下落磁体受到的阻尼效应

关于涡流的详细讨论最早见于英国物理学家James H. Jeans爵士（1877-1946）著名的*The mathematical theory of electricity and magnetism*（1925）一书之中．本考题与电磁学有关．



James H. Jeans
(1877-1946)

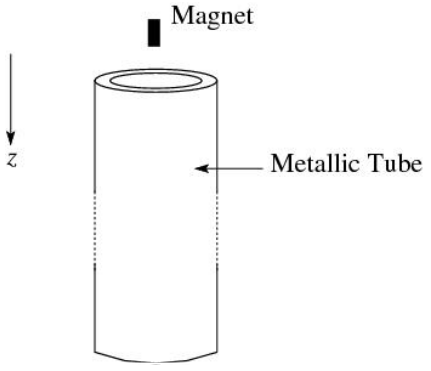


图 1

现有一个小磁体（magnet），其磁偶极矩为p，质量为m. 磁体在一根很长的竖直放置的非磁性金属管（Metallic Tube）内下落，如图1所示（图中所示非实际比例）．一般来说，下落过程可由以下公式描述

$$m\ddot{z} = mg - k\dot{z} \qquad (1)$$

此处 g 是重力加速度．阻尼系数k表征金属管中涡流所导致的阻尼现象．

I.1 求磁体的最终速度（收尾速度）(v_T) **[0.5 分]**

I.2 给出磁体的位置-时间关系式$z(t)$．设初始速度$v(t=0)=0$和初始位置$z(t=0)=0$. **[1.0 分]**

下面我们将试图理解整个下落的动力学过程．为此我们在**(I.3) - (I.8)**中考虑一个简化的模型：磁体沿着一个固定的非磁性金属环(Ring)的中轴线下落．如图2所示，金属环的半径为a ，电阻为R，电感为L. 在此题中我们将忽略辐射效应．

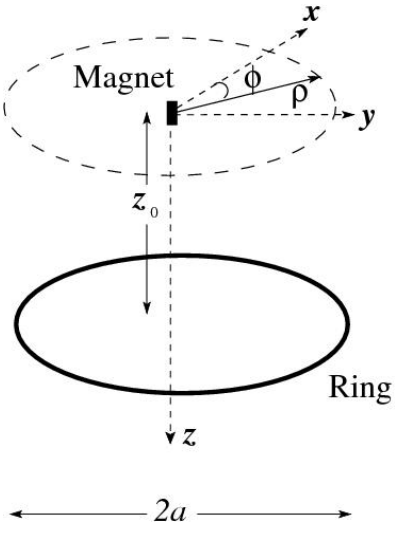


图 2

为方便起见，我们采用图2所示的柱坐标系 (ρ,φ,z)，其中，z沿圆环的轴向．磁体在初始状态时静止于原点处，金属环中心离原点的距离为z_0．图2中同时也显示了直角坐标系 (x,y,z) ．磁体的偶极矩为$\vec{p}$，方向沿z 轴正方向$(\vec{p}=p\hat{k})$，$\hat{k}$是z方向的单位矢量．我们假定磁矩方向在下落过程中保持不变．磁体位于原点时，空间中任意一点（ρ,φ,z）处磁场的轴向分量（B_z）和径向分量（B_ρ）分别由下面的式子给出：

Figure 1

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{3z^2}{\rho^2+z^2}-1\right]$$
$$B_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3pz\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

其中 μ_0 为真空的磁导率.

I.3 设磁体在位置z时的瞬时速度为v. 求出圆环中的感应电动势（e_i）的表达式. **[1.5 分]**

I.4 此感应电动势将在圆环中产生一感应电流i. 将作用在圆环上的瞬时电磁力（f_{em}）用i表示出来. **[1.0 分]**

I.5 此环作用在磁体上的力为多少？ **[0.5 分]**

I.6 将感应电动势用L、R和i表示出来. 不必解出i. **[0.5 分]**

I.7 磁体降落时重力势能会减少. 重力势能主要将转换成3种形式的能量，写出这3种能量的名称，并写出用来计算它们大小的表达式. **[1.0 分]**

I.8 磁体的磁场在此过程中是否做功？请在相应的框内打钩. **[0.5 分]**

下面我们来计算圆管引起的阻尼系数k（见公式（1））. 设无限长的圆管半径为a，管壁厚度为w，电导率为σ. 在这里以及后面的计算中，假设圆管的电感可忽略. 可以将圆管看成是由很多个高度为$\Delta z'$，厚度（很小）为w，电导率为σ的圆环组成（见图3）. 为简单起见，设圆管的两端分别在$z=-\infty$和$z=\infty$无穷远处.

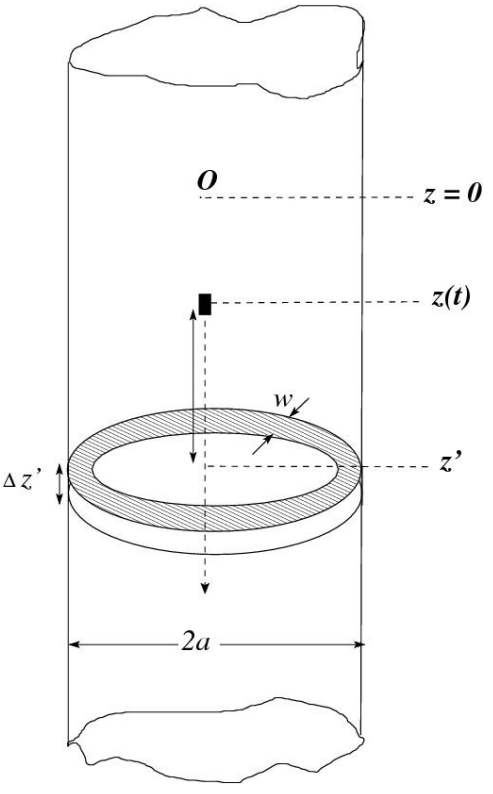


图 3

I.9 给出单个圆环的电阻的表达式. **[0.5 分]**

I.10 由于每个圆环很细，可以认为圆环上的磁场均为$B_\rho(\rho = a)$．设t时刻，磁体的坐标为$z(t)$，瞬时速度为$\dot{z}$．由整个圆管引起的阻尼系数k可以用p, σ和圆环的几何参数表示出来，请求出该表达式．表达式的最终结果应该含有一个无量纲的积分因子，此无量纲积分因子中会包含无量纲变量$u = (z - z')/a$． **[2.0 分]**

I.11 假设阻尼系数k可以用以下函数关系来表达

$$k = f(\mu_0, p, R_0, a)$$

其中R_0代表整个圆管的等效电阻．请通过量纲分析法给出k的表达式．在分析过程中无量纲的常数因子取为1． **[1.0 分]**

下面的积分公式或许会有用：

$$\int \frac{udu}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2}\frac{(a^2 + u^2)^{1-n}}{1 - n} + \text{Constant} \quad (n > 1)$$

钱德拉塞卡（Chandrasekhar）极限

印度物理学家Chandrasekhar教授(1910-1995)在他1930年的一个著名工作中研究了恒星的稳定性．理论题II将帮助你建立一个钱德拉塞卡理论的简化版本．



S. Chandrasekhar
(1910-1995)

你可能会用到以下符号和物理常数

真空中的光速	$c = 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m.s^{-1}}$
普朗克常数	$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J.s}$
万有引力常数	$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$
电子静止质量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
质子静止质量	$m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

II.1. 考虑一个密度均匀分布的球形恒星，半径为R，质量为M．推导由于自身引力场引起的万有引力势能(E_G)（引力自能）． **[1.0 分]**

II.2. 我们假设恒星仅由氢原子组成，并且所有氢原子都处于电离状态．该恒星由核聚变反应产生能量的过程已经停止．电子遵循泡利不相容原理，其总能量可以由量子统计物理计算得到．你可以将电子总能量（忽略质子能量）表达如下

$$E_e = \frac{\hbar^2\pi^3}{10 m_e 4^{2/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3}\frac{{N_e}^{5/3}}{R^2}$$

N_e 是电子总数目，$\hbar = h/2\pi$．求恒星的平衡条件．这个条件决定了恒星半径(R_{wd})和恒星质量之间的关系．这个半径称为白矮星(White Dwarf)半径． **[2.0 分]**

II.3. 假设恒星质量与太阳质量($M_S = 2.00 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$)相同，求R_{wd}的值． **[1.5 分]**

II.4. 假设电子分布是均匀的，求电子间的平均距离r_{sep}，恒星半径取为上文II.3中得到的R_{wd}． **[1.0 分]**

II.5. 下面来估算电子的速度．假设每个电子在一个长度为r_{sep}的一维盒子内形成驻波，利用德布罗意假说计算电子处于基态时的速度(v)． **[1.0 分]**

II.6. 考虑对(II.2)中的分析进行修正．假设电子处于极端相对论极限($E = pc$)，通过类似的分析可以得到

$$E_e^{rel} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3}\frac{\hbar c}{R}{N_e}^{4/3}$$

求恒星保持平衡状态时的质量，用本题开始部分给出的物理常数来表达．这个质量称为临界质量(M_c)． **[1.5 分]**

II.7. 如果恒星的质量M大于(II.6)中得到的临界质量M_c，请指出恒星是否会扩张或收缩．在框中打钩选择． **[0.5 分]**

II.8. 计算临界质量，并把结果表示成太阳质量(M_S)的倍数．（注意：由于本题分析过程中使用了近似，你的答案可能与Chandrasekhar教授得到的著名结论不同） **[1.5 分]**

Pancharatnam 相位

本问题处理的是两束光的干涉、偏振和叠加问题．这个问题曾被印度物理学家S. Pancharatnam (1934–1969)研究过．



S. Pancharatnam
(1934–1969)

考虑如图 1 所示的实验装置．两束单色相干光(以beam 1 和beam 2 标记)沿z方向入射到两个窄的狭缝上，狭缝间距为d $(S_1S_2 = d)$．通过狭缝后两束光产生干涉，屏幕S上会看到干涉条纹．狭缝和屏幕的距离为D，并且$D \gg d$．假设狭缝S_1 和 S_2的缝宽都远远小于入射波长．

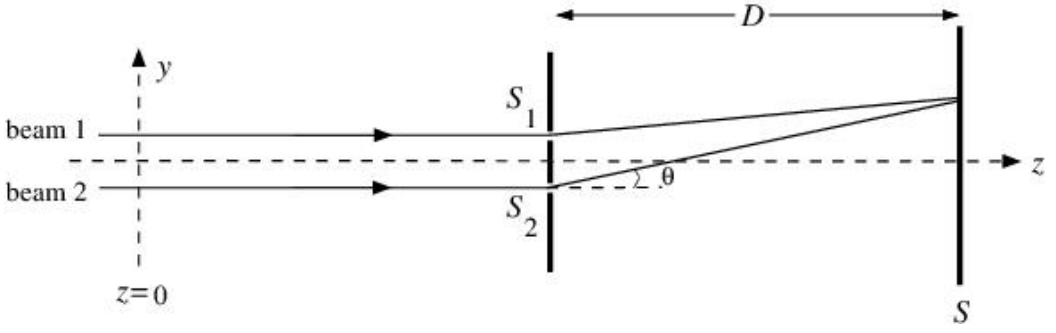


图 1

III.1. 设两束光线 1、2 在$z = 0$处为线性偏振光，相应的电场矢量为

$$\vec{E}_1 = \hat{\imath}E_0\cos(\omega t) \quad \text{.....(1a)}$$

$$\vec{E}_2 = \hat{\imath}E_0\cos(\omega t) \quad \text{.....(1b)}$$

这里，$\hat{\imath}$是x方向的单位矢量，ω是光的角频率而E_0是电场的幅值．求屏幕上的光强分布$I(\theta)$的表达式，角度θ的含意如图 1 所示．将你的结果用θ, d, E_0, c和ω表示出来，这里c是真空中的光速．注意，光强正比于电场平方的时间平均值，你可以将比例系数设为β．电场从狭缝到屏幕的传播过程中的强度衰减可以忽略不计． **[1.0 分]**

