8	40.0	1.32	1.52	68.99	2.21
25.5	8.2	38.5	1.27	1.41	62.88	2.24
24.6	7.7	34.5	1.24	1.13	56.46	2.01
23.6	6.7	30.5	1.12	0.89	49.85	1.78
22.3	6.0	27.0	1.07	0.69	42.06	1.65
21.2	5.0	23.0	0.93	0.50	36.13	1.39
21.3	5.1	22.9	0.95	0.50	36.65	1.36
19.8	4.0	19.3	0.80	0.35	29.44	1.20
18.4	3.1	14.5	0.67	0.20	23.62	0.85
16.8	2.1	9.0	0.49	0.08	17.98	0.43



Our turbine has range of efficiency <2.5% and tends to increase with higher TSR as the turbine spin faster. Note that at some point this efficiency will drop, unfortunately this is beyond the capability of our wind generator fan.