III.2. 将一片完全透明，厚度为w ，折射率为μ的玻璃板放置在狭缝前的光束 1 的光路中．求此时屏幕上的光强分布$I(\theta)$．将结果用 $\theta, d, E_0, c, \omega, \mu$ 和 w 表示出来． **[1.0 分]**

III.3. 用一个光学器件（该器件被称为 1/4 波片，quarter wave plate (QWP)）替

换上题中的玻璃板放置在光束 1 的光路中．1/4 波片可以将光束的偏振态从线偏振

$$\vec{E}_1 = \hat{\imath}E_0\cos(\omega t)$$

转换为圆偏振

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\imath}E_0\cos(\omega t) + \hat{\jmath}E_0\sin(\omega t)] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

这里$\hat{\jmath}$ 是y 轴的单位矢量．

假设波片完全透明并且没有引入任何额外光程差．注意此时电场矢量的顶端随时间变化的轨迹是一个圆，因此该光束称之为圆偏振．假设θ足够小，即使沿$\hat{\jmath}$方向偏振的光通过狭缝 1 后的强度也同样不依赖于θ．

III.3.a. 求此时屏幕上的光强分布 $I(\theta)$ ．结果用θ, d, E_0, c和ω来表达．

III.3.b. 最大光强(I_{max})是多少?

III.3.c. 最小光强(I_{min})是多少?

[2.0 分]

III.4.

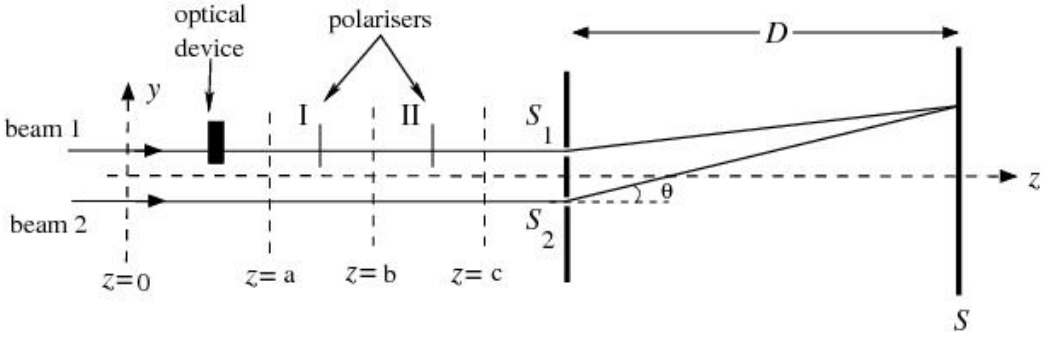


图 2

现在，我们考虑如图 2 所示的实验装置．光束 1 依次通过以下元件：

- optical device也即第 3 部分描述过的 1/4 波片 (QWP)
- 位于$z = a$ 和 $z = b$ 之间的偏振片（polariser）（标记为I ）．该偏振片只允许平行于单位矢量$\hat{\imath}'$方向的电场分量通过．$\hat{\imath}'$ 定义如下

$$\hat{\imath}' = \hat{\imath}\cos\gamma + \hat{\jmath}\sin\gamma$$

- $z = b$ 和$z = c$ 之间有另一个偏振片（标记为II ），此偏振片将光束偏振方向转换回到$\hat{\imath}$方向．

这样光束 1 又回到原来的偏振状态．假定这些偏振片都没有产生光程差并且完全透明．

III.4.a. 写出光束 1 通过第一个偏振片后在$z=b$处的电场$\vec{E}_1(z=b)$.

III.4.b. 写出光束 1 通过第二个偏振片后在$z=c$处的电场$\vec{E}_1(z=c)$.

III.4.c. 狭缝处两束光的相位差(α) 是多少？ **[2.0 分]**

最普遍的偏振状态是椭圆偏振．椭圆偏振可以看成是两个相互垂直的线偏振的叠加：

$$\vec{E} = \hat{\imath}' E_0 \cos e \cos(\omega t) + \hat{\jmath}' E_0 \sin e \sin(\omega t) \quad \text{……..(3)}$$

椭圆偏振以及坐标轴 $\hat{\imath}'$ 和 $\hat{\jmath}'$ 如图 3 所示.

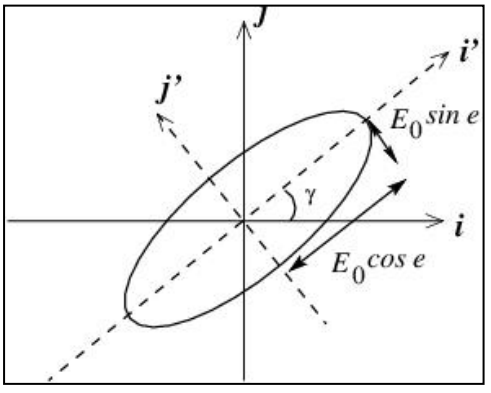


图 3

电场矢量顶端随时间的变化轨迹是一个椭圆．定义e 为椭圆偏心率：

$$\tan e = \frac{\text{椭圆半短轴}}{\text{椭圆半长轴}}$$

线偏振（公式（1））和圆偏振（公式（2））可以看成是椭圆偏振（公式（3）的特例．利用两个参数$\gamma(\in [0,\pi])$ 和$e(\in [-\pi/4,\pi/4])$可以完整的描述偏振状态.

偏振状态也可以用一个被称为庞伽勒球（Poincare sphere）的单位球上的点来描述（如图 4 所示）．方程（3）所描述的偏振状态可以用Poincare球上的点P来表示（见图 4），P点的纬度角 $\angle PCD = 2e$，经度角 $\angle ACD = 2\gamma$．C 是球心.

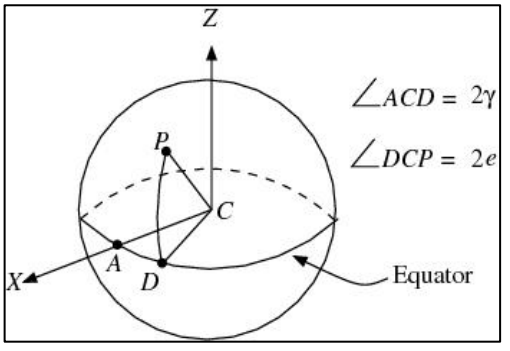


图 3

III.5. 考虑Poincare球赤道上的一点

III.5.a. 写出此点电场的表达式 $(\vec{E}_{\text{Eq}})$.

III.5.b. 此点对应的是何种偏振状态？ **[0.5 分]**

III.6. 考虑Poincare球北极处的一点

III.6.a 写出此点电场的表达式$(\vec{E}_{\text{NP}})$.

III.6.b 此点对应的是何种偏振状态？ **[0.5 分]**

III.7. 现在我们考虑光束 1（如III.4 中所述）的三种偏振态．初始偏振态（$z=0$）由Poincare球上A_1点来描述；经过 1/4 波片后（$z=a$），偏振态由球上A_2点来描述；经过第一个偏振片后（$z=b$），偏振态由球上A_3点来描述；在 $z=c$处，偏振回到初始状态（由A_1表示）．请在Poincare球上标出A_1、A_2、A_3的位置．

[1.5 分]

III.8. 如果将（如III.7 所给的）$A_1, A_2,$ 和 A_3用球面上的大圆连起来，会在球面上得到一个球面三角形 (注：球面上的大圆是指圆心与球心重合的圆)．上文第 4 部分的相位差α与此球面三角形所包围的曲面面积S有关．求S与α的关系．

这个关系是普适的，它由Pancharatnam首先得到，其相位差也被称为 *Pancharatnam* 相位．

[1.5 分]

北京大学物理学院　荀坤　杨景　陈晓林
南开大学物理学院　宋峰　张春玲
译

摩擦系数

由于摩擦力的作用，绕过一个圆柱或梁的细绳的两端张力会不同（图一）。要悬住细绳一端悬挂的物体, 要在绕过梁的细绳的另一头加的力可以比物体的重量小。随着细绳在梁上缠绕圈数的增多另一端所需加的最小力会以令人吃惊的速度下降。正是基于此，水手通过将缆绳在码头上的驳桩上绕很多圈来固住船只。

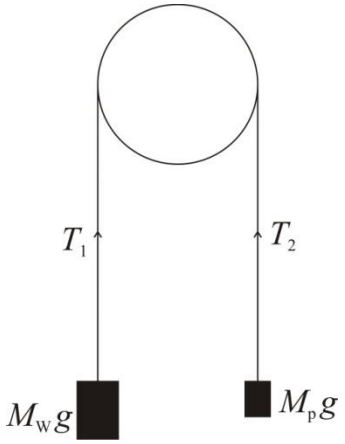


图.1

实验目标

通过系统性地改变各量大小，来探究负载 W (=M_w g)、最小平衡力 P (= M_p g) 及缠绕角θ（细绳与一个或多个梁柱接触部分对各轴心所张角之和）三者之间的关系，并将它们的关系用方程的形式给出。

实验装置:

序号	物　品	数量
1	中间竖直放置着一根钢管,其四周水平放置着四根钢管的木架	1
2	安放在一根水平钢管前面，刻有间距 1.5mm 的刻线的有机玻璃板	1
3	含挂架的塑料秤盘，其质量 M_{pan} 标在秤盘的侧面上	1
4	带照明灯的放大镜	1
5	带蓝色标记的白色细绳（刻度绳）	2 根
6	粉色绳	1 根
7	装在盒内的如下砝码：	
	500.0 g	1
	200.0 g	2
	100.0 g	1
	50.0 g	1
	20.0 g	2
	10.0 g	1
	5.0 g	1
	2.0 g	2
	1.0 g	1
8	一个质量未知的物体,其质量用 M_{u} 表示	1
9	一个带挂钩的砝码串，每一件质量均为 100 克，总质量为 800 克	1
10	抹布	1

滑动放大镜上的蓝色开关可以开关照明灯。有机玻璃板是用来探测细线的运动的，其上的刻线被用作判断细线运动与否的参照物。



图.2(a) 装在木架上的钢管



图.2(b) 砝码组



图.2(c) 塑料秤盘

		
图.2(d) 刻度绳	图.2(e) 粉色绳	图.2(f) 带照明的放大镜
		
图.2(g) 质量未知的物 M_u	图.2(h) 带挂钩的砝码组	图.2(i) 完整的装置

实验步骤:

注意：不要触摸细绳可能接触到的钢管的表面。任何油脂都可能改变表面的摩擦性质。如果需要的话可以使用提供的抹布擦拭钢管。

第一部分:

(注: 在此部分使用刻度绳.)

以带挂钩的砝码组作负载 M_w，将其系在所给刻度绳（其质量可忽略）一端，并在绳的另一端系上秤盘（质量已知）。实验装置中还提供了另一套砝码。通过使细绳跨过或绕过两个或更多个钢管可以改变缠绕角θ(见 图.3)。

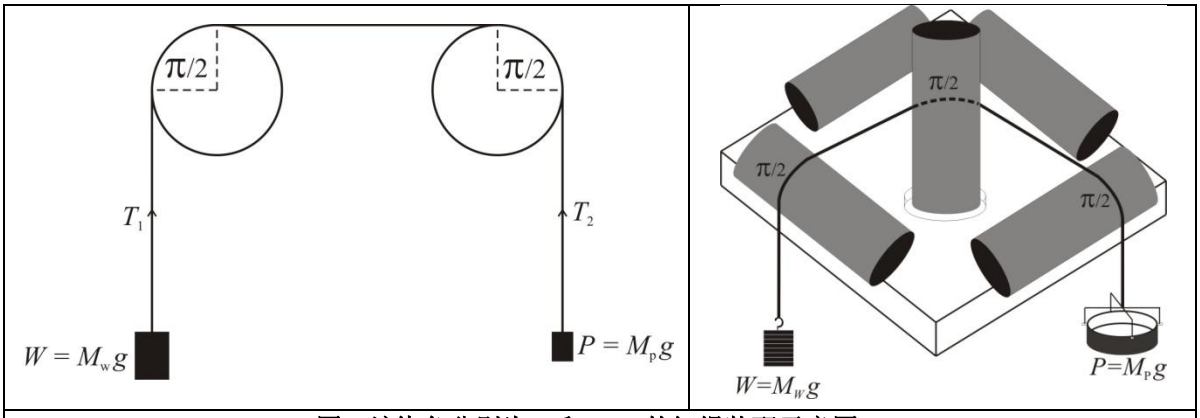


图.3 缠绕角分别为 π 和 3π/2 的细绳装配示意图。

当细绳不接触竖直钢管横跨在两个平行钢管上时得到的缠绕角θ最小(见图.3)。 通过使细绳绕过竖直钢管，并改变挂放最小平衡力的位置，可使缠绕角θ以π/2 的步长变化。负载 M_w应被悬挂在装有有机玻璃板的一端。

将细绳缠绕于中央竖直钢管上，便可使缠绕角度θ增加。通过一块带有刻度的透明有机玻璃板，我们可以观察挂有负重的绳索是否滑动。你可以使用带照明的放大镜来帮助观察绳索是否滑动。在理想状况下，我们应该通过观察 M_w 移动的临界状态来确定 M_p（克服静摩擦力）。但这不可能。不过，我们可以确定该值所处的区间[M_{p-}, M_{p+}]。此区间是 M_p 不确定度的度量，故应使其尽可能窄。

当$\theta = \pi$ 时，要尽量利用所给砝码使测量范围尽可能的宽。要估算测量的不确定度。画出必要的图线，综合各图线得到的结果得到所需的方程。分析你得到的数据，将用W和θ表达。P的表达式中还会含有与钢管和细绳间的摩擦有关的项。从 P的表达式中找出此项，令其等于系统的摩擦系数μ，并估算此系数的扩展不确定度。

第二部份：

(注意：在这部份使用粉色绳)

将所给质量未知的重物M_u和秤盘分别悬挂于粉色绳的两端，并使其静止。写出用以求得M_u和μ_u的方程。在$\theta = \pi$时，作必要的测量。使用实验中得到的关系来确定未知重物的质量M_u以及粉色绳与钢管之间的摩擦系数μ_u。并估算它们的扩展不确定度。

对不确定度估计的说明：

1) 如果被观测量 X 的测量值落在数值区间$[X_1, X_2]$，并且测量值在这个数值区间的分布概率是均匀的，那么这种数值分布被叫做均匀分布或者矩形分布，其标准不确定度可以表示为$\frac{|X_1 - X_2|}{2\sqrt{3}}$。

2) 在确定了一个测量值的标准不确定度之后，结果应当以扩展不确定度的形式表示。如果扩展不确定度的数值等于合成标准不确定度的两倍，那么这一测量的确信等级大约是95%。一般情况下，扩展不确定度只保留一位有效数位，测量值的有效数字的最后一位则应该和扩展不确定度值在同一位小数位上。

电磁感应

用于探测金属物体表面下的损伤的现代涡流测试技术，利用了电磁感应的原理。由于金属导体所在位置的磁通量的改变而感应出的环状电流叫做涡流。把通有交流电的线圈（例如：螺线管）放在金属物体表面附近，通过测量线圈的电阻和电感的变化，可以探测金属缺陷。

如果线圈内部没有铁磁材料，则磁通量 ϕ 正比于电流 i ，比例常数称为线圈的自感系数，用字母 L 表示。具有自感系数 L 的线圈中的自感电动势（emf），等于 $-L\frac{di}{dt}$ 。

在一个耦合线圈系统中（两个线圈），线圈 1 通有电流 i_1，则通过该线圈的磁通量为 $\phi = L_1 i_1 + M_{21} i_2$

式中 L_1 是线圈 1 的自感系数， M_{21} 是互感系数。当线圈 2 通有电流时，磁通量与上式类似，并有 $M_{12}=M_{21}$.

L-R 电路

一个角频率为ω的正弦交流电，流经电阻为 R、自感系数为 L 的线圈构成的 L-R 电路，其电势会降低。

设电流 $i = I_0 \sin \omega t$, 则电阻上的电压降等于 $I_0 R \sin \omega t$ ，电感上的电压降是 $I_0 \omega L \cos \omega t$. 进而我们可以得到 R-L 组合回路上的电压。$\omega L$ 称为感抗，用符号 X 表示。容易证明，线圈上的电压是 $I_0 Z \sin(\omega t + \theta)$, 式中，

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) \tag{2}$$

交流电压和交流电流的大小和极性随着时间连续变化，但是一个周期内的电压和电流的有效值（rms 值）是不依赖于时间的，分别用 V 和 I 表示。它们满足的关系式类似于欧姆定理的表达式：$V = IZ$。由此，我们有：

$$V^2 = (IR)^2 + (IX)^2 \tag{3}$$

（注意：电阻的概念基本上与电磁能的耗散有关，交流电路中的线圈的电阻和直流电路中用欧姆定理求解出的值是不同的。)

如果电路中还有其他的电阻和/或电感，L-R 组合回路中的电压降等于电阻上的总电压降和电感上的总电压降的平方和再开根号。

线圈感抗和电阻的测量。

说到测量交流电的电流和电压时，通常指的是 rms 值。

由方程（2）和（3）可以得到：

$$V\cos\theta = IR \tag{4}$$

以及

$$V\sin\theta = IX \tag{5}$$

为了获得线圈的 R 和 L 值，我们可以使用上述两个方程。电压 V 和电流 I 可以测量。但是还有三个未知量，即 θ, R 和 X 。因此我们还需要一个方程。

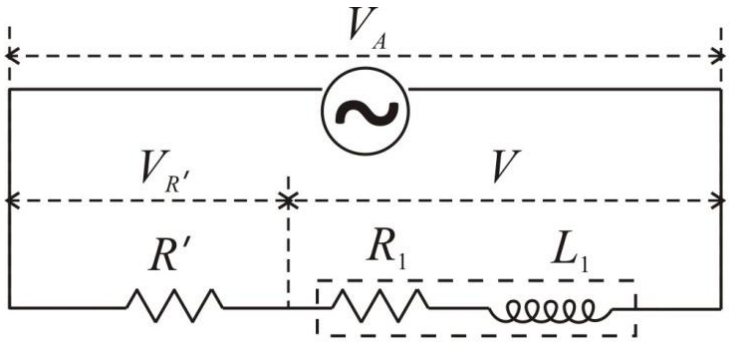


图 1

如果在一个含有线圈和一个已知电阻 R'的组合回路上，加上一个电压 V_A（如图 1 所示），那么电压 V_A 和 R'上的电压降 $V_{R'}$, 线圈上的电压 V 和角度 θ的关系为

$$V_A^2 = V_{R'}^2 + V^2 + 2V_{R'}V\cos\theta \tag{6}$$

公式（6）中除去θ的所有量都能够测量得到。

因此，测量出三个电压 V_A, $V_{R'}$ 和 V, 并利用公式 (4), (5)和 (6), θ, R 和 X 就能够被确定。已知交流电的频率，能够计算出 L。

反之，从方程式（4）和（6），由测量到的三个电压值，我们可以写出 R 的表达式

$$R = \left(\frac{R'}{2}\right)\left[\frac{V_A^2 - V^2}{V_{R'}^2} - 1\right] \tag{7}$$

线圈的阻抗 Z 可以由公式 $Z = \dfrac{V}{V_{R'}}R'$ 计算出，X 值可以从下式得出

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} \tag{1A}$$

耦合回路

对于由两个线圈组成的耦合回路，电源供给初级线圈的能量，部分消耗在初级线圈中，部分消耗在与之耦合的次级线圈中。当不存在机械功时，能量仅消耗在电阻上。在磁场中，

电感储存能量。对于自感系数为 L 的电感，当电流为 I（rms 值）时，其平均储能等于 $\frac{1}{2}LI^2$。

当电流流经次级线圈时，其在初级线圈中感应出的电动势 emf 导致了初级线圈中电流的变化。从初级线圈来看，这个变化是初级线圈中的等效电阻和感抗的一系列变化所引起的，没有必要知道次级线圈的参数。在初级和次级线圈中消耗的总能量就好像是消耗在初级线圈等效电阻上一样。

初级线圈等效电阻值 R_{PE} 和等效电感 L_{PE} 与从次级线圈的“反射”电阻 R_R 和“反射”电感 L_R 有关。在初级线圈中反射的电阻 R_R 所消耗的（平均）功率必须等于次级回路中电阻 R_S 消耗的功率。即

$$I_P^2 R_R = I_S^2 R_S \tag{8}$$

类似地，反射的感抗 L_R 和次级回路中感抗 L_S 满足：

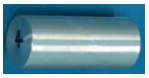
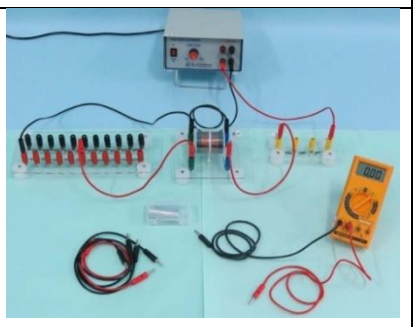
$$\frac{1}{2}L_R I_P^2 = \frac{1}{2}L_S I_S^2 \tag{9}$$

由于初级线圈中交变电流 I_P 的改变，而在次级线圈中感应的电动势 emf 的大小等于 $\omega M I_P$。根据基尔霍夫回路方程，可以写出初级和次级线圈中电流（rms 值）满足的方程

$$\omega M I_P = I_S Z_S \tag{10}$$

式中 Z_S 是次级回路中的阻抗。当次级回路中阻抗为无限大时，感应电动势 emf 就好像作用于开路的次级线圈上。

实验仪器：

			
电阻板	连接线	数字万用表	耦合线圈，其中一个线圈绕在另一个线圈上面
			
正弦波发生器	电阻板	铝棒	整套装置

实验仪器包含下述物品：

1. 频率 1000 Hz 时输出为 10 V (rms 值) 的正弦波发生器
2. 可用作电压表的数字万用表
3. 绕在无磁性非导体圆柱状中空绕线筒上的同轴线圈，其中一个线圈绕在另一个的上面
4. 能够插入中空绕线筒的铝棒
5. 安装在聚丙烯绝缘板上的电阻板有 2 排电阻，每排有 10 个电阻：其中一排的电阻值均为 100 欧姆，另一排的则均为 10 欧姆，都含有香蕉插孔
6. 所需要的负载电阻 R_L 或者取样电阻 R' 可以用电阻板和导线连接来进行选取。当 5 中所述的电阻板用作负载电阻时，还有另一个具有 300 欧姆电阻的电阻板可用作取样电阻。
7. 具有香蕉插头的 5 根黑线和 5 根红线（其中较长的一对黑线和红线用于万用表)。

频率为 1000 Hz 的正弦波发生器可用于产生交流电压。使用万用表的 20V 量程测量交流电压的 rms 值。

若有需要，可以从测量到的初级线圈中 R' 上的电压和次级线圈中 R_L 上的电压，计算得到电流 I_P 和 I_S。

实验

第一部分： 测量无芯（空气芯）线圈和铝芯线圈的电阻和电感 【3.4 分】

将线圈 1（接线柱为蓝色）和电阻 R'串联，并连接到正弦信号发生器的两端。你需要从电阻板上挑选 R'的阻值。在你开始实验测量前，首先开启正弦信号发生器，以便达到稳定的输出。不要自行将信号发生器关闭。始终将信号发生器的输出保持在最大（数字万用表上显示大约为 10V）。

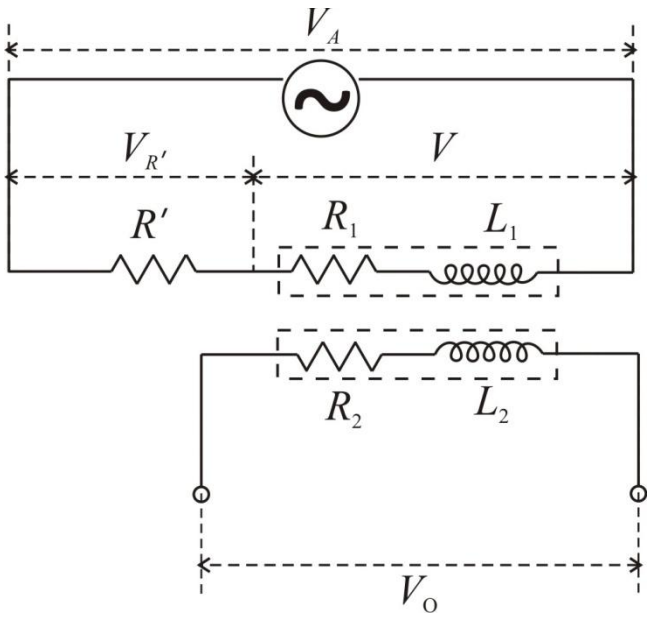


图 2

信号发生器输出的波形可能会有一定程度的不对称。在该情况下，交换连接数字万用表的“V/Ω”和“com”插口的表笔，得到的读数会有些许不同。为了校准波形不对称带来的误差，请每次测量时都交换万用表的表笔，并取两次测量值的平均。

请选择适合的 R'，使 $V_{R'}$ 和 V 的值大致相等。这样，由阻抗 Z 带来的系统误差便可以忽略。

（a） 测量 V_A, $V_{R'}$ 和 V，以及另外线圈两端的电压 V_O。找出线圈 1（蓝色端点）的电阻 R_1 和电感 L_1，并估算测量值的不确定度。 （0.9 分）

（b） 连接另一线圈 2（接线柱为绿色），通过必要的测量确定 R_2 和 L_2。估算测得值的不确定度。 （0.9 分）

（c） 将铝棒插入线圈中，重复上述步骤，找出线圈 1 的电感 L_1*和电阻 R_1*以及相应的不确定度。 （0.8 分）

（d） 通过必要 的实验测量，得到带铝芯的线圈 2 的电感 L2*和电阻 R2*，并估算不确定度。 （0.8 分）

注意：下面的第二、三、四部分，不需要计算不确定度

第二部分：互感和耦合常数 【3 分】

（f）互感 M 可以从 $V_{R'}$ 和 V_O（第一部分中已测量）中得到。分别给出不带铝芯和带铝芯的线圈 1 和线圈 2 的互感的平均值。耦合线圈的互感和自感之间的关系由 $M = k\ (L_1L_2)^{1/2}$ 给出。确定耦合常数 k 的值。

(g) 使用线圈 1（蓝色接线柱）作为初级线圈，线圈 2（绿色接线柱）作为次级线圈。将初级线圈与取样电阻 $R' = 300$ ohm 串联，并接于信号发生器的输出端。将次级线圈与可变电阻 R_L 相联。测量 R_L 两端的电压以得到输出电压 V_O。改变 R_L 的阻值，并测量每个 R_L 时的 V_A，$V_{R'}$，V 和 V_O。

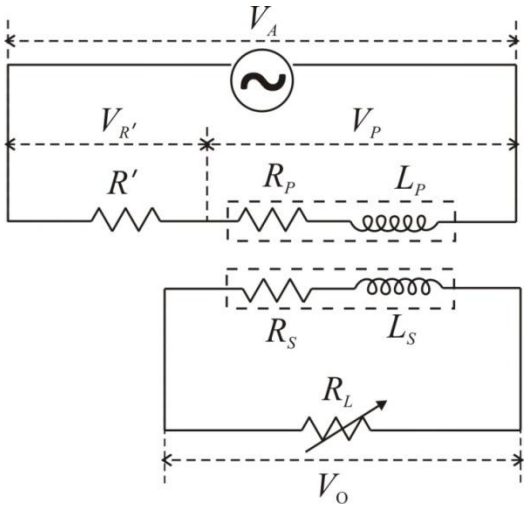


图 3

（h）将公式（10）重写成展开式，可作出一个线性图。给出该线性图的表达式。其斜率可以用来获得互感值 M，其截距可用来获得次级线圈的感抗值 X_S。
（i） 使用（g）中的数据，算出一些必要的物理量，并画出对应于（h）中表达式的图。
（j）作图，并得到 M 和 X_S 的值。

第三部分：初级线圈的等效阻抗和次级线圈的若干反射物理量之间的关系 【2.4 分】

(k) 使用第二部分中得到的数据，找出对应次级电路中各个 R_L 取值时，初级线圈的等效电阻 R_{PE} 和等效感抗 X_{PE}。（0.6 分）
(l) 使用第二部分中得到的数据，对应所有 R_L，计算公式（8）中所定义的反射电阻 R_R 和反射电抗 X_R（参见公式（9））。(0.6 分)
(m) 作出 X_{PE} 随 X_R 变化的曲线。请考虑作图所绘各量的不确定度，写出等效初级感抗和反射感抗之间关系的表达式。（0.6 分）
(n) 在所研究的取值范围内，用图像表示出 R_R 和 R_L 的关系，并找出反射电阻达到最大值时 R_L 的取值。如有需要，可进一步测量以得到更多数据，以便更加精确地找出上述最大值。（0.6 分）

第四部分：涡流效应 【1.2 分】

(o) 通过分析第三部分中得到的数据，我们可以使用一种模型来估算带电线圈中金属芯的涡流所感受到的电感和电阻的比值，这里的涡流是线圈接上电源后在线圈的芯中产生的。通过分析第二部分（i）和（j）的数据，可以得到 $R_{PE} = R_P + R_R$. 而 X_{PE} 和 X_R 关系之间的关系从第三部分（m）中得到。

参照第一部分（c）中得到的数据，分别对线圈 1 和线圈 2 接上电源的情形，估算铝芯中涡流所感受到的电感和电阻的比值。（0.8 分）

(p) 按照第二部分的图 3 所示连接线圈，并插入铝芯。给出铝芯的功率损耗 ΔP 的表达式。
取 R' = 300 ohms，R_L = 1000 ohms。将 V_A 调到 9.0 V。通过适当测量，得出铝芯中涡流带来的功率损耗。

(0.4 分)

北京大学物理学院 荀坤 杨景 陈晓林
南开大学物理学院 宋峰 张春玲
译

I.1. Equation of motion for the magnet is

$$m\ddot{z} = mg - k\dot{z} \tag{1}$$

For terminal velocity $\ddot{z} = 0$ — 0.2 mark

which gives $v_T = \dot{z} = \dfrac{mg}{k}$ — 0.3 mark

I.2. Rewriting Eq. (1)

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v(t)$$

Given that $v(t=0) = 0; z(t=0) = 0$ which yields

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) = \frac{dz}{dt}$$ — 0.5 mark

$$\int_0^z dz = \int_0^t \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})dt$$

$$z(t) = \frac{mg}{k}\left[t + \frac{m}{k}(e^{-kt/m} - 1)\right]$$ — 0.5 mark

I.3. **Method - I** : Because of the relative speed v between the magnet and the ring, in the field $\vec{B} = B_z\hat{k} + B_\rho\hat{\rho}$ of the magnet, the induced emf is given by

$$e_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}).d\vec{l}$$ — 0.8 mark

$$e_i = vB_a 2\pi a$$ — 0.4 mark

where $$B_a = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3pa(z_0 - z)}{[a^2 + (z_0 - z)^2]^{5/2}} \tag{2}$$

0.3 mark

Method - II :Magnetic flux (ϕ) through the ring is

$$\phi = \int_0^a B_z 2\pi\rho d\rho$$ — 0.2 mark

$$= 2\pi\int_0^a \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\rho p}{(\rho^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}\left[\frac{3(z_0 - z)^2}{\rho^2 + (z_0 - z)^2} - 1\right]d\rho$$ — 0.2 mark

$$\phi = \frac{\mu_0 p a^2}{2(a^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}$$ — 0.3 mark

Induced emf $e_i = \dfrac{-d\phi}{dt} = -v\dfrac{d\phi}{dz}$ — 0.4 mark

which gives $e_i = \dfrac{\mu_0 3pa^2 v(z_0 - z)}{2[a^2 + (z_0 - z)^2]^{5/2}}$ — 0.4 mark

I.4. B_z component will cause a radially outward force on the ring and by symmetry this yields a null force. 0.4 mark
Only B_ρ will contribute to

$$d\vec{f}_{em} = i(d\vec{l} \times \vec{B})$$
$$\left|\vec{f}_{em}\right| = i2\pi a B_a \quad \text{0.6 mark}$$

where B_a is given by Eq. (2).

I.5. By Newton's third law, equal and opposite force will be exerted by the ring on the magnet. Hence the magnitude of the force on the magnet by the ring is f_{em}. 0.5 mark

I.6. $e_i = L\dfrac{di}{dt} + iR$ 0.5 mark

I.7. Potential energy is converted to three parts:

(a) $mv^2/2$ (kinetic energy) 0.3 mark

(b) $Li^2/2$ (magnetic energy) 0.3 mark

(c) $i^2R\Delta t$ (Joule loss due to the current in time Δt). 0.4 mark

I.8. The magnetic field does no work in the process.

Yes	
No	✓

0.5 mark

I.9. Resistance of the ring

$$\Delta R = \frac{2\pi a}{\sigma w \Delta z'} \quad \text{0.5 mark}$$

I.10. Now, the net force on the magnet, due to one ring at z' is given by

$$f_{em} = (2\pi a) i B'_a$$

where

$$B'_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3pa(z'-z)}{(a^2+(z'-z)^2)^{5/2}} \quad \text{0.3 mark}$$

and i is the induced current in the ring which is given by

$$i = \frac{e_i}{\Delta R} = \frac{\sigma w e_i}{2\pi a} \Delta z' \quad \text{0.5 mark}$$

Then the net force on the magnet due to the entire pipe is given by

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} f_{em} = \int_{-\infty}^{\infty} B'^2_a (2\pi a) w \sigma dz' . \dot{z} \quad \text{0.2 mark}$$

Since the pipe is very long the limits of integration can be taken as $-\infty$ and ∞. Substituting B'_a, we get

$$F = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 18p^2a^3\pi w\sigma\dot{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z'-z)^2}{((z'-z)^2+a^2)^5}dz' \qquad \boxed{0.5 \text{ mark}}$$

Let $u = (z'-z)/a$. Finally,

$$F = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{18p^2\pi\sigma w\dot{z}}{a^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)^5}du$$

Thus damping parameter

$$k = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{18p^2\pi\sigma w}{a^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)^5}du \qquad \boxed{0.5 \text{ mark}}$$

I.11. Given that,

$$k = f(\mu_0, p, R_0, a)$$

Dimensions of various parameters involved are

$$[\mu_0] = I^{-2}MLT^{-2} \qquad \boxed{0.2 \text{ mark}}$$
$$[p] = IL^2 \qquad \boxed{0.1 \text{ mark}}$$
$$[R_0] = I^{-2}ML^2T^{-3} \qquad \boxed{0.2 \text{ mark}}$$
$$[a] = L$$
$$[k] == MT^{-1}$$

which gives

$$k = \frac{p^2\mu_o^2}{a^4R_0} \qquad \boxed{0.5 \text{ mark}}$$

II.1. Consider a shell of width dr which is at the distance r from the centre of the star. Let ρ be the density of star. Gravitational Potential energy of shell is

$$dE_G = -G\frac{(4\pi r^3\rho/3)(4\pi r^2 dr\rho)}{r} \qquad \text{0.5 mark}$$

$$E_G = \int_0^R dE_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \qquad \text{0.3 mark}$$

It is negative, i.e. gravitational force is radially inward. 0.2 mark

II.2. Total energy of the star $E = E_G + E_e$. 0.2 mark

At equilibrium, at $R = R_{wd}$

$$\frac{dE}{dR} = 0 \qquad \text{0.8 mark}$$

$$\frac{dE_G}{dR} = -\frac{dE_e}{dR}$$

$$\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_{wd}^2} = \frac{\hbar^2\pi^3}{10m_e 4^{2/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3}\frac{2N_e^{5/3}}{R_{wd}^3}$$

$$R_{wd} = \frac{\hbar^2\pi^3}{6Gm_e 4^{2/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3}\frac{2N_e^{5/3}}{M^2} \qquad \text{1.0 marks}$$

II.3. Since all the hydrogen is ionized, the number of protons $(N_p) = N_e$. Also $m_p \gg m_e$. Hence

$$N_e = N_p \approx \frac{M}{m_p} \qquad \text{0.5 mark}$$

$$R_{wd} = \frac{\hbar^2\pi^3}{6Gm_e 4^{2/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3}\frac{2}{M^{1/3}m_p^{5/3}}$$

$$R_{wd} = 2.28 \times 10^4 \text{ km} \qquad \text{1.0 mark}$$

II.4. If r_{sep} is average separation between electrons then

$$N_e \times \frac{4}{3}\pi r_{sep}^3 \approx \frac{4}{3}\pi R_{wd}^3 \qquad \text{0.2 mark}$$

$$r_{sep}^3 = \frac{R_{wd}^3}{N_e} \approx R_{wd}^3\frac{m_p}{M} \qquad \text{0.2 mark}$$

$$r_{sep} = 2.13 \times 10^{-12} \text{ m} \qquad \text{0.6 mark}$$

II.5. For a particle confined in a box of length r_{sep}, its de Broglie wavelength λ_{dB} for the

ground state can be written as

$$\lambda_{dB} = 2r_{sep} \qquad \text{0.2 mark}$$

$$\text{and momentum } p = \frac{h}{\lambda_{dB}} \qquad \text{0.3 mark}$$

$$v \approx \frac{h}{2m_e r_{sep}} \qquad \text{0.2 mark}$$

$$= 1.08 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1} \qquad \text{0.3 mark}$$

Correction: If one takes relativistic momentum

$$\lambda_{dB} = 2r_{sep} \qquad \text{0.2 mark}$$

$$p = \frac{h}{\lambda_{dB}} = \frac{h}{2r_{sep}} = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{0.3 mark}$$

$$v = \frac{h}{\sqrt{4m_e^2 r^2 + \dfrac{h^2}{c^2}}} \qquad \text{0.2 mark}$$

$$= 1.06 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1} \qquad \text{0.3 mark}$$

II.6. Similar to part II.2, at equilibrium

$$\frac{dE_G}{dR} = -\frac{dE_e^{rel}}{dR} \qquad \text{0.3 mark}$$

$$\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3}\frac{\hbar c}{R^2}N_e^{4/3} \qquad \text{0.4 mark}$$

For critical mass

$$M_c = \frac{3(5^3\pi)^{1/2}}{16m_p^2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \qquad \text{0.8 mark}$$

Alternatively: Since the total energy

$$E_G + E_e^{rel} = \left(-\frac{3}{5}GM^2 + \frac{\pi^2}{4^{2/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3}\hbar c N_e^{4/3}\right)\frac{1}{R}$$

must be minimized for equilibrium, one can argue that if coefficient of $1/R$ is positive then star would collapse otherwise it would expand.

II.7. For $M > M_c$

Expand	
Contract	✓

0.5 mark

II.8.

$$M_c = 1.36 \times 10^{31} \text{ kg} \qquad \text{1.0 mark}$$

$$= 6.8\ M_S \qquad \text{0.5 mark}$$

III.1. **[1.0 mark]** Let the phase difference between two rays making an angle θ with z direction be δ. Clearly

$$\delta = \omega \Delta t = \omega d \sin\theta / c \tag{1}$$

Then the intensity is given by

$$I(\theta) = \beta \overline{|\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2}$$

Here

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 &= |E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(\omega t + \delta)|^2 \\ &= |E_0 \cos(\omega t)(1 + \cos\delta) - E_0 \sin(\omega t) \sin\delta|^2 \\ &= E_0^2 \left[\cos^2(\omega t)\left(1 + 2\cos\delta + \cos^2\delta\right) + \sin^2(\omega t)\sin^2\delta \right. \\ &\quad \left. -2\cos(\omega t)(1 + \cos\delta)\sin(\omega t)\sin\delta\right] \end{aligned}$$

Since $\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = 1/2$ and $\overline{\sin(\omega t)\cos(\omega t)} = 0$, we get the intesity to be

$$I(\theta) = \beta E_0^2 (1 + \cos\delta)$$

where δ is given by Eq. (1).

(a) Alternate:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 &= |E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(\omega t + \delta)|^2 \\ &= |E_0 \cos(\omega t)(1 + \cos\delta) + E_0 \sin(\omega t)\sin\delta|^2 \\ &= |E_0 A \cos(\omega t - \phi)|^2 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} A^2 &= (1 + \cos\delta)^2 + \sin^2\delta \\ &= 2(1 + \cos\delta) \end{aligned}$$

Since $\overline{\cos^2(\omega t - \phi)} = 1/2$, we have

$$I(\theta) = \frac{\beta}{2} E_0^2 A^2 = \beta E_0^2 (1 + \cos\delta)$$

where δ is given by Eq. (1).

III.2. **[1.0 marks]** The beam 1 has travelled extra optical path $= (\mu - 1)\, w$. Thus the net phase difference between two beams when they emerge at the angle θ is

$$\delta = \frac{\omega}{c}\left(d \sin\theta - (\mu - 1)\, w\right)$$

and $I(\theta) = \beta E_0^2 (1 + \cos\delta)$.

III.3. **[2.0 marks]** The two beams have travelled exactly same paths upto the slits. Thus when they emerge at an angle θ, they have a net phase difference of $\delta = \omega d \sin\theta / c$. Then, notice

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 &= \left|\mathbf{i}\left[\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t) + E_0\cos(\omega t + \delta)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(\omega t)\right]\right|^2 \\
&= \left|E_0\cos(\omega t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\delta\right) + E_0\sin(\omega t)\sin\delta\right|^2 + \frac{E_0^2}{2}\sin^2(\omega t) \\
&= E_0^2\left[\cos^2(\omega t)\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\cos\delta + \cos^2\delta\right) + \sin^2(\omega t)\sin^2\delta\right. \\
&\quad \left. + 2\cos(\omega t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\delta\right)\sin(\omega t)\sin\delta\right] + \frac{E_0^2}{2}\sin^2(\omega t)
\end{aligned}$$

Thus, after taking time averages, the intesity will be

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= \beta E_0^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\cos\delta + \cos^2\delta\right) + \frac{1}{2}\sin^2\delta\right] + \beta\frac{E_0^2}{4} \\
&= \beta E_0^2\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\delta\right] \\
&= \beta E_0^2\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\omega d\sin\theta}{c}\right)\right]
\end{aligned}$$

The maximum value of the intensity is $\beta E_0^2\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
The minimum value of the intensity is $\beta E_0^2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

III.4. **[2.0 marks]** The electric field at $z = b$ is given by

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1(z=b) &= \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega t - kb)\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' + \sin(\omega t - kb)\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}'\right)\right)\mathbf{i}' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_0\cos\gamma\cos(\omega t - kb) + E_0\sin\gamma\sin(\omega t - kb)\right]\mathbf{i}' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_0\cos(\omega t - kb - \gamma)\right]\mathbf{i}'
\end{aligned}$$

and at $z = c$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1(z=c) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega t - kc - \gamma)\,\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\gamma E_0\cos(\omega t - kc - \gamma)\,\mathbf{i}
\end{aligned}$$

Where as

$$\mathbf{E}_2(z=c) = E_0\cos(\omega t - kc)\,\mathbf{i}$$

So, the net phase difference between beam 1 and beam 2 is now

$$\text{Phase difference } \alpha = \gamma.$$

III.5. **[0.5 marks]**

(a) At equator $e = 0$. Then

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{Eq}} = \mathbf{i}' E_0 \cos(\omega t) .$$

(b) Clearly the beam is linearly polarised along $\mathbf{i}'$.

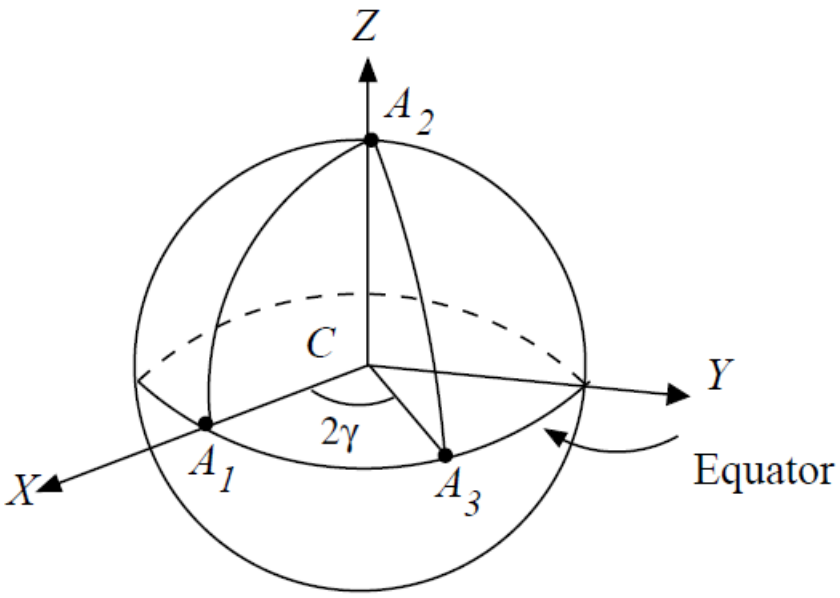
III.6. **[0.5 marks]**

(a) At north pole $e = \pi/4$ and γ can be taken to be 0. Then $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ and $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$. The electric field

$$\mathbf{E}_{\text{NP}} = \mathbf{i}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t) + \mathbf{j}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(\omega t) ,$$

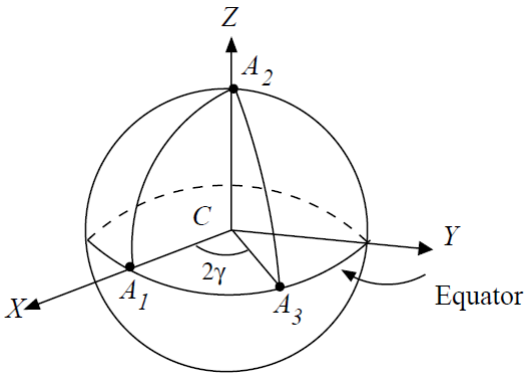
(b) Which represents circular polarisation.

III.7. **[1.5 marks]**



III.8. **[1.5 mark]** From figure it is clear that the area of the spherical triangle $A_1A_2A_3$ is $2\pi \times \left(\frac{2\gamma}{2\pi}\right) = 2\gamma$ and the phase difference was γ. Thus the phase difference is half the area of the spherical triangle $A_1A_2A_3$ on Poincare sphere.
Thus $S = 2\alpha$.
Here, the beam 1 passes through various states of polarization and returns to its original state. Though there has been no additional path difference, the beam has picked up a phase γ with respect to the beam 2. This is called as Pancharatnam phase.

QN	Solution	Marks
III.1	Step 1: Superposition $\delta = \omega\Delta t = \dfrac{\omega d\sin\theta}{c}$ $\lvert\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2\rvert^2 = E_0^2\left[\cos^2(\omega t)\left(1+2\cos\delta+\cos^2\delta\right)+\sin^2(\omega t)\sin^2\delta\right.$ $\left.-2\cos(\omega t)\left(1+\cos\delta\right)\sin(\omega t)\sin\delta\right]$	0.4 0.2
	Step 2: Time averaging: $\overline{\cos^2\omega t} = \overline{\sin^2\omega t} = 1/2$ and $\overline{\sin(\omega t)\cos(\omega t)} = 0$,	0.3
	Step 3: Intensity $I(\theta) = \beta\overline{\lvert\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2\rvert^2} = \beta E_0^2\left(1+\cos\delta\right)$	0.1
III.2	The beam 1 has travelled extra optical path $= (\mu-1)\,w$.	0.4
	Thus the net phase difference between two beams when they emerge at the angle θ, $\delta = \dfrac{\omega}{c}\left(d\sin\theta-(\mu-1)\,w\right)$	0.2
	and $I(\theta) = \beta E_0^2\left(1+\cos\delta\right)$.	0.4
III.3	The two beams have travelled exactly same paths upto the slits. Thus when they emerge at an angle θ, they have a net phase difference of $\delta = \omega d\sin\theta/c$. Then, notice $\lvert\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2\rvert^2 = \left\lvert\mathbf{i}\left[\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t)+E_0\cos(\omega t+\delta)\right]+\mathbf{j}\left[\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(\omega t)\right]\right\rvert^2$	0.70 for x component and 0.3 for y component
	$\lvert\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2\rvert^2 = E_0^2\left[\cos^2(\omega t)\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\cos\delta+\cos^2\delta\right)+\sin^2(\omega t)\sin^2\delta\right.$ $\left.+2\cos(\omega t)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos\delta\right)\sin(\omega t)\sin\delta\right]+\dfrac{E_0^2}{2}\cos^2(\omega t)$	0.3
	Thus, after taking time averages, the intesity will be $I(\theta) = \beta E_0^2\left[1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{\omega d\sin\theta}{c}\right)\right]$	0.3

QN	Solution	Marks
	The minimum value of the intensity is $\beta E_0^2\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Maximum value is $\beta E_0^2\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	0.2+0.2
III.4	The electric field at $z=b$ is given b $$\mathbf{E}_1(z=b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_0\cos\left(\omega t-kb-\gamma\right)\right]\mathbf{i}'$$	magnitude 0.8 , direction 0.2
	The electric field at $z=b$ is given by $$\mathbf{E}_1(z=c) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\gamma E_0\cos\left(\omega t-kc-\gamma\right)\mathbf{i}$$	magnitude 0.3, direction 0.2
	Phase difference $\alpha=\gamma$.	0.5
III.5	At equator $e=0$. Then $$\mathbf{E}=\mathbf{E}_{\text{Eq}}=\mathbf{i}'E_0\cos\left(\omega t\right).$$ Clearly the beam is linearly polarised along $\mathbf{i}'$.	**E** : 0.2 Linear Polarization: 0.3
III.6	At north pole $e=\pi/4$ and γ can be taken to be 0. Then $\mathbf{i}'=\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}'=\mathbf{j}$. The electric field $$\mathbf{E} = \mathbf{i}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t\right)+\mathbf{j}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t\right)$$ or $$= \mathbf{i}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t+\gamma\right)+\mathbf{j}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t+\gamma\right)$$ which represents circular polarisation.	**E** : 0.2 Circular Polarization: 0.3
III.7	Figure 	A1 on x axis 0.3, A2 on the north pole 0.5, A3 on equator 0.4, angle of 2γ 0.3
III.8	From figure it is clear that the area of the spherical triangle $A_1A_2A_3$ is $2\pi\times\left(\frac{2\gamma}{2\pi}\right)=2\gamma$	0.7
	Thus the phase difference α is half the area S of the spherical triangle $A_1A_2A_3$ on Poincare sphere i.e. $S=2\alpha$.	0.8

Model Solution

We will assume the relationship of the form:

$$P = f(W)\, h(\theta)$$

$$M_p = f(M_w)\, h(\theta)$$

M_w represents the mass in the hanger (Load)
M_p represents the mass in the pan + the mass of the pan (i.e. $M'_p + M_{pan}$) (Effort)

The relation between these variables can be found in two parts:

- Relation between M_P and M_W
- Relation between M_P and θ

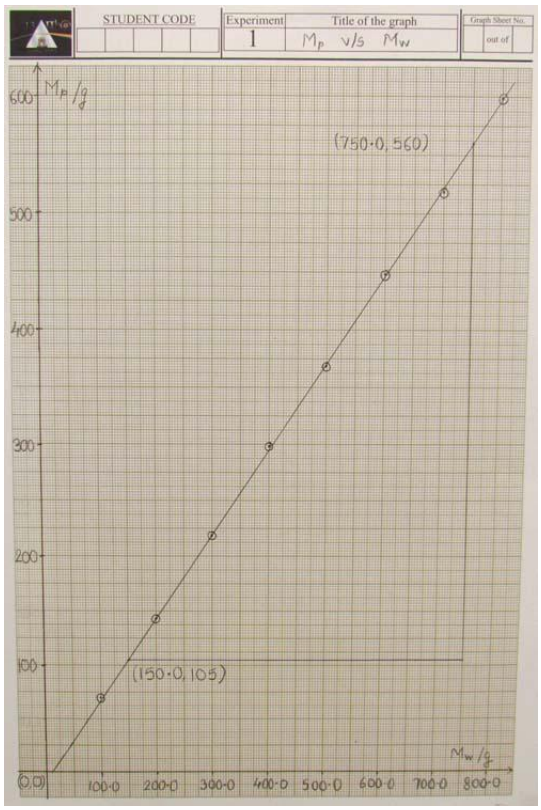
<u>Part 1</u>:

Mass of the pan = 28.6 g

$\theta = \pi$ radians

Obs. No.	M_w/g	M'_{p-} /g	M'_{p+} /g	$M'_{p(average)}$ /g	$M_{p(average)} = M'_{p(average)} + M_{pan}$ /g	$\Delta M_p = \frac{M'_{p+} - M'_{p-}}{2}$ /g
1	800.0	566	574	570	598.6	4
2	700.0	486	494	490	518.6	4
3	600.0	417	423	420	448.6	3
4	500.0	337	343	340	368.6	3
5	400.0	267	273	270	298.6	3
6	300.0	188	192	190	218.6	2
7	200.0	113	117	115	143.6	2
8	100.0	41	43	42	70.6	1

Graph of M_P v/s M_W:



Slope of the graph = 0.7583

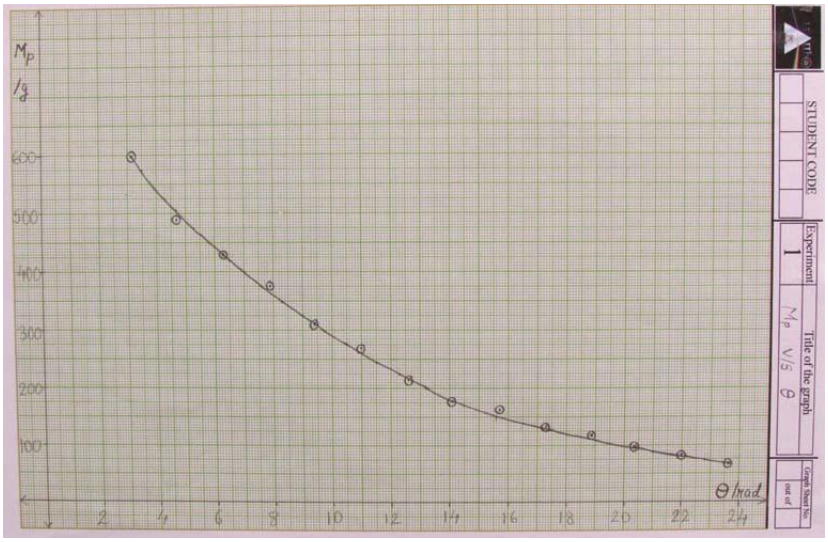
This shows that

$$P \propto W \qquad (1)$$

Part 1:

M_w = 800.0 g
M_{pan} = 28.6 g

Obs. No.	θ /rad	M'_{p-} /g	M'_{p+} /g	$M'_{p(average)}$ /g	$M_{p(average)} = M'_{p(average)} + M_{pan}$ /g	$\Delta M_p = \frac{M'_{p+} - M'_{p-}}{2}$ /g
1	π	565	575	570	598.6	5
2	$3\pi/2$	455	465	460	488.6	5
3	2π	396	404	400	428.6	4
4	$5\pi/2$	316	324	320	348.6	4
5	3π	276	284	280	308.6	4
6	$7\pi/2$	236	244	240	268.6	4
7	4π	182	188	185	213.6	3
8	$9\pi/2$	147	153	150	178.6	3
9	5π	133	137	135	163.6	2
10	$11\pi/2$	104	110	107	135.6	3
11	6π	88	92	90	118.6	2
12	$13\pi/2$	68	72	70	98.6	2
13	7π	54	56	55	83.6	1
14	$15\pi/2$	39	41	40	68.6	1
15	8π	29	31	30	58.6	1
16	$17\pi/2$	18	20	19	47.6	1



The graph between M_p and θ shows a curve.

There can be possibilities of different functional relationship.

1)

The possible functions can be $\frac{1}{\theta}$, $\frac{1}{\theta^2}$, $e^{-k\theta}$

For the first two functions mentioned above, at θ = 0, M_p will reach infinite value which is not possible. For the third function we know that M_p will have some finite value.

2)

If the function is anticipated as exponential one then it can be verified using half value technique whether at every half value of Mp, and then plotting ln M_p or better still $\ln\left(M_p / M_w\right)$ against θ.

If it is a straight line with slope –*k*,

$$M_p \propto e^{-k\theta}$$

or

$$P \propto e^{-k\theta} \qquad (2)$$

From (1) and (2),

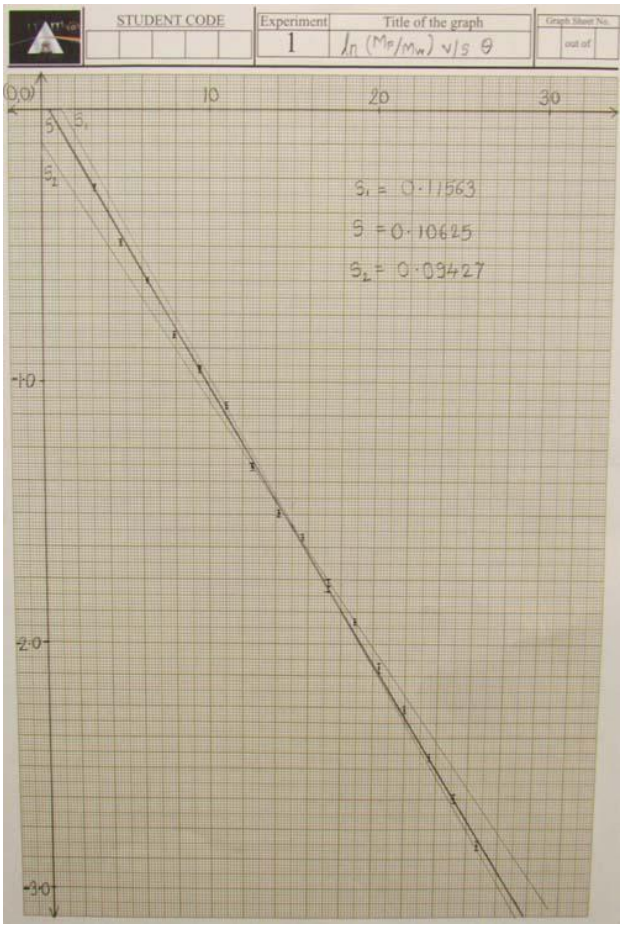
$$P \propto We^{-k\theta} \qquad (3)$$

The constant *k* in the above expression is equated to the coefficient of friction, μ.

$$P = CWe^{-\mu\theta} \qquad (4)$$

The constant of proportionality in equation (4) is 1. This is because at $\theta = 0$ rad, $P = W$.

$$P = We^{-\mu\theta} \qquad (5)$$



From the graph,

$$\ln\left(\frac{M_p}{M_w}\right) = -\mu\theta$$

where μ is the slope of the graph.

From the graph, μ = 0.106

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{(S_1 \sim S_2)/2}{S} = 0.10049$$

$$\Delta S = 0.01067 = \Delta\mu$$

$$u_C(\mu) = 0.00616$$

$$U(\mu) = 0.0123 \approx 0.02$$

$$\mu = 0.11 \pm 0.02$$

Part 2:

When the pan is moving up:

$$M_{p1} = M_u e^{-\mu\theta} \tag{6}$$

When the pan is moving down:

$$M_{p2} = M_u e^{\mu\theta} \tag{7}$$

M'_{p1}		$M'_{p1(average)}$	$\Delta M'_{p1}$	$M_{p1} = M'_{p1} + M_{pan}$
M'_{p1+}	M'_{p1-}			
164	156	160	4	188.6

M'_{p2}		$M'_{p2(average)}$	$\Delta M'_{p2}$	$M_{p2} = M'_{p2} + M_{pan}$
M'_{p2+}	M'_{p2-}			
49	45	47	2	75.6

For M_u:

Multiplying equation (6) and (7),

$$M_u = \sqrt{M_{p1} \cdot M_{p2}}$$

$$M_u = \sqrt{188.6 \times 75.6} = 119.4075g$$

For μ:

Dividing equation (6) by (7),

$$\frac{M_{p1}}{M_{p2}} = e^{2\mu\theta}$$

$$\mu = \frac{1}{2\theta} \ln\left(\frac{M_{p1}}{M_{p2}}\right)$$

For $\theta = \pi$

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{M_{p1}}{M_{p2}}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{188.6}{75.6}\right) = 0.1456$$

Uncertainty in M_u:

$$\frac{\Delta M_u}{M_u} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta M_{p1}}{M_{p1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta M_{p2}}{M_{p2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{4}{188.6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{2}{75.6}\right)^2} = 0.0169$$

$$\Delta M_u = 0.0169 \times 119.4075 = 2.018$$

$$u_C(M_u) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2.018 = 1.165$$

$$U(M_u) = 2 \times u_C(M_u) = 2 \times 1.165 = 2.33 \approx 3$$

$$M_u = 119 \pm 3\,\text{g}$$

Uncertainty in μ_u:

$$u_C(\mu_u) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Delta\mu_u = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\Delta M_{p1}}{M_{p1}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M_{p2}}{M_{p2}}\right)^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{4}{188.6}\right)^2 + \left(\frac{2}{75.6}\right)^2} = 0.003117$$

$$U(\mu_u) = 2 \times u_C(\mu_u) = 2 \times 0.003117 = 0.00623 \approx 0.007$$

$$\mu_u = 0.146 \pm 0.007$$

Model Solution

Part 1(a):

				Coil Blue (1-1)				AIR CORE		f = 1.000 KHz		
	R'	V_A	$V_{R'}$	V	Vo	I_1	Z_1	R_1	X_1	ωM	M (mH)	L_1(mH)
	450	10.090	6.760	6.770	4.940							
		10.060	6.700	6.740	4.910							
Avg	450	10.075	6.730	6.755	4.925	0.015	451.67	52.57	448.60	329.31	52.44	71.43

ΔV_A	ΔVR'	ΔV
0.14	0.11	0.11

us(z)	us(R)	ur(Z)	ur(R)	uc(R)	uc(Z)	uc(X)	uc(L)	U(R)	U(X)	U(L)
0.0057	1.1432	0.2747	0.4235	1.2191	0.2748	0.3114	0.000050	3.00	0.7	0.0002

Part 1b:

	Coil Green (2-2)					AIR CORE			f = 1.000 KHz		
	R'	V_A	$V_{R'}$	V	Vo	I_2	Z_2	R_2	X_2	ωM	M (mH)	L_2(mH)
	350	9.960	6.690	6.610	6.390							
		9.980	6.630	6.680	6.410							
Avg	350	9.970	6.660	6.645	6.400	0.019	349.21	42.96	346.56	336.34	53.56	55.18

ΔV_A	ΔVR'	ΔV
0.14	0.11	0.11

us(z)	us(R)	ur(Z)	ur(R)	uc(R)	uc(Z)	uc(X)	uc(L)	U(R)	U(X)	U(L)
0.0027	0.9057	0.2153	0.3335	0.9651	0.2153	0.2478	0.000039	2.00	0.5	0.0001

Part 1(c)

				Coil Blue (1-1)				Al CORE		f = 1.000 KHz		
	R'	V_A	$V_{R'}$	V	Vo	I^*_1	Z^*_1	R^*_1	X^*_1	ωM	M* (mH)	L^*_1(mH)
	290	9.900	5.940	6.010	4.450							
		9.880	5.890	6.050	4.410							
Avg	290	9.890	5.915	6.030	4.430	0.020	295.64	109.68	274.54	217.19	34.58	43.72

ΔV_A	ΔVR'	ΔV
0.14	0.10	0.10

us(z)	us(R)	ur(Z)	ur(R)	uc(R)	uc(Z)	uc(X)	uc(L)	U(R)	U(X)	U(L)
0.0220	1.2498	0.2030	0.3740	1.3046	0.2042	0.5657	0.000090	3.00	1.2	0.0002

Part 1(d):

	Coil Green (2-2)						Al CORE		f = 1.000 KHz		
	R'	V_A	$V_{R'}$	V	Vo	I^*_2	Z^*_2	R^*_2	X^*_2	ωM	M*(mH)	L^*_2(mH)
	280	9.860	6.280	6.170	4.840							
		9.830	6.230	6.130	4.860							
Avg	280	9.845	6.255	6.150	4.850	0.022	275.30	71.48	265.86	217.11	34.57	42.33

ΔV_A	ΔVR'	ΔV
0.14	0.10	0.10

us(z)	us(R)	ur(Z)	ur(R)	uc(R)	uc(Z)	uc(X)	uc(L)	U(R)	U(X)	U(L)
0.0173537	0.9509	0.1821	0.3106	1.000	0.1829	0.329	0.000052	3.00	0.7	0.0002

Part 2(f):

$$\omega M = R' \frac{V_O}{V_{R'}}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

M_{avg} (Air) =	53.00 mH		k =	0.844
M^*_{avg} (Al core) =	34.58 mH		k^* =	0.804

Part 2(g):

						AIR Core				f = 1.000 KHz R'=300Ω	
	Sr.	R_L	V_A	$V_{R'}$	V	V_{RL}	Ip	Zp	R_{PE}	X_{PE}	Is
	1	100	10.19	5.99	4.97	1.73					
			10.15	6.03	4.94	1.72					
Avg		100	10.17	6.01	4.96	1.73	0.0200	247.34	177.56	172.19	0.017
	2	200	10.12	5.39	5.67	2.77					
			10.09	5.44	5.70	2.79					
Avg		200	10.11	5.42	5.69	2.78	0.0181	314.96	207.03	237.36	0.014
	3	300	10.13	5.17	6.17	3.44					
			10.15	5.11	6.19	3.43					

Avg		300	10.14	5.14	6.18	3.44	0.0171	360.70	216.93	288.18	0.011
	4	400	10.11	5.00	6.51	3.88					
			10.14	5.05	6.53	3.87					
Avg		400	10.13	5.03	6.52	3.88	0.0168	389.25	206.46	329.99	0.010
	5	500	10.15	4.93	6.74	4.20					
			10.12	4.99	6.77	4.17					
Avg		500	10.14	4.96	6.76	4.19	0.0165	408.57	198.08	357.34	0.008
	6	600	10.10	4.98	6.91	4.42					
			10.13	4.91	6.93	4.40					
Avg		600	10.12	4.95	6.92	4.41	0.0165	419.82	183.87	377.41	0.007
	7	700	10.14	4.97	7.05	4.58					
			10.11	4.91	7.07	4.60					
Avg		700	10.13	4.94	7.06	4.59	0.0165	428.74	173.76	391.96	0.007
	8	800	10.09	4.91	7.17	4.74					
			10.12	4.98	7.15	4.72					
Avg		800	10.11	4.95	7.16	4.73	0.0165	434.38	161.90	403.08	0.006

Part 2(h)

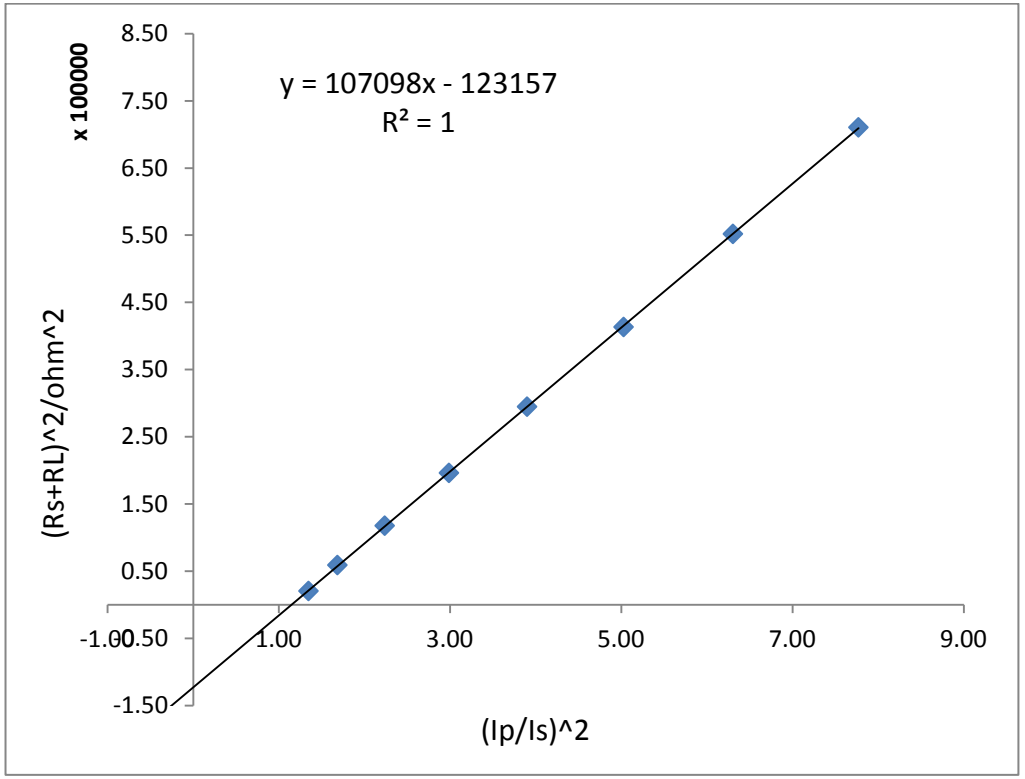
$$(R_S + R_L)^2 = (\omega M)^2 \left(\frac{I_P}{I_S}\right)^2 - X_S^2$$

Slope		M
1.07E+05		52.08 mH
Intercept		X_2
1.23E+05		350.94 Ω

Part 2(i)

$(Ip/Is)^2$	$(Rs+R_L)^2$
1.35	20438.25
1.69	59030.73
2.24	117623.21
2.99	196215.69
3.90	294808.17
5.03	413400.65
6.31	551993.13
7.77	710585.61

Part 2(j):



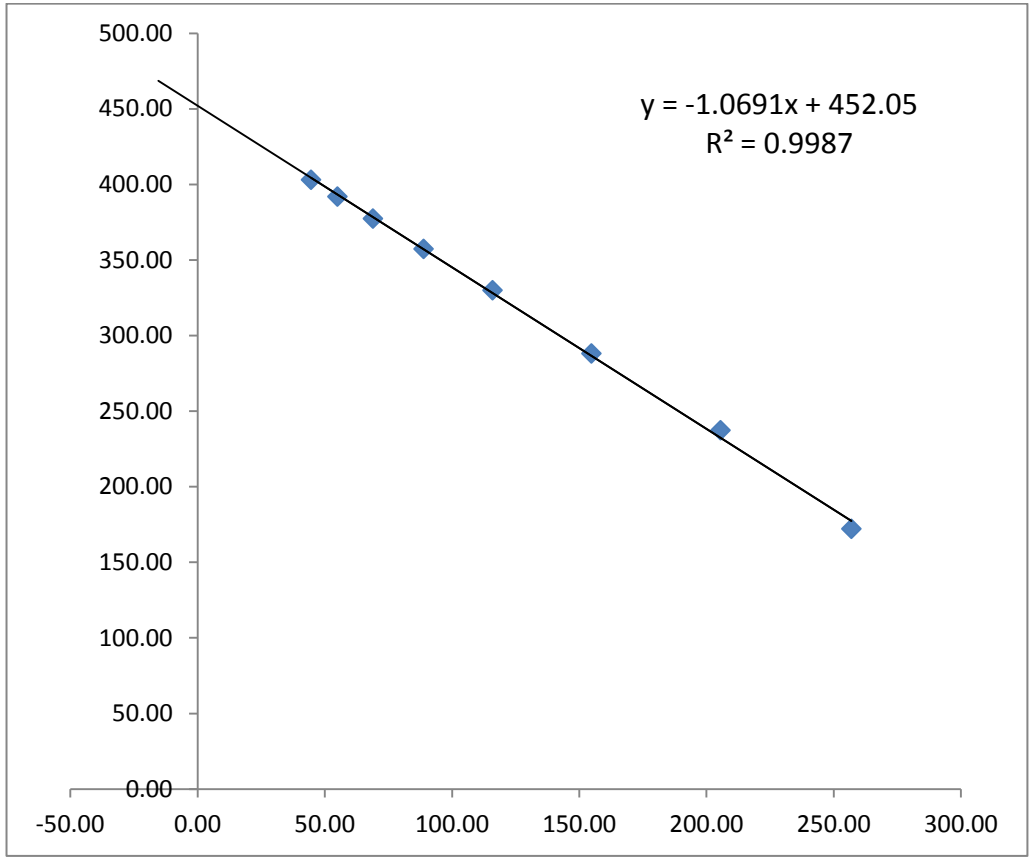
Part 3(k) and 3(l):

$$R_R = \left(\frac{I_S}{I_P}\right)^2 \left(R_S + R_L\right)$$

$$X_P = \left(\frac{I_S}{I_P}\right)^2 X_S$$

Sr.	R_R	X_R
1	106.00	256.95
2	144.08	205.52
3	153.17	154.78
4	148.17	115.92
5	139.16	88.82
6	127.84	68.91
7	117.81	54.95
8	108.46	44.59

Part 3(m)



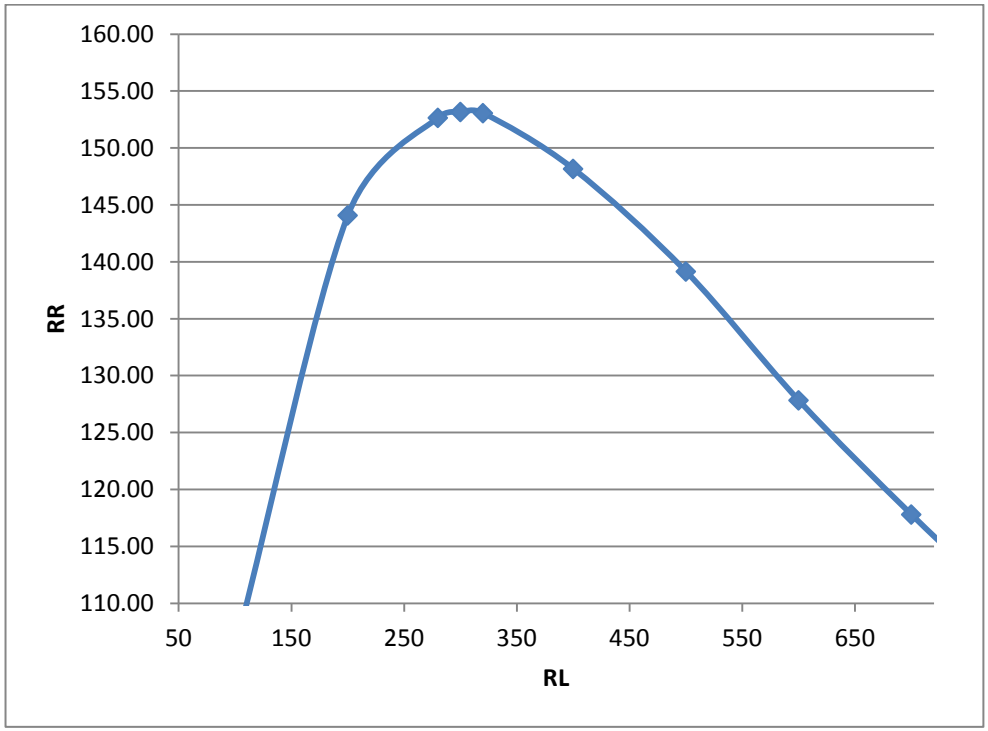
Inference:

$$X_P - X_R = X_{PE}$$

Part 3(n):

Sr.	R_L	V_A	$V_{R'}$	V	Vo	Ip	Is	$(Ip/Is)^2$	R_R
1	280	10.06	5.11	6.05	3.29				
		10.03	5.16	6.03	3.30				
	280	10.05	5.14	6.04	3.30	0.0171	0.01	2.12	152.65
2	320	10.02	5.09	6.19	3.51				
		10.05	5.03	6.21	3.50				
	320	10.04	5.06	6.20	3.51	0.0169	0.01	2.37	153.07

R_L	RR
100	106.00
200	144.08
280	152.65
300	153.17
320	153.07
400	148.17
500	139.16
600	127.84
700	117.81
800	108.45771



Part 4(o):

$$R_R = R^* - R_P$$

$$X_R = X_P - X^*$$

$$\frac{X_{core}}{R_{core}} = \frac{X_R}{R_R}$$

$$\frac{L_{core}}{R_{core}} = \frac{1}{2\pi f}\frac{\left(X_P - X^*\right)}{\left(R^* - R_P\right)}$$

Blue Coil	Green Coil
Lc/Rc	Lc/Rc
4.85E-04	4.50E-04

Part 4(p)

$$\Delta P = I_p^2\left(R_{PE} - R_P\right) - I_S^2\left(R_S + R_L\right)$$

		R_L	V_A	$V_{R'}$	V	Vo	I_1	I_2	R_{PE}
		1000	9.00	5.32	5.08	3.45			
			9.01	5.27	5.10	3.43			
Avg		1000	9.01	5.30	5.09	3.44	0.0177	0.003	145.23
			Δ P =	1.65E-02 W